

УДК 532.517.6.013.4

НЕЛИНЕЙНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ДВУХФАЗНЫХ СТРУЙ

КУРОЧКИНА Е. П., СТРОНГИН М. П.

Изучается влияние твердых частиц на устойчивость течения и ветвление вторичных режимов в плоских затопленных струях. Присутствие частиц существенно сказывается на макро- и микроструктуре струйных течений, что меняет интенсивность турбулентного обмена импульса, тепла и массы [1, 2].

Теоретический анализ устойчивости потоков запыленных газов (в основном применительно к течению в канале) проводился в рамках линейной теории гидродинамической устойчивости [3, 4]. Важным параметром здесь является $\beta = T/\tau = L/U\tau$, где L и U — характерные масштабы длины и скорости в струе, $\tau = \rho_p d^2 / (18\mu)$ (ρ_p — плотность материала частиц, μ — вязкость газа) — время стоксовой релаксации относительной скорости частиц. Основное внимание в [3, 4] уделено случаю больших значений β , хотя в упрощенной постановке показано, что при малых β влияние частиц будет стабилизирующим. Обычно для приложений реализуется случай $\beta \ll 1$. В качестве иллюстрации можно провести следующие оценки. Для частиц диаметром $20 \cdot 10^{-6}$ м с плотностью $\rho_p \sim 10^4$ кг/м³ и при вязкости горячего воздуха $\mu \sim 10^{-4}$ кг/мс время релаксации составляет $\tau \sim 2 \cdot 10^{-3}$ с. В то же время для типичных масштабов струй $L \sim 10^{-2}$ м, $U \sim 2 \cdot 10^2$ м/с величина $T \sim 5 \cdot 10^{-5}$ с. Таким образом, частицы не успевают сравнять свою скорость со скоростью газа. Поэтому частицы можно рассматривать как неподвижную проницаемую среду со стоксовым законом сопротивления. Исходный поток приближенно считается параллельным.

1. Распределение скорости и концентрации. Будем считать, что струя изотермична, газ несжимаем, а возмущенное движение двумерно. В этом случае уравнение для функции тока возмущения имеет обычную форму [5], но содержит дополнительные члены (последние два), учитывающие стоксовское трение о частицы

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t} + U \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial x} - U'' \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial x} - \\ - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial y} = \frac{1}{R} \left(\Delta \Delta \Psi + \gamma \Delta \Psi + \gamma' \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь x, y — соответственно продольная и поперечная координаты, R — число Рейнольдса, $\gamma(y)$ — безразмерная концентрация частиц, $U(y)$ — профиль скорости исходной струи. Далее рассмотрены три формы распределения скорости: профиль, соответствующий автомодельному решению Шлихтинга (1.2); сглаженный профиль ступенчатого типа (1.3) и ступенчатый профиль, получаемый из предыдущего предельным переходом $\delta \rightarrow 0$ (1.4)

$$U = 1 - \text{th}^2 y \quad (1.2)$$

$$U = 1/2 \{ 1 + \text{th}[(1 - |y|)/\delta] \}, \quad \delta = 0,04 \quad (1.3)$$

$$U = 1, \quad |y| < 1; \quad U = 0, \quad |y| \geq 1 \quad (1.4)$$

Использованы безразмерные переменные, а выбор характерных масштабов скорости и длины ясен из выражений (1.2)–(1.4).

Имея в виду, что частицы инжектируются вместе со струей, примем для профиля (1.3) $\gamma(y) = AU(y)$. Профиль (1.4) здесь рассмотрен для це-

лей контроля расчетов. В силу своей простоты он допускает независимый, полуаналитический метод анализа устойчивости и ветвления [6]. Поэтому сопоставление результатов по профилю (1.3) и (1.4) с использованием различных методов служит убедительным аргументом достоверности полученных результатов. Для распределения скорости (1.2), учитывая, что угол расхождения для струи газа и струи частиц может быть различен, рассматривается семейство профилей

$$\gamma(y) = A \left[1 - \operatorname{th}^2 \left(\frac{y}{b} \right) \right] \quad (1.5)$$

$$\gamma(y) = \frac{A_1}{b} \left[1 - \operatorname{th}^2 \left(\frac{y}{b} \right) \right] \quad (1.6)$$

Формулы (1.5) и (1.6) отличаются лишь выбором характерного масштаба A , A_1 : в первом случае им служит безразмерная концентрация частиц на оси струи, которая отличается от размерной множителем $3\lambda dL^2$, а во втором — число частиц в данном сечении. Удобно пользоваться той или иной формулой, когда изучается либо зависимость результатов от концентрации частиц при заданном распределении ($b = \text{const}$, A меняется в (1.5)), либо зависимость от характера распределения при одном и том же числе частиц ($A_1 = \text{const}$, b меняется в (1.6)). Граничными условиями для (1.1) служат требования затухания решений при $|y| \rightarrow \infty$.

Задача решается в два этапа. На первом этапе с использованием известных методов [5] анализируется линейная устойчивость двухфазных струй и рассчитываются соответствующие нейтральные кривые. На втором этапе изучается характер ветвления вторичных автоколебательных режимов от полученных нейтральных кривых.

2. Линейная устойчивость. В этом случае функция тока ищется в виде $\Psi = \varphi(y) \exp[i\alpha(x - Ct)] + \text{к.с.}$, где к.с. — комплексно-сопряженные члены. Подставляя это выражение в (1.1) и пренебрегая нелинейными членами, получим для $\varphi(y)$ модифицированное уравнение Орра — Зоммерфельда

$$L_\alpha \varphi = \varphi^{IV} - 2\alpha^2 \varphi'' - i\alpha R \left[\left(U - C + \frac{i\gamma}{\alpha R} \right) (\varphi'' - \alpha^2 \varphi) - U'' \varphi \right] + \gamma' \varphi' + \alpha^4 \varphi = 0 \quad (2.1)$$

В силу симметрии задачи часть граничных условий можно поставить на оси струи

$$\varphi' = \varphi''' = 0, \quad y = 0 \quad (2.2)$$

$$\varphi = \varphi'' = 0, \quad y = 0 \quad (2.3)$$

что отвечает симметричным или антисимметричным по функции тока возмущениям.

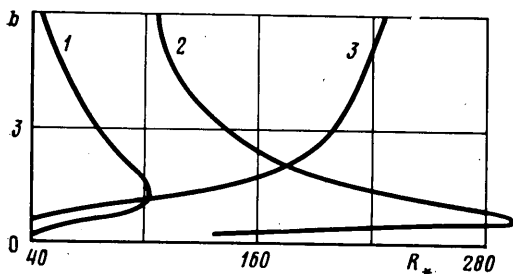
После чего достаточно рассмотреть, например, только нижнюю полуплоскость, потребовать, чтобы при $y \rightarrow -\infty$ выполнялись условия затухания. Поскольку при $|y| \rightarrow \infty$ и $U(y)$ и $\gamma(y)$ стремятся к нулю, условия затухания могут быть сведены к следующей дифференциальной форме [5]:

$$\begin{aligned} \varphi''' - \alpha \varphi'' - \beta^2 (\varphi' - \alpha \varphi) &= 0 \\ \varphi''' - \beta \varphi'' - \alpha^2 (\varphi' - \beta \varphi) &= 0 \quad (y \rightarrow -\infty) \\ \beta^2 &= \alpha^2 - i\alpha R C \end{aligned} \quad (2.4)$$

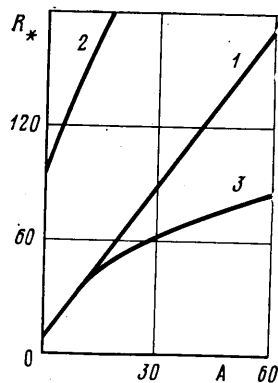
При численном решении условия (2.4) выполнялись при некотором конечном значении y_1 , которое выбиралось, исходя из быстроты затухания U , γ на бесконечности. С увеличением y_1 результаты быстро устанавливались. Основные расчеты проведены при $y_1 = -6$ в случае профиля (1.2), $y_1 = -2$ для (1.3). Для ступенчатого распределения (1.4) условия (2.4) можно поставить прямо на границе $y_1 = -1$. За точкой y_1 ($y < y_1$)

решение представляет сумму затухающих экспонент: $\varphi = c_1 \exp(\alpha y) + c_2 \exp(\beta y)$. Величина констант находится из условий непрерывности внешнего и внутреннего ($y > y_1$) решений.

Внутренняя краевая задача решалась методом разностной прогонки [7]. Для существования нетривиального нейтрального колебания при каждом значении волнового числа α число Рейнольдса R и фазовая скорость C находились как собственные значения. Начальные значения при определенных наборах параметров были выбраны по известным решениям [5].



Фиг. 1



Фиг. 2

Часть результатов была получена в работах [6, 8]. Затем параметры менялись непрерывным образом и для определения R, C использовался метод секущих.

Основные результаты расчетов представлены на фиг. 1, 2. Из полученных результатов видно, что присутствие частиц приводит к стабилизации. Для автомоделного профиля скорости (1.2) исследовалась зависимость эффективности стабилизации от ширины потока частиц. На фиг. 1 приведена зависимость критического числа Рейнольдса R_* от ширины потока частиц b . Для симметричной моды (2.2) при $A_1 = 36$ кривая 1 соответствует профилю (1.6), а кривая 2 — (1.5). Максимальная стабилизация достигается при $b \approx 1$. Кривая 2 на фиг. 1 соответствует антисимметричной моде (2.3) при $A_1 = 3$ и формуле (1.6). Максимальная стабилизация наблюдается при $b \approx 0,6$. Таким образом, показано, что частицы, расположенные вблизи критического слоя струи, максимально стабилизируют струю. Симметричные возмущения во всех случаях оказались наиболее опасными.

Установлено, что начиная с некоторого $A \approx 20$ ($b = 1$) зависимость R_* от параметра A линейная. Это было проверено вплоть до $A \sim 10^4$. Результаты расчетов приведены на фиг. 2. Кривая 1 соответствует симметричной моде, а кривая 2 — антисимметричной. Кривая 3 соответствует течению с профилем скорости (1.3). В силу специфики (1.3) (наличие больших градиентов) критические числа Рейнольдса ниже, чем для (1.2), почти в 2 раза. При этом критическая длина волны возмущений быстро падает.

3. Ветвление автоколебаний. При расчете автоколебательных решений и определении характера их бифуркаций от нейтральной кривой — мягкого, когда вторичный режим малой амплитуды существует при увеличении числа Рейнольдса, или жесткого, когда новые режимы, близкие к исходному, существуют при меньших числах Рейнольдса, а при возрастании R происходит катастрофический переход к далекому режиму, — использовался метод Ляпунова — Шмидта [5, 9]. Для струйных течений подобный анализ проведен в [10] для автомоделного профиля с использованием условий прилипания вместо (2.4). Ниже этот анализ проводится при исполь-

зовании условий асимптотического затухания возмущений для течений с профилями (1.2)–(1.4) и с учетом присутствия частиц в струе.

Решение ищется в виде бегущих вдоль оси x волн. С учетом преобразования $\Psi \rightarrow \psi(x-Ct, y)/R$ после подстановки в (1.1) получим

$$\Delta\psi = \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\Delta\psi}{\partial y} + \quad (3.1)$$

$$+ R \left[(U-C) \frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} - U'' \frac{\partial\psi}{\partial x} \right] - \gamma\Delta\psi - \gamma' \frac{\partial\psi}{\partial y}$$

На нейтральной кривой выбирается произвольная точка и рассматривается малая окрестность соответствующего ей числа Рейнольдса R_0 $R=R_0+fe^2$, где $f=\pm 1$. Решение (3.1) ищется в виде ряда по малому параметру ε

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \psi_k; \quad RC=R_0 \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k C_k$$

При $k=1$ коэффициент ψ_k имеет вид

$$\psi_1 = a \{ \varphi(y) \exp [i\alpha(x-Ct)] + \text{к.с.} \} \quad (3.2)$$

Здесь $\varphi(y)$ – собственная функция модифицированного уравнения Орра – Зоммерфельда (2.1). Амплитудный множитель a подлежит определению.

Решение для ψ_2 запишется в виде

$$\psi_2 = a^2 \{ V_0(y) + V_1(y) \exp [2i\alpha(x-C_0t)] + V_1^*(y) \exp [-2i\alpha(x-C_0t)] \} \quad (3.3)$$

Функции $V_0(y)$ и $V_1(y)$ определяются из следующих краевых задач:

$$V_0^{IV} + \gamma V_0'' + \gamma' V_0' = i\alpha(\varphi^* \varphi' - \varphi \varphi'^*)'' \quad (3.4)$$

$$V_0 = V_0'' = 0, \quad y=0 \quad (3.5)$$

$$V_0' = i\alpha \left\{ \frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta} d_1^* d_3 \exp[(\alpha+\beta)y] + \frac{\alpha-\beta^*}{\alpha+\beta^*} d_1 d_3^* \exp[(\alpha+\beta^*)y] + \frac{\beta-\beta^*}{\beta+\beta^*} d_3 d_3^* \exp[(\beta+\beta^*)y] \right\}, \quad y \rightarrow -\infty \quad (3.6)$$

$$L_{2\alpha} V_1 = i\alpha(\varphi'^2 - \varphi \varphi''')' \quad (3.7)$$

$$V_1 = V_1'' = 0, \quad y=0 \quad (3.8)$$

$$V_1''' - 2\alpha V_1'' - \beta_1^2 (V_1' - 2\alpha V_1) = (\beta-\alpha) [(\alpha+\beta)^2 - \beta_1^2] B \exp[(\alpha+\beta)y] \quad (3.9)$$

$$V_1''' - \beta_1 V_1'' - (2\alpha)^2 (V_1' - \beta_1 V_1) = (\alpha+\beta-\beta_1) [(\alpha+\beta)^2 - (2\alpha)^2] B \exp[(\alpha+\beta)y] \quad (y \rightarrow -\infty)$$

$$\beta_1^2 = (2\alpha)^2 + 2i\alpha R_0 [U(y_1) - C_0]$$

$$B = i\alpha d_1 d_3 (\alpha+\beta) (\alpha-\beta)^2 \{ (\alpha+\beta)^4 - 2(2\alpha)^2 \times$$

$$\times (\alpha+\beta)^2 + (2\alpha)^4 - 2i\alpha R_0 [U(y_1) - C_0] \times$$

$$\times [(\alpha+\beta)^2 - (2\alpha)^2]^{-1}$$

$$d_1 = \left\{ \frac{i[\varphi''(y_1) - \alpha^2 \varphi(y_1)]}{\alpha R_0 [U(y_1) - C_0]} + \varphi(y_1) \right\} \exp(-\alpha y_1)$$

$$d_3 = \frac{-i[\varphi''(y_1) - \alpha^2 \varphi(y_1)]}{\alpha R_0 [U(y_1) - C_0]} \exp(-\beta y_1)$$

Условия (3.5) и (3.8) следуют из условия симметрии $\varphi(y)$ и выражений (3.4) и (3.7). Условия (3.6) и (3.9) есть условия затухания функций $V_0(y)$ и $V_1(y)$ на $-\infty$. Требование разрешимости при $k=3$ дает

$$-C_2 R_0 J_1 + a^2 J_2 + f J_3 = 0 \quad (3.10)$$

$$J_1 = \int_{-\infty}^0 \theta(\varphi'' - \alpha^2 \varphi) dy$$

$$J_2 = \int_{-\infty}^0 \theta [V_0'(\varphi'' - \alpha^2 \varphi) - V_0''' \varphi - V_1'(\varphi'' - \alpha^2 \varphi)^* - 2V_1(\varphi'' - \alpha^2 \varphi)^* + 2\varphi^*(V_1'' - 4\alpha^2 V_1) + \varphi^*(V_1'' - 4\alpha^2 V_1)'] dy$$

$$J_3 = \int_{-\infty}^0 \theta [U(\varphi'' - \alpha^2 \varphi) - U'' \varphi] dy$$

где $\theta(y)$ – собственная функция следующей задачи:

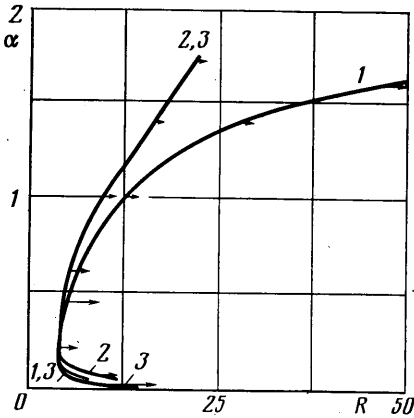
$$\theta^{IV} - 2\alpha\theta'' + \alpha^4\theta = i\alpha R_0 \left[\left(U - C_0 + \frac{i\gamma}{\alpha R_0} \right) (\theta'' - \alpha^2\theta) + 2U'\theta' \right] - \gamma'\theta'$$

$$\theta' = \theta''' = 0 \quad (y=0)$$

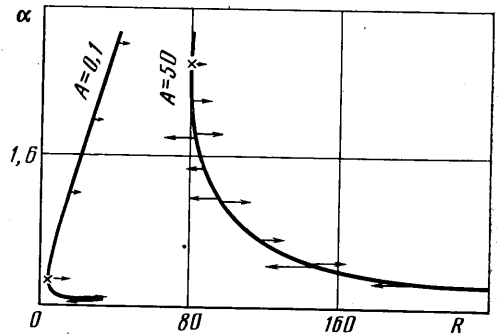
$$\theta''' - \alpha\theta'' - \beta^2(\theta' - \alpha\theta) = 0$$

$$\theta''' - \beta\theta'' - \alpha^2(\theta' - \beta\theta) = 0 \quad (y \rightarrow -\infty)$$

Интегралы J_1, J_2, J_3 комплекснозначны, и формула (3.10) представляет собой систему двух уравнений для определения вещественных переменных a^2 и $C_2 R_0$. Из требования $a^2 > 0$ определяется знак f и соответственно режим возбуждения. Для решения поставленной задачи используется метод разностной прогонки [7].



Фиг. 3



Фиг. 4

Анализ характера ветвления вторичных режимов показал, что в плоской однофазной струе с профилями скорости основного течения (1.2)–(1.4) ветвление происходит в закритическую область. На фиг. 3 длина стрелок дает представление о величине $\partial E / \partial R$, которая на нейтральной кривой имеет вид

$$\frac{\partial E}{\partial R} \Big|_{R=R_0} = f a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (|\varphi'|^2 + \alpha^2 |\varphi|^2) dy$$

Здесь E – энергия автоколебаний (кривые 1–3 соответствуют профилям (1.2)–(1.4)). Введение частиц для (1.2) не приводит к смене режима ветвления (расчеты проводились вплоть до $A \sim 10^4$).

Интересное явление обнаружено для (1.3). При введении частиц в поток наблюдается появление жесткого режима на нижней ветви нейтральной кривой (фиг. 4). При малой концентрации ($A \approx 0,1$) это происходит вдали от носика ($\alpha \approx 0,06$; $R \approx 21$). С ростом концентрации частиц растет и волновое число α , при котором происходит смена режима. Однако на носике нейтральной кривой сохраняется мягкое ветвление. При $A \geq 38$ возникает еще одна область на нейтральной кривой, для которой

происходит бифуркация вторичных режимов в докритическую область. При этом на носике до $A \leq 70$ сохраняется мягкий режим возбуждения.

Таким образом, выполненный анализ устойчивости плоских струй с профилями (1.2)–(1.4) показал, что добавление частиц приводит к росту критического числа Рейнольдса. Причем с ростом концентрации A асимптотически устанавливается линейная зависимость R_* от A . Замечено, что для автомоделного профиля скорости (1.2) с ростом концентрации критические параметры α и C устанавливаются $\alpha_* \sim 0,5$; $C_* \sim 0,3$. С помощью фиг. 2 можно приближенно определить и R_* для нужной концентрации частиц. Ветвление вторичного автоколебательного режима происходит в струях мягким образом как в присутствии, так и в отсутствие частиц. Однако для ступенчатых профилей добавление частиц приводит к тому, что на нейтральной кривой появляются участки с жестким характером бифуркации, что в принципе может приводить к нелинейной дестабилизации течения в струях вблизи среза сопла.

Авторы признательны В. Н. Штерну за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаатс М. К., Фришман Ф. А. Разработка методики и исследование интенсивности турбулентности на оси двухфазной турбулентной струи.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1973, № 2, с. 153–157.
2. Гиршович Т. А., Каргушинский А. И., Лаатс М. К., Леонов В. А., Мульчи А. С. Экспериментальное исследование турбулентной струи, несущей тяжелые примеси.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1981, № 5, с. 26–31.
3. Saffman P. G. On the stability of laminar flow of a dusty gas.— J. Fluid Mech., 1962, v. 13, № 1, p. 120–128.
4. Michael D. H. The stability of plane Poiseuille flow of a dusty gas.— J. Fluid Mech., 1964, v. 18, № 1, p. 19–32.
5. Курочкина Е. П. Смена режима в плоской струе со ступенчатым профилем скорости.— ПМТФ, 1984, № 6, с. 43–47.
6. Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977. 366 с.
7. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 591 с.
8. Киселева Е. П., Лифшиц А. М., Правдина М. Х., Стронгин М. П. Расчет устойчивости плоской струи с частицами.— В кн.: Турбулентные двухфазные течения. Таллин, 1982, с. 104–107.
9. Андрейчиков И. П., Юдович В. И. Об автоколебательных режимах, ответвляющихся от течения Пуазейля в плоском канале.— Докл. АН СССР, 1972, т. 202, № 4, с. 791–794.
10. Лихачев О. А., Правдина М. Х. Модельные автоколебания в плоской струе.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 3, с. 26–32.

Новосибирск

Поступила в редакцию
21.V.1984