

УДК 532.52:519.635.4

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСИММЕТРИЧНОГО  
ОТНОСИТЕЛЬНО ПЛОСКОСТИ ЭКВАТОРА СФЕРИЧЕСКОГО  
ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА**

**АСТАФЬЕВА Н. М.**

Исследование течений жидкости во вращающихся сферических объемах представляет интерес в связи с изучением движений, форма и устойчивость которых существенно зависят от двух факторов: сферической геометрии объема и вращения. Такими являются, например, многие динамические процессы глобального масштаба, происходящие в гео- и астрофизических объектах. Замена сферических слоев плоскими, часто применяемая при моделировании для упрощения, далеко не всегда оправдана и может приводить к качественно неверным выводам. Изучение нелинейных сдвиговых течений вязкой несжимаемой жидкости в вращающихся сферических слоях представляется интересным и с чисто гидродинамической точки зрения. Замкнутость области движения, неоднородность течения и существенная зависимость основного течения от числа Рейнольдса приводят к большому разнообразию течений и механизмов возникновения неустойчивости. Здесь наблюдаются практически все виды неустойчивостей, характерные для вращающейся жидкости: центробежная, экмановского слоя, свободных сдвиговых слоев и т. д.

Большой прогресс в изучении рассматриваемого течения и его устойчивости достигнут в последние годы благодаря экспериментальным исследованиям. Отсутствие аналитического решения для основного течения, зависимость течения даже при малых значениях числа Рейнольдса от двух координат и наличие всех трех компонент скорости значительно усложняют теоретическое исследование движений жидкости между двумя вращающимися сферами. Сферическое течение Куэтта определяется тремя параметрами подобия: толщина слоя жидкости  $\delta = (r_2 - r_1)/r_1$ , число Рейнольдса  $Re = \omega_1 r_1^2 / \nu$  и отношение угловых скоростей вращения граничных сфер  $\omega = \omega_2 / \omega_1$  или  $Re_2 = \omega_2 r_2^2 / \nu$  ( $r_1, r_2, \omega_1, \omega_2$  — радиусы и угловые скорости вращения внутренней и внешней сфер). В области средних значений  $\delta, Re, \omega$ , где задача не имеет малого параметра и невозможны существенные упрощения, необходимо численно решать начально-краевую задачу для полной системы нелинейных уравнений Навье — Стокса и неразрывности. Численно пока может быть исследован только осесимметричный случай. Однако это не является сильным ограничением, так как эксперименты [1–3] показали, что в тонких слоях осесимметричные течения теряют устойчивость и течения, возникающие после потери устойчивости, при не очень большой критичности также остаются осесимметричными.

Работы последних лет [4–10], посвященные систематическому изучению осесимметричного симметричного по отношению к плоскости экватора течения и его устойчивости, позволили выявить основные общие закономерности. В настоящей работе снято требование экваториальной симметрии и затронуты в основном некоторые неясные вопросы, связанные с потерей устойчивости основного течения по отношению к осесимметричным возмущениям, а также с появлением периодических течений. Задача решается полупрямым методом [5], большим преимуществом которого является тот факт, что решение представляется не в виде компонент скорости и давления, а в виде их пространственных спектров. Искомые функции представляются в виде конечных рядов по присоединенным функциям Лежандра  $P_l^m(x)$ ,  $x = \cos \theta$ ,  $m = 0, 1$  с коэффициентами, зависящими от  $r$  и  $t$ , например для радиальной компоненты скорости

$$u(r, \theta, t) = \sum_{l=0}^L U_l(r, t) P_l^0(x)$$

Такое представление позволяет разделить переменные в линейных частях уравнений. Коэффициенты разложения нелинейных членов по соответствующим полиномам находятся по аналитическим формулам с помощью промежуточного перераз-

ложения по функциям Чебышева первого и второго рода [11]. На каждом временном шаге получается система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (нелинейные члены вычисляются по значениям функций на предыдущем шаге), которая с соответствующими граничными условиями решается методом матричной прогонки. Стационарное решение, если оно существует, находится установлением при  $t \rightarrow \infty$ .

Сопоставление численного и физического эксперимента позволяет выделить области значений определяющих параметров задачи, в которых течение остается осесимметричным, но существенной становится несимметрия по отношению к плоскости экватора, и области, в которых важно влияние трехмерности. Численное моделирование дает некоторые дополнительные возможности для понимания того, какие механизмы вызывают неустойчивость; позволяет изучить тонкую структуру течений, их энергетические характеристики, выделить масштабы преобладающих движений.

**1. Устойчивость основного течения по отношению к осесимметричным возмущениям.** Толщина слоя жидкости для течения между вращающимися сферами является критическим параметром в отличие от плоского и цилиндрического случаев. В тонких сферических слоях вблизи плоскости экватора выполняются условия, необходимые для наступления центробежной неустойчивости, аналогичные условиям в цилиндрическом течении Куэтта. Основное течение теряет устойчивость с соблюдением принципа смены устойчивости. Эксперименты [1–3] показали, что в некотором диапазоне значений  $\omega$ , близких к нулю, после потери устойчивости основного течения образуется стационарное вторичное течение в виде пары осесимметричных кольцевых вихрей в области экватора и с основной меридиональной циркуляцией на более высоких широтах (режим I).

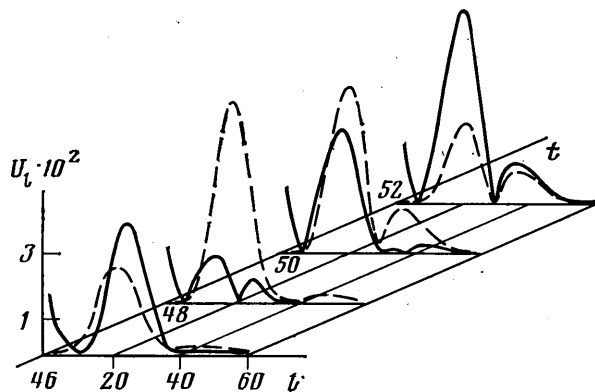
Численное моделирование [5] с условием симметрии течения относительно плоскости экватора показало, что при квазистатическом увеличении числа Рейнольдса в закритической области сохраняется основное течение, принимая форму течения типа «кошачий глаз» (с сепаратрисой и дополнительным вихрем вблизи экватора внутри основной циркуляции с тем же направлением вращения). Оно теряет устойчивость при значении числа Рейнольдса выше критического с образованием вторичного режима в виде четырех кольцевых вихрей в области экватора (режим II). Расчеты с гораздо более подробным временным и пространственным разрешением подтвердили результат. Режим I численно был получен только при закритических значениях числа Рейнольдса после внесения в поток конечного возмущения определенного вида сходного по форме с искомым течением, а также с помощью кратковременного возмущения границы при  $r=r_2$  [5] или при  $\theta=\pi/2$  [10].

Причину такого несоответствия можно объяснить только разной степенью симметрии движений в физическом эксперименте и при численном моделировании: физический эксперимент трехмерен, численный эксперимент осесимметричен и, кроме того, постановкой задачи были запрещены несимметричные по отношению к плоскости экватора (антисимметричные) движения. Для выяснения вопроса о том, какова степень симметрии возмущений, возникающих на пределе устойчивости основного течения в тонких слоях, было проведено дополнительное исследование. Установлено, что если антисимметричные движения не запрещены постановкой задачи, то существует диапазон толщин слоя  $\delta$ , в котором основное течение теряет устойчивость с образованием вторичного двухкольцевого режима без внесения дополнительных возмущений.

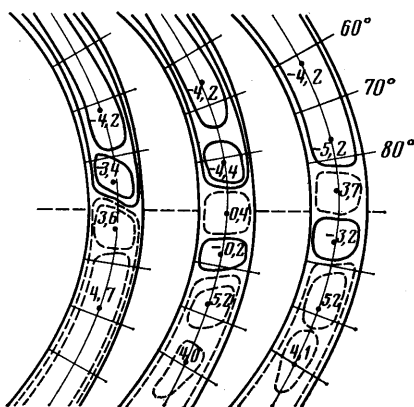
При вычислениях, проведенных при закритических значениях  $Re$  с учетом антисимметричной по отношению к  $\theta=\pi/2$  части решения, в процессе установления сначала формируется основное течение, затем начинается быстрый рост несимметричной составляющей и связанная с этим перестройка течения. На фиг. 1, 2 представлены характеристики течения в тонком слое ( $\delta=0,19$ ,  $\omega=0$ ) при  $Re=700=1,14 Re_*$ .

В разные моменты времени  $t$  на фиг. 1 показаны пространственные спектры радиальной компоненты скорости в среднем сечении слоя  $U_r(1+\delta/2, t)$  — отдельно для экваториально-симметричной (сплошная ли-

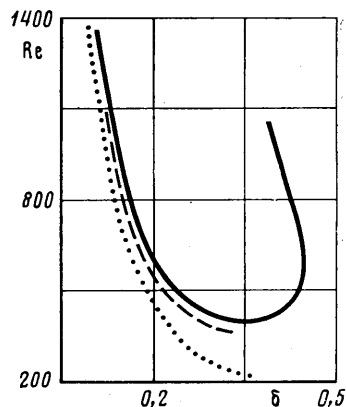
ния) и антисимметричной (пунктир) ее составляющих. При указанных значениях параметров при  $t \approx 42$  формируется основное течение типа «кошачий глаз», которому соответствует известный уже по вычислениям без учета антисимметричной части решения пространственный спектр  $U_t$  с двумя энергетически почти равноценными максимумами, ответственными за крупномасштабные меридиональные движения (max при  $l=2$ ) и за дополнительный внутренний вихрь (при  $l \approx 24-26$ ). Крупномасштабная часть решения в процессе всего перехода описывается экваториально-сим-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

метричной составляющей пространственного спектра. Перестройка вторичного максимума связана с появлением антисимметричной составляющей ( $t \approx 44-54$ ), приводящим к изменению спектра мелкомасштабных движений до характерного для двухкольцевого режима ( $t \gtrsim 54$ ).

На фиг. 2 приведены линии тока ( $\psi \cdot 10^3$ ) меридионального течения в процессе перестройки в моменты времени  $t=44, 48, 58$ . Происходит кратковременная потеря симметрии основного течения относительно плоскости экватора. Образуется двухвихревое течение, которое постепенно восстанавливает экваториальную симметрию.

Исследование течений в диапазоне толщин слоя  $0,049 \leq \delta \leq 0,5$  позволило получить нижнюю границу существования режима I в плоскости  $(Re, \delta)$  (сплошная линия на фиг. 3). Установлено, что для потери устойчивости основного течения в слоях толщиной  $\delta \leq 0,21$  и образования вторичного двухкольцевого режима необходимо присутствие несимметричных

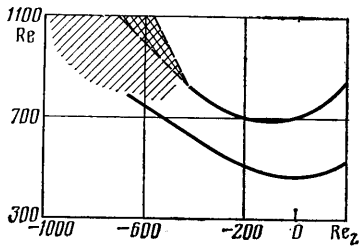
по отношению к плоскости экватора движений (переход от одного симметричного относительно  $\theta=\pi/2$  течения к другому осуществляется через несимметричный переходный режим). В слоях толщиной  $0,21 < \delta < 0,43$  вторичное течение в виде пары кольцевых вихрей можно получить только после внесения при закритическом значении числа Рейнольдса конечных возмущений специального вида.

Основное течение в слоях толщиной  $\delta \geq 0,43$  устойчиво по отношению к осесимметричным возмущениям. Интенсивная меридиональная циркуляция основного течения сильно перераспределяет угловой момент жидкости в слое, условия для наступления центробежной неустойчивости не выполняются и кольцевые тейлоровские вихри не образуются. Из эксперимента [12, 13] известно, что после потери устойчивости основного течения в толстых слоях возникают сложные трехмерные нестационарные течения. Указанные значения толщин слоя определены в случае вращения одной внутренней сферы ( $\omega=0$ ), вообще говоря, они зависят от  $\omega$ . На фиг. 3 для сравнения нанесены результаты, полученные в эксперименте [3] (пунктирная кривая), а также кривая устойчивости цилиндрического течения Куэтта:  $Re_* = 41,3\delta^{3/2}$ .

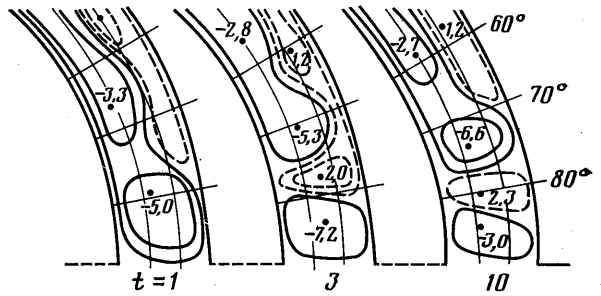
**2. Анализ пространственных спектров кинетической энергии.** В результате численного решения задачи после потери устойчивости и последующих бифуркаций получены стационарные осесимметричные вторичные кольцевые режимы — все те и только те, которые наблюдались в эксперименте [3]. Применяемый метод решения позволил получить пространственные спектры кинетической энергии  $E_l$ , по которым можно судить о масштабах преобладающих движений. Анализ пространственных спектров  $E_l$  показал следующее. Энергия дифференциального вращения сосредоточена в основном в движениях максимальных масштабов. Энергия меридионального движения также имеет один максимум при  $l=2$  резко спадающий с ростом  $l$  в тонких слоях при докритических  $Re$  и широкий, полого спадающий в толстых слоях на стадии сильно развитого основного течения. Пространственные спектры основного меридионального течения типа «кошачий глаз» и вторичного режима I имеют два энергетически почти равноценных максимума, второй — при более высоком значении  $l$ .

Полоидальное волновое число  $l_*$ , при котором достигается вторичный максимум  $E_l$ , соответствует характерному линейному размеру мелкомасштабных вторичных движений. Замечено, что  $l_*$  следующим образом меняется в пространстве параметров подобия  $\delta$ ,  $Re$ ,  $\omega$ . С ростом  $Re$  в пределах одного режима течения при постоянных  $\delta$  и  $\omega$  значение  $l_*$  уменьшается, т. е. масштабы вторичных движений укрупняются. Переход к режимам с большим числом кольцевых вихрей при постоянных  $\delta$  и  $\omega$  сопровождается увеличением  $l_*$ , т. е. включаются более мелкие масштабы движения. В случае, когда меняется толщина слоя жидкости,  $l_*$  увеличивается с уменьшением толщины  $\delta$  и уменьшается с ее ростом, т. е. с ростом  $\delta$  укрупняются масштабы мелкомасштабных движений. В случае изменения  $\omega$  волновое число  $l_*$  вблизи  $\omega=0$  растет при отрицательных  $\omega$  и уменьшается при положительных. На пределе устойчивости поперечный размер кольцевого вихря меньше в случае вращения граничных сфер в разные стороны. Вращение сфер в разные стороны как бы уменьшает эффективную толщину слоя жидкости, так как условия, необходимые для наступления центробежной неустойчивости, выполняются теперь не в слое между граничными сферами, а в слое между внутренней сферой и поверхностью нулевой азимутальной скорости, которая при  $\omega < 0$  продвигается внутрь жидкости.

Возможное число вихрей в слое зависит от его толщины — оно тем больше, чем тоньше слой жидкости. Размеры вихрей неравноценны: те, что вращаются в сторону, противоположную основной циркуляции, всегда меньше и менее интенсивны, им всегда соответствует замедление азимутального вращения жидкости.



Фиг. 4



Фиг. 5

**3. Осесимметричные периодические течения.** Области существования вторичных режимов (по  $Re$  при  $\omega=0$ ) при численном моделировании, как правило, отличаются от экспериментальных [5, 6]. Полученное затягивание режимов по  $Re$  можно объяснить наложенным при численном моделировании условием осевой симметрии движения. При  $Re$ , примерно вдвое превышающем критическое значение, течения становятся строго периодическими по времени с периодом колебаний, примерно равным периоду одного оборота вращения внутренней сферы. Без изменения топологии течения колеблются все характеристики: компоненты скорости, давление, полная кинетическая энергия, момент, передаваемый на внешнюю сферу, и т. д.

Предположение о том, что возможной причиной этих колебаний является неверный выбор временного или пространственных масштабов задачи, не оправдалось. Расчеты с много большим числом функций по  $\theta$  и точек по радиусу, а также с гораздо меньшим шагом по времени показали, что колебательные режимы сохраняются и период колебаний остается прежним. Осесимметричные периодические течения без изменения топологии являются, по-видимому, решениями трехмерных уравнений Навье — Стокса. Тот факт, что они не были обнаружены в эксперименте, свидетельствует об их неустойчивости относительно трехмерных возмущений.

В случае вращения обеих сфер в разные стороны численно получены периодические осесимметричные режимы не только с сохранением топологии течения, как при  $\omega=0$ , но и со сменой режимов, обнаруженные также и в эксперименте [14]. Период и амплитуды колебаний всех характеристик течения сохраняются при значительном дроблении временного и пространственных масштабов задачи при вычислениях. На фиг. 4 представлены нижние границы устойчивости режимов I (нижняя) и II (верхняя) в плоскости  $(Re, Re_2 = \omega_2 r_2^2 / \nu)$  в слое толщиной  $\delta=0,24$ . Область периодических течений (она заштрихована) находится на границе существования режимов I и II при достаточно больших отрицательных  $\omega$ , когда уже достаточно хорошо развита часть основной циркуляции, прилегающая к внешней сфере.

На фиг. 5 приведены картины линий тока (указаны моменты времени) для периодического течения при  $Re=950$  и  $\omega=-0,6$ . Наблюдается сложная перестройка, заключающаяся в том, что течение с четырьмя кольцевыми вихрями в области экватора переходит в основное течение, затем в течение с двумя кольцевыми вихрями и опять — с четырьмя. Течение с двумя кольцевыми вихрями в отличие от режима I характеризуется при  $\theta=\pi/2$  движением по радиусу от внутренней сферы к внешней (назовем это течение режимом I').

Переход от одного режима к другому занимает около 20% периода, остальное время существуют режимы с двумя (~6%), четырьмя (~50%) кольцевыми вихрями и основное течение (~24%). Во время переходов от режима к режиму течение существенно несимметрично по отношению

к плоскости экватора. Например, переход от двух к четырем кольцевым вихрям осуществляется через течение, содержащее 2 и 1 вихрь по разные стороны плоскости экватора; переход от четырехвихревого к основному — через 0—2 вихря; от основного к двухкольцевому — через 0—1 вихрь. Общий период перестройки течения равен примерно 17 оборотам вращения внутренней сферы. За время перестройки значение момента меняется приблизительно на 20%, полной кинетической энергии — примерно на 10%.

При продвижении в область существования режима II (см. фиг 4) время жизни четырехкольцевого режима в течение периода увеличивается, затем смена режимов прекращается, но течение не становится стационарным — существует окаймляющая область, в которой наблюдаются строго периодические колебания всех характеристик четырехкольцевого режима. Аналогичная картина наблюдается при переходе к режиму I' (в область больших отрицательных значений  $Re_2$ ) и основному течению (в область меньших  $Re$ ).

Сравнение с экспериментом [14] показало, что экспериментальный и теоретический периоды колебаний, а также смена режимов хорошо согласуются. Области существования периодических осесимметричных режимов пересекаются, экспериментальная область показана на фиг. 4 двойной штриховкой. Численная область несколько шире, она включает в себя экспериментальную зону трехмерных спиралей и, кроме того, окаймляется полосой периодических течений без смены режимов, которые в эксперименте не наблюдались. Так, при переходе к четырехкольцевому течению в эксперименте сначала увеличивалось время его жизни в течение периода, а после прекращения смены режимов прекращались все колебания.

При некоторых значениях определяющих параметров такое несоответствие теории и эксперимента легко объяснить, как и при  $\omega=0$ , наложенным при численном моделировании условием осевой симметрии. Например, в зоне существования трехмерных спиралей, где осесимметричные периодические течения неустойчивы относительно трехмерных возмущений. Возможно, однако, что при некоторых значениях определяющих параметров наличие осесимметричных периодических режимов связано с проявлением метастабильности при переходе к новому стационарному режиму.

Интересно, что периодические течения со сменой режимов наблюдаются и в случае запрета постановки задачи несимметричных относительно плоскости экватора движений. В [7] получены течения со сменой режимов, аналогичные описанным. Период перестройки и время жизни режимов, амплитуды изменения момента и энергии в течение периода приблизительно те же; все переходы осуществляются через симметричные относительно плоскости экватора движения. В [10] периодические течения со сменой режимов получены численно методом сеток в случае вращения обеих граничных сфер в одну сторону. Экспериментально, однако, осесимметричные периодические течения при  $\omega>0$  не обнаружены.

**4. Некоторые характерные особенности сферического течения Куэтта.** На основании проведенного численного исследования нелинейных осесимметричных течений вязкой несжимаемой жидкости во вращающихся сферических слоях, их устойчивости по отношению к осесимметричным возмущениям и сравнения полученных результатов с известными экспериментальными данными получены следующие общие закономерности.

Потеря устойчивости основного течения и образование вторичного двухкольцевого режима в слоях толщиной  $\delta \leq 0,21$  (при  $\omega=0$ ) осуществляется через осесимметричные несимметричные по отношению к плоскости экватора возмущения; в слоях толщиной  $0,21 < \delta < 0,43$  — только после внесения при закритическом  $Re$  конечных возмущений специального вида; основное течение в слоях толщиной  $\delta \geq 0,43$  устойчиво по отношению к осесимметричным возмущениям.

Полоидальное волновое число  $l_*$ , соответствующее вторичному максимуму пространственного спектра кинетической энергии  $E_l$ , характеризует преимущественный масштаб вторичных движений. Мелкомасштабные движения укрупняются, т. е.  $l_*$  уменьшается с ростом  $Re$  в пределах одного режима, а также с ростом  $\delta$ . Масштабы вторичных движений уменьшаются, т. е.  $l_*$  растет при переходе к режимам с большим числом кольцевых вихрей, а также с уменьшением  $\omega$  вблизи  $\omega=0$ .

Осесимметричные периодические течения со сменой режимов, обнаруженные при  $\omega < 0$ , являются решениями трехмерных уравнений Навье — Стокса; осесимметричные периодические течения без изменения топологии, обнаруженные при  $\omega = 0$ , являются решениями осесимметричных уравнений Навье — Стокса, неустойчивыми по отношению к трехмерным возмущениям.

В заключение автор благодарит И. М. Яворскую за полезное обсуждение.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Хлебугин Г. Н. Устойчивость движения жидкости между вращающейся и неподвижной концентрическими сферами.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 6, с. 53—56.
2. Wimmer M. Experiments on a viscous fluid flow between concentric rotating spheres.— J. Fluid Mech., 1976, v. 78, № 2, p. 317—335.
3. Яворская И. М., Беллев Ю. Н., Монахов А. А. Исследование устойчивости и вторичные течения во вращающихся сферических слоях при произвольных числах Россби.— Докл. АН СССР, 1977, т. 237, № 4, с. 804—807.
4. Bonnet J.-P., Alziary de Roquefort T. Écoulement entre deux sphères concentriques en rotation.— J. Mec., 1976, v. 15, № 3, p. 373—397.
5. Астафьева Н. М., Введенская Н. Д., Яворская И. М. Нелинейные осесимметричные течения жидкости в сферических слоях. М.: Ин-т косм. исслед. АН СССР, Препринт № 385, 1977, Деп. № 717—78.
6. Яворская И. М., Астафьева Н. М., Введенская Н. Д. Об устойчивости и неединственности течений жидкости во вращающихся сферических слоях.— Докл. АН СССР, 1978, т. 241, № 1, с. 52—55.
7. Астафьева Н. М., Яворская И. М. Численное исследование нелинейных осесимметричных движений жидкости в сферических слоях.— В сб.: Численные методы динамики вязкой жидкости. Новосибирск, 1979, с. 3—14.
8. Yavorskaya I. M., Astafeva N. M. Numerical analysis of the stability and non-uniqueness of spherical Couette flow.— Proc. 3d GAMM-Conf. on numerical methods in fluid mechanics. Koln, 1979.— In: Notes Numer. Fluid Mech., 1980, № 2, p. 305—315.
9. Bartels F., Krause E. Taylor vortices in spherical gaps.— Laminar-turbulent transition symp., Stuttgart, 1979. Berlin e. c.: Springer — Verlag, 1980, p. 415—425.
10. Bartels F. Taylor vortices between two concentric rotating spheres.— J. Fluid Mech., 1982, v. 119, p. 1—25.
11. Астафьева Н. М., Паршев В. А. К вопросу о численном решении уравнений Навье — Стокса в задачах со сферической геометрией.— В сб.: Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1978, т. 9, № 7, с. 12—18.
12. Яворская И. М., Беллев Ю. Н., Монахов А. А. Экспериментальное изучение сферического течения Куэтта.— Докл. АН СССР, 1975, т. 221, № 5, с. 1059—1062.
13. Беллев Ю. Н., Монахов А. А., Яворская И. М. Устойчивость сферического течения Куэтта в толстых слоях при вращении внутренней сферы.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 2, с. 9—15.
14. Беллев Ю. Н., Монахов А. А., Хлебугин Г. Н., Яворская И. М. Исследование устойчивости и неединственности течения во вращающихся сферических слоях. М., Ин-т космич. исслед. АН СССР, Препринт № 567, 1980.

Москва

Поступила в редакцию  
10.IV.1984