

УДК 532.517.6 : 534.242

## **ТЕПЛОБМЕН ПРИ ТЕЧЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ В ПОЛЕ ПОПЕРЕЧНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ**

**РЕПИН В. Б.**

Практически все известные к настоящему времени тепломассообменные процессы в звуковом поле проходят более интенсивно, чем при использовании традиционных средств технологии [1, 2]. Например, в устройствах, работающих в вибрационном режиме горения, увеличивается теплонапряженность топочного пространства, улучшается теплоотдача к стенкам камеры и как следствие повышается коэффициент полезного действия и удельная мощность всей установки [3]. Интерес к этой проблеме возрос также в связи с высокочастотными автоколебаниями, возникающими при работе ракетных двигателей, возбуждение которых приводит к разрушению двигателя или нарушению функционирования жизненно важных устройств ракеты [4].

К настоящему времени достигнут определенный уровень понимания процессов тепломассообмена, протекающих в звуковом поле, а для случая отсутствия вынужденного движения среды получены довольно простые аналитические соотношения, учитывающие специфику таких процессов [5, 6]. С другой стороны, вопрос о влиянии резонансного акустического поля на вынужденное течение вязкой жидкости и теплообмен, несмотря на то что задачи такого рода имеют более широкое практическое приложение, изучен слабо по сравнению со случаем отсутствия основного течения [1, 3, 4, 7–11]. Менее всего исследовано влияние поперечных резонансных колебаний на тепломассообменные процессы. В экспериментальных работах [4, 12, 13] исследовались только интегральные характеристики, вопрос об изучении локальных величин даже и не ставился. Теоретические исследования этого вопроса вообще отсутствуют. И это не смотря на тот факт, что при работе ракетных двигателей поперечные моды колебаний, как правило, наиболее вероятны и опасны.

В данной работе приводится аналитическое решение задачи о влиянии поперечных резонансных акустических колебаний на процесс теплоотдачи при ламинарном течении жидкости в плоском канале.

1. Рассмотрим ламинарное течение вязкой жидкости в плоском канале бесконечной длины шириной  $2h$ , на которое перпендикулярно основному течению наложено звуковое поле вида

$$w = B \cos(2\pi z/\lambda) \cos \omega t \quad (1.1)$$

где  $B$  — амплитуда пульсаций скорости;  $\lambda$  и  $\omega$  — длина волны и частота вынужденных пульсаций соответственно. Ось  $x$  совпадает с направлением основного течения, ось  $y$  направлена перпендикулярно к стенке канала.

Воспользуемся уравнениями движения вязкой сжимаемой жидкости

$$\rho[\partial \mathbf{u}/\partial t + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u}] = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \frac{2}{3}\mu \text{grad}(\nabla \mathbf{u}) \quad (1.2)$$

$$\partial \rho/\partial t + \nabla(\rho \mathbf{u}) = 0$$

с граничными условиями

$$y = 0, \quad \mathbf{u} = 0 \quad (1.3)$$

к которым необходимо добавить условие симметрии поля скорости на оси канала и условие постоянства расхода жидкости через поперечное сечение за период колебаний.

Теоретические исследования данной задачи довольно подробно описаны в работах [5–8, 14, 15], поэтому ниже конспективно приводятся основные результаты, необходимые для понимания дальнейшего изложения.

При решении используются следующие допущения:  $M_0 = u_0/c \ll 1$ ,  $M_1 = B/c \ll 1$ ,  $\delta_1/h \ll 1$  (здесь  $u_0$  — масштаб скорости основного течения;  $c$  — скорость звука;  $\delta_1 = \sqrt{2\nu/\omega}$  — толщина акустического пограничного слоя). Считается, что параметры жидкости  $\rho$ ,  $\mu$  не зависят от температуры. Последнее неравенство означает, что накладываемые акустические возмущения являются высокочастотными.

Используя метод возмущений, представим искомые величины в виде рядов

$$\begin{aligned} u &= u_0(y) + u_1(r, t) + u_2(r, t) + \dots, \quad \rho = \rho_0 + \rho_1(r, t) + \dots \\ &\dots, \quad p = p_0(x) + p_1(r, t) + \dots \end{aligned} \quad (1.4)$$

Подставив разложения (1.4) в уравнение движения (1.2) и собрав члены одного порядка малости, получим в нулевом приближении с использованием условия несжимаемости основного потока ( $M_0 \ll 1$ ) течение Пуазейля

$$u_0 = u_{\max} \left(2 - \frac{y}{h}\right) \frac{y}{h}, \quad u_{\max} = - \left(\frac{h^2}{2\mu}\right) \left(\frac{dp_0}{dx}\right) \quad (1.5)$$

В дальнейшем, воспользовавшись условием высокочастотности, поперечное сечение канала разделим на две области: внутреннюю, с поперечным размером порядка  $\delta_1$ , и внешнюю, с характерным размером  $h$ .

Уравнения первого приближения запишутся так для внешней области

$$\rho_0 \frac{\partial w_1}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0 \quad (1.6)$$

для внутренней области

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial w_1}{\partial t} &= - \frac{\partial p_1}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial y} + \rho_0 \frac{\partial w_1}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Решением уравнения (1.6) является плоская волна, а уравнения (1.7) имеют следующее решение:

$$\begin{aligned} w_1 &= B \cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\right) \{1 - \exp[-(1+i)\eta]\} \exp(i\omega t), \quad \eta = \frac{y}{\delta_1} \\ v_1 &= B \left(\frac{\delta_1}{\lambda}\right) \pi(1-i) \sin\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\right) \{\exp[-(1+i)\eta] - 1\} \exp(i\omega t) \end{aligned} \quad (1.8)$$

В выражениях (1.8) необходимо выделить действительную часть.

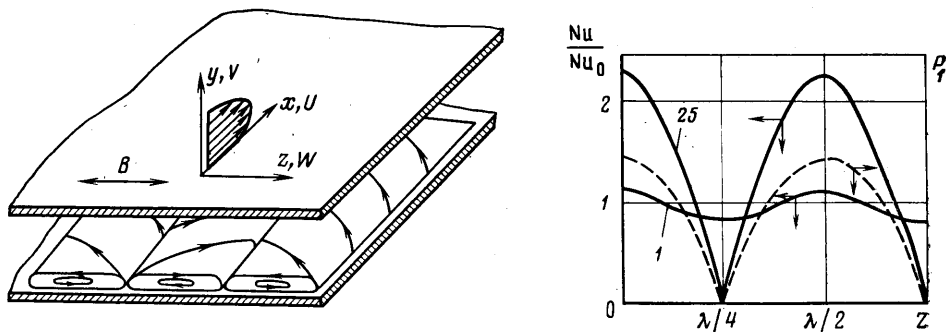
Запишем уравнения, описывающие стационарную поправку второго порядка к основному течению во внутренней области

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial^2 w_2}{\partial \eta^2} &= \frac{\partial p_2}{\partial z} + \left\langle \rho_0 v_1 \frac{\partial w_1}{\partial \eta} + \rho_0 w_1 \frac{\partial w_1}{\partial z} + \rho_1 \frac{\partial w_1}{\partial t} \right\rangle \\ \rho_0 \frac{\partial w_2}{\partial z} + \rho_0 \frac{\partial v_2}{\partial \eta} &= - \left\langle \frac{\partial(\rho_1 w_1)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho_1 v_1)}{\partial \eta} \right\rangle \end{aligned}$$

которые имеют следующее решение:

$$\begin{aligned} w_2 &= (B^2/8c) \sin(4\pi z/\lambda) [3 - e^{-2\eta} - (1-3i)e^{-(1-i)\eta} - (1+3i)e^{-(1+i)\eta}] \\ v_2 &= \frac{B_2}{c} \frac{\delta_1}{\lambda} \frac{\pi}{4} \left\{ 2 \cos \frac{4\pi z}{\lambda} \left[ 5 - 3\eta - \frac{9-5i}{4} e^{-(1-i)\eta} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{9+5i}{4} e^{-(1+i)\eta} - \frac{1}{2} e^{-2\eta} \right] + 1 - \frac{1-i}{2} e^{-(1-i)\eta} - \frac{1+i}{2} e^{-(1+i)\eta} \right\} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Аналитическое выражение для стационарной поправки к скорости во внешней области не приводится, поскольку в дальнейшем оно не понадобится. Характер стационарного течения в области акустического пограничного слоя с точностью до членов второго порядка малости показан на фиг. 1, из которой следует, что в течении появляются вихревые жгуты, ось вращения которых совпадает с направлением невозмущенного течения, а направление вращения чередуется через  $\lambda/4$ . Аналогичные течения, но с противоположным вращением, возникают и во внешней области (на



Фиг. 1

фигуре не показано). Экспериментально такой тип течения наблюдался в круглой трубе при возбуждении в ней тангенциальных резонансных колебаний [15].

Похожее явление возникает в области перехода от ламинарного режима течения к турбулентному. Существование стационарных вихревых жгутов в области перехода на вращающемся диске впервые экспериментально было показано в работе [16], а теоретическое объяснение их возникновения и развития строится, исходя из нелинейной теории гидродинамической устойчивости [17, 18]. Аналогичные структуры возникают в течениях с криволинейными линиями тока, таких, как течение Тейлора — Гертлера, течение в изгибах труб и рек — эффект Дина, а также в трубах с принудительной закруткой [19], при отрыве потока от поверхности в области его повторного присоединения [20], при естественной конвекции — эффект Бенара [21], и т. д. В любом случае возникновение вихревых жгутов приводит к перераспределению локальных тепловых потоков, обуславливая изменение интегральных характеристик процесса теплообмена. Трудность аналитического описания задач такого рода обусловлена существенной трехмерностью процесса. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

2. Будем полагать по-прежнему, что течение жидкости в направлении  $x$  установившееся, при этом температура жидкости и стенки канала является величиной постоянной и равной  $T_\infty$ . При  $x=0$  температура стенки скачкообразно изменяется до величины  $T_w$ , которая в дальнейшем остается постоянной, при этом полагается, что разность температур  $T_w - T_\infty$  настолько мала, что изменением физических свойств жидкости, а также естественной конвекцией можно пренебречь. Пренебрегая также диссипативными эффектами, уравнение энергии запишем так

$$\rho c_p \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + (u \nabla) T \right] = \lambda \Delta T + \frac{\partial p}{\partial t} + (u \nabla) p \quad (2.1)$$

с граничными условиями

$$y=0, \quad T=T_w; \quad y=h, \quad T=T_\infty \quad (x \geq 0)$$

Представим все величины в виде суммы стационарной и пульсирующей компонент [5]

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t); & \rho &= \rho_0 + \rho_1(\mathbf{r}, t); \\ p &= p_0(x) + p_1(\mathbf{r}, t); & T &= T_0(\mathbf{r}) + T_1(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в уравнение энергии и осреднив за период колебаний, получим, пренебрегая вкладом пульсационных членов [1, 7, 8] и учитывая соотношение (1.4), следующее уравнение:

$$U_0 \frac{\partial \theta}{\partial X} + V_2 \frac{\partial \theta}{\partial Y} + 4\pi \frac{h}{\lambda} W_2 \frac{\partial \theta}{\partial Z} = \text{Pe}^{-1} \left[ \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \left( \frac{4\pi h}{\lambda} \right)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} \right] \quad (2.2)$$

$$U_0 = \frac{u_0}{u_{\max}}, \quad \theta = \frac{T_0 - T_w}{T_\infty - T_w}, \quad X = \frac{x}{\lambda}, \quad Y = \frac{y}{\lambda}, \quad Z = \frac{4\pi z}{\lambda}, \quad \text{Pe} = \frac{u_{\max} h}{a}$$

Если  $\text{Pe} \gg 1$ , то можно показать, что на стенках канала образуется тепловой пограничный слой  $\delta_2/h = O[(x/h)^{1/3} \text{Pe}^{-1/3}]$ , толщина которого при определенных условиях существенно меньше ширины канала. Тогда вклад последних двух членов в правой части уравнения энергии становится пренебрежимо малым. Но даже при этом допущении задача остается сложной для аналитического решения, что обусловлено громоздким выражением для  $v_2$  и  $w_2$ . Можно выделить предельные случаи, для которых задача допускает простые аналитические решения.

Известно [1, 2, 5], что внешние и внутренние вихревые течения играют различную роль в процессе теплоотдачи. В том случае, когда размер теплового пограничного слоя существенно меньше толщины акустического слоя (т. е.  $\delta_2 \ll \delta_1$ ), то в процессе теплообмена определяющую роль играют внутренние течения. Рассмотрим этот случай.

Вводя внутренние переменные по соотношениям  $\eta = y/\delta_1$ ,  $\xi = x/h$ ,  $Z = z4\pi/\lambda$ , разложив поле скорости вблизи стенки в ряд и ограничившись линейной аппроксимацией, получим

$$U_0 = 2\eta \frac{\delta_1}{h}, \quad V_2 = \frac{\pi}{4} \frac{\delta_1}{\lambda} \frac{M_1^2}{M_0} [1 - 3 \cos Z] \eta^2, \quad W_2 = \frac{M_1^2}{4M_0} \eta \sin Z$$

после чего уравнение энергии примет более простой вид

$$2\eta \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \left[ \eta \sin Z \frac{\partial \theta}{\partial Z} + \frac{\eta^2}{4} (1 - 3 \cos Z) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right] \frac{M_1^2}{M_0} \frac{h^2}{\lambda \delta_1} = \text{Pe}^{-1} \left( \frac{h}{\delta_1} \right)^3 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \quad (2.3)$$

Здесь  $Z$  отсчитывается от точки набегания внутренних течений на стенку, т. е. от пучности давления стоячей волны.

Вводя переменную

$$\varphi = \eta / \Phi(\xi, Z) \quad (2.4)$$

уравнение (2.3) преобразуем в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 \theta}{d\varphi^2} + 3\varphi^2 \frac{d\theta}{d\varphi} = 0 \quad (2.5)$$

при условии, что функция  $\Phi(\xi, Z)$  является решением следующего уравнения в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + E \left[ \frac{1}{3} \sin Z \frac{\partial \Phi}{\partial Z} + \frac{\Phi}{4} (3 \cos Z - 1) \right] = 3$$

$$n = \frac{2}{3} \text{Pe} \left( \frac{\delta_1}{h} \right)^3 \Phi^3(\xi, Z); \quad E = \frac{3}{2} \frac{M_1^2}{M_0} \frac{h^2}{\lambda \delta_1} \pi$$

Решение уравнения (2.5), удовлетворяющее граничным условиям

$$\varphi=0, \quad \theta=0; \quad \varphi \rightarrow \infty, \quad \theta=1$$

имеет вид

$$\theta = \frac{1}{\Gamma(4/3)} \int_0^{\infty} \exp(-\beta^3) d\beta \left( \frac{1}{\Gamma(4/3)} \approx 1,12 \right)$$

Полученное соотношение описывает температурное поле вблизи стенки канала. Для практики более существенным является знание локальных тепловых потоков или коэффициента теплообмена

$$Nu = \frac{\alpha h}{\lambda} = \frac{1}{T_{\infty} - T_w} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 1,12 \frac{h}{\delta_1} \frac{1}{\Phi(\xi, Z)}$$

Для определения явной функциональной зависимости безразмерного локального коэффициента теплоотдачи необходимо определить  $\Phi(\xi, Z)$ . Воспользовавшись методом характеристик [22], и после ряда громоздких преобразований получим следующее выражение:

$$n = 3(1+A)^{3/4} \int_0^{\xi} \frac{\exp[1/2 E(P-\xi)]}{\{1+A \exp[2/3 E(P-\xi)]\}^{3/4}} dP, \quad A = \frac{1 - \cos Z}{1 + \cos Z}$$

что позволяет записать соотношение для вычисления безразмерного коэффициента теплоотдачи в явном виде

$$Nu = 0,678 Re^{1/2} (1+A)^{-3/4} \left[ \int_0^{\xi} \frac{\exp[1/2 E(P-\xi)]}{\{1+A \exp[2/3 E(P-\xi)]\}^{3/4}} dP \right]^{-1/4} \quad (2.6)$$

Таким образом, процесс теплообмена в поле поперечных резонансных звуковых волн определяется не только величинами, характеризующими теплообмен при невозмущенном течении жидкости (например,  $Re$ ), но является сложной функцией параметров звукового поля ( $M_i, \lambda, \omega$ ).

Интеграл в выражении (2.6) имеет простое аналитическое представление только в случае  $A=0$  (пучность давления) и  $A=\infty$  (узел давления). Используя это свойство, можно показать, что в пучности давления ( $Nu_n$ ) процесс теплообмена протекает более интенсивно, чем в узле ( $Nu_i$ )

$$\frac{Nu_n}{Nu_i} = \left[ 2 \frac{1 - \exp(-E\xi/2)}{\exp(E\xi) - 1} \right]^{-1/4} \geq 1$$

На фиг. 1 представлено распределение локального коэффициента теплоотдачи поперек направления невозмущенного течения для двух значений параметра  $E\xi=1$  и 25 (штриховой линией нанесена эпюра давления в произвольном масштабе). Коэффициент теплообмена является периодической функцией поперечной координаты  $Z$  с длиной волны, в 2 раза меньшей длины волны звуковых колебаний, причем по мере удаления вниз по потоку влияние вторичных течений на процесс теплоотдачи усиливается, обуславливая повышенную неоднородность локальных тепловых потоков.

Соотношение (2.6) является довольно громоздким для анализа. Учитывая это, запишем его для малых величин  $E\xi \ll 1$ , разложив в ряд

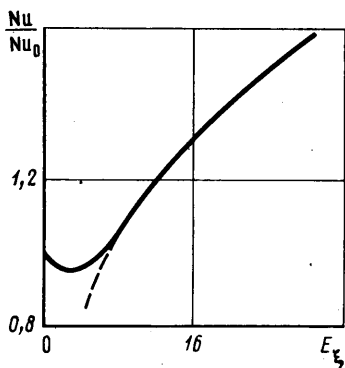
$$Nu = 0,678 Re^{1/2} \xi^{-1/4} [1 - 1/12 E\xi (3 \cos Z - 1) + O((E\xi)^2)] \quad (2.7)$$

При низких интенсивностях звукового поля изменения в процессе теплообмена пропорциональны амплитуде накладываемых возмущений  $B^2$ , частоте колебаний  $\omega^{1/2}$ , ширине канала  $h^{1/2}$  и обратно пропорциональны

скорости невозмущенного течения  $u_{\max}^{-2/3}$ , коэффициентам кинематической вязкости  $\nu$  и температуропроводности  $a$  среды.

Если звуковое поле отсутствует ( $E=0$ ), то соотношения (2.6) и (2.7) переходят в зависимость, описывающую процесс теплообмена при стационарном течении жидкости в плоском канале [23]

$$Nu_0 = 0,678 Re^{1/2} \xi^{-1/2} \quad (2.8)$$



Фиг. 2

Вычислив среднее значение коэффициента теплообмена в пределах одной вихревой ячейки ( $0 \leq Z \leq \pi/4$ ) с использованием выражений (2.6) и (2.8) и взяв их отношение, получим, что при низких интенсивностях звукового поля происходит незначительное (не более 5%) уменьшение интегрального теплообмена (см. фиг. 2), однако при значительных интенсивностях наличие звукового поля оказывает положительный эффект.

Аналогичный качественный результат получается при использовании более простого метода расчета процесса теплообмена при

пульсациях скорости, основанного на гипотезе о квазистационарности процесса, согласно которой [10] связь между значением коэффициента теплообмена и мгновенной скоростью потока подчиняется соотношениям, полученным при стационарном течении. О неправомочности такого подхода при высокочастотных колебаниях теплоносителя говорит тот факт, что при квазистационарном расчете в качестве параметра, определяющего относительное влияние пульсации скорости на процесс конвективной теплоотдачи, фигурирует комплекс  $M_1/M_0$ , в котором отсутствуют такие характеристики звукового поля, как частота и длина волны, что приводит к непредсказуемому расхождению между экспериментом и расчетом [24].

С другой стороны, подход, основанный на решении полных уравнений движения и энергии, указывает, что при высокочастотных колебаниях таким комплексом является  $E\xi$ , который включает все параметры, характеризующие звуковое поле. Следовательно, при увеличении частоты колебаний теплоносителя качественная картина влияния амплитуды пульсаций скорости на процесс теплоотдачи не изменяется, но меняется структура функциональной связи между коэффициентом теплоотдачи и остальными параметрами задачи. Поэтому в случае высокочастотных колебаний теплоносителя гипотезу о квазистационарности можно использовать лишь при проведении ориентировочных расчетов.

Как отмечалось выше, при низкой интенсивности звукового поля происходит уменьшение интегрального теплообмена, но оно столь незначительно, что в подавляющем большинстве экспериментальных исследований этот эффект не проявлялся (за исключением работ [8, 10]), так как точность тепловых измерений составляла 10–15%. В связи с этим среди исследователей долгое время бытовал термин «критический уровень звукового давления», т. е. давление, ниже которого звуковое поле не оказывает никакого влияния на процесс теплоотдачи. О том, что этот термин имеет техническое значение и лишен физического смысла, говорилось неоднократно [1, 2]. Полученное решение лишний раз доказывает это.

При больших значениях параметра ( $E\xi \geq 10$ ) кривая на фиг. 2 с удовлетворительной точностью аппроксимируется зависимостью

$$Nu = 0,52 (E\xi)^{1/2} Nu_0 = 0,97 \left( \frac{B^2 h}{a \sqrt{\nu \omega}} \right)^{1/2} \left( \frac{h}{\lambda} \right)^{3/2}$$

Как и следовало ожидать, при значительных интенсивностях звукового поля процесс теплообмена не зависит от скорости невозмущенного течения и определяется только структурой вторичных течений. Аналогичная зависимость может быть получена в работе [1], в которой исследовался теплообмен цилиндра в звуковом поле при отсутствии вынужденного течения. Отличительной особенностью полученного соотношения является наличие дополнительного комплекса  $h/\lambda$ , обусловленного эффектами сжимаемости. Отметим, что решение (2.6), полученное с использованием теории возмущений и справедливое при малых значениях возмущающего параметра, дает удовлетворительный результат за пределами его аппроксимации.

Необходимо подчеркнуть, что процесс теплоотдачи различен для случаев малых и больших амплитуд звукового поля. А именно функциональная связь безразмерного коэффициента теплоотдачи со всеми параметрами процесса является более сильной для малых амплитуд звукового поля, чем для больших. Исключение составляет только влияние температуропроводности среды. Этот факт говорит о неправомерности поиска эмпирических зависимостей в виде степенных соотношений. Именно по этой причине в литературе отсутствуют степенные эмпирические закономерности, описывающие процесс конвективного теплообмена в канале при наличии резонансных акустических колебаний и справедливые в широком диапазоне изменения параметров.

Полученное решение справедливо при выполнении ряда допущений, которые можно условно разделить на гидродинамические и тепловые. Гидродинамическим является условие высокочастотности  $\delta_1/h \ll 1$ , ограничивающее ширину канала снизу. С другой стороны, требование, чтобы колебания скорости были длинноволновыми,  $h/\lambda \ll 1$ , ограничивает ширину канала сверху. Оба требования выполнимы только в случае, когда  $\delta_1 \ll \lambda$ , что равносильно условию  $\lambda \gg 2\pi\nu/c$ . Например, для газов ( $c \approx 10^2$  м/с,  $\nu \approx 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с) эта величина составит  $\lambda \gg 10^{-7}$  м или  $f \ll 10^9$  Гц. Принимая запас в четыре порядка, получаем приемлемую оценку диапазона частоты колебаний —  $f \ll 10^5$  Гц ( $\lambda \gg 10^{-3}$  м). Особо стоит вопрос о величине амплитуды колебаний скорости, которая характеризуется отношением  $M_1/M_0$ . В работе [14] показано, что используемое решение для стационарной составляющей поля скорости является асимптотически верным, если выполняется условие  $M_1^2/M_0 \ll 1$ . Поскольку  $M_0 \ll 1$ , то отношение  $M_1/M_0$  может быть достаточно большим.

Тепловым ограничением является условие малости толщины теплового пограничного слоя по сравнению с акустическим ( $\delta_2 \ll \delta_1$ ), откуда следует, что  $x/h \ll (\delta_1/h)^3 \text{Re Pr}$ . Но поскольку  $(\delta_1/h) \ll 1$ , а ламинарный режим течения существует при числах Рейнольдса порядка  $10^3$ , то размер области вниз по течению, где справедливо полученное решение, будет иметь ощутимые размеры только в случае больших чисел Прандтля ( $\text{Pr} \gg 1$ ). Следует ожидать, что при турбулентном течении, когда толщина ламинарного подслоя, в котором сосредоточена основная часть теплового сопротивления, существенно меньше акустического слоя, внутренние вторичные течения будут играть основную роль в процессе теплоотдачи даже в случае  $\text{Pr} = O(1)$  и область применимости полученного решения (с поправкой на турбулентный характер течения) существенно расширится.

За пределами этой области, когда  $\delta_1 \ll \delta_2 \ll h$ , в процессе конвективного теплообмена начинают играть активную роль внешние акустические течения, а область, занятая внутренними течениями, становится существенно теплопроводной [1, 5], все изменения, обусловленные наличием резонансного акустического поля, будут определяться гидродинамической структурой внешних вторичных течений.

3. По аналогии с рассмотренным выше случаем представим поле скорости вблизи стенки в виде ряда Тейлора, используя поле скорости внешних течений; при этом координата  $Z$  отсчитывается от узла давления

(пучность скорости) стоячей волны

$$U=2Y-Y^2, \quad W_2=W_2(0)+(\partial W_2/\partial Y)_{Y=0}Y$$

Отличительной особенностью выражения для  $W_2$  является тот факт, что значение скорости «на стенке» не равно нулю, а определяется исходя из решения во внутренней области с использованием условия асимптотического сращивания:

$$W_2(0)=w_2(\infty)+O(\delta_1/\lambda)$$

Используя решение (1.9), справедливое во внутренней области, получим значение скорости внешних вторичных течений на стенке

$$W_2(0)=\sqrt[3]{8}M_1^2/M_0 \sin Z$$

Это соотношение не зависит от числа Рейнольдса, подсчитанного по скорости вторичных течений ( $Re_1$ ), в то время как следующие члены в разложении для  $W_2$  будут определяться величиной  $Re_1$  [14].

Ограничившись первыми членами разложения получим уравнение и граничные условия

$$Y \frac{\partial \theta}{\partial X} + \sigma \left[ \sin Z \frac{\partial \theta}{\partial Z} - Y \cos Z \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right] = (2Pe)^{-1} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2}, \quad \sigma = \frac{3}{4} \frac{\pi h M_1^2}{\lambda M_0}$$

$$Y=0, \quad \theta=0; \quad Y \geq \delta_2, \quad \theta=1$$

В рассмотренном случае не существует переменной типа (2.4), сводящей уравнение энергии к обыкновенному дифференциальному уравнению. Воспользуемся методами, основанными на понятии слоя конечной толщины, и представим профиль температур в виде полинома второй степени

$$\theta = 2 \frac{h}{\delta_2} Y - \left( \frac{Yh}{\delta_2} \right)^2 \quad (3.1)$$

Здесь использовалось дополнительное условие отсутствия градиента температуры вне теплового пограничного слоя.

Проинтегрировав уравнение энергии по сечению теплового пограничного слоя, используя соотношение (3.1), получим нелинейное уравнение первого порядка в частных производных с переменными коэффициентами ( $Nu$  — число Нуссельта)

$$\frac{\partial Nu}{\partial X} + \sigma Nu \sin Z \frac{\partial Nu}{\partial Z} - \sigma Nu^2 \cos Z = -\frac{3}{4} \frac{Nu^4}{Pe}, \quad Nu = \frac{2h}{\delta_2}$$

Полагая  $\sigma \ll 1$ , отыщем решение в виде ряда  $Nu = Nu_0 + \sigma Nu_1 + O(\sigma^2)$ . Применяя стандартную процедуру отыскания решения, методом возмущений, получим

$$Nu = 0,763 Pe^{1/2} X^{-1/2} [1 + 0,46\sigma Pe^{1/2} X^{1/2} \cos Z + O(\sigma^2)] \quad (3.2)$$

Первое приближение (при  $\sigma=0$ ) описывает процесс теплообмена при невозмущенном течении среды. Сравнение с точным решением (2.8) показывает, что выражение (3.2) примерно на 12% завышает значение для  $Nu$ . Это несоответствие обусловлено приближенной схемой расчета. Локальный коэффициент теплоотдачи является периодической функцией поперечной координаты с длиной волны, в 2 раза меньшей длины волны накладываемых возмущений, но максимум теплоотдачи теперь расположен в пучности скорости, а минимум — в узле. По мере удаления вниз по течению вклад вторичных течений в процесс теплообмена возрастает. Изменения, обусловленные наличием резонансных акустических колебаний, являются функцией скорости невозмущенного течения  $u_{\max}$ , амплитуды пуль-



сащий скорости накладываемых возмущений  $B^2$ , ширины канала  $h^{1/3}$ , длины волны  $\lambda$ ; они обратно пропорциональны коэффициенту температуропроводности  $a$  и в отличие от выражения (2.7) не зависят от вязкости среды.

Можно утверждать, что при выполнении ряда условий (например, при ламинарном режиме течения, когда  $Re \gg 1$ ) возможна ситуация, когда по мере удаления вниз по течению от точки  $x=0$  произойдет смена режима теплоотдачи. А именно максимум теплоотдачи из области пучности давления стоячей волны переместится в пучность скорости.

Автор выражает благодарность В. Е. Накорякову за постановку задачи и обсуждение результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Накоряков В. Е., Бурдуков А. П., Болдарев А. М., Терлеев П. Н. Тепло- и массообмен в звуковом поле. Новосибирск, 1970. 253 с.
2. Физика и техника мощного ультразвука. Т. 3. М.: Наука, 1970. 689 с.
3. Халитов Н. Х., Репин В. Б., Подымов В. Н. Экспериментальные исследования теплообмена в камере вибрационного горения. — Инж.-физ. журн., 1975, т. 28, № 3, с. 490–494.
4. Неустойчивость горения в ЖРД. М.: Мир, 1975. 869 с.
5. Галиуллин Р. Г., Репин В. Б., Халитов Н. Х. Течение вязкой жидкости и теплообмен тел в звуковом поле. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1978. 128 с.
6. Галицкий Б. М., Рыжов Ю. А., Якуш Е. В. Тепловые и гидродинамические процессы в колеблющихся потоках. М.: Машиностроение, 1977. 256 с.
7. Purdy K. R., Patel N. P. On acoustic streaming in a channel. — JUTAM Symposium, 1971, Quebec, 1972, p. 1679–1740.
8. Keith H. G., Purdy K. R. Laminar forced convection under the influence of a resonant acoustic field. — Proc. Heat Transfer and Fluid Mech. Inst., San Diego — La Jolla Calif., 1967. Stanford: Univ. Press, 1967, p. 298–316.
9. Галицкий Б. М., Ноздрин А. А., Рыжов Ю. А., Якуш Е. В. Исследование локальных коэффициентов теплоотдачи в условиях резонансных колебаний газа в каналах. — Инж.-физ. журн., 1976, т. 31, № 2, с. 197–201.
10. Hanby V. I. Convective heat transfer in a gas-fired pulsating combustor. — Trans. ASME, 1969, v. A91, № 1, p. 48–52.
11. Джексон, Порди. Резонансное пульсирующее течение и конвективная теплоотдача. — Тр. амер. о-ва инж.-мех. Теплоотдача, 1965, т. 87, № 4, с. 93–100.
12. Хригов Л. М. Исследование процесса теплообмена при наличии поперечных акустических колебаний большой интенсивности. — Тр. ЦИАМ, 1972, № 530. 10 с.
13. Румьинский А. Н., Сенкевич М. В. Влияние пульсаций потока большой амплитуды на теплообмен. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 2, с. 169–172.
14. Мурга В. А. Влияние акустических колебаний на стационарное течение в канале. — ПМТФ, 1976: № 2, с. 57–64.
15. Hribar A. E., Purdy K. R. Secondary flow induced by a transverse resonant acoustic field in a circular duct. — Pap. ASME, 1972, № FE-6, 7 p.
16. Gregory N., Stuart J. T., Walker W. S. On the stability of three dimensional boundary layers with application to the flow due to a rotating disk. — Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, 1955, v. 248, № 943, p. 155–199.
17. Benney D. J., Lin C. C. On the secondary motion induced by oscillations in a shear flow. — Phys. Fluids, 1960, v. 3, № 4, p. 656–657.
18. Желгузин Н. А., Терехова Н. М. Вторичные течения в неустойчивом пограничном слое. — ПМТФ, 1981, № 4, с. 45–52.
19. Щукин В. К. Теплообмен и гидродинамика внутренних потоков в полях массовых сил. М.: Машиностроение, 1980. 240 с.
20. Бражко В. Н. Периодическая структура течения и теплопередачи в области присоединения сверхзвуковых потоков. — Уч. зап. ЦАГИ, 1979, т. 10, № 2, с. 113–118.
21. Гершун Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972, 392 с.
22. Dang Vi Duong, Ruckenstein E. High Reynolds numbers unsteady convective mass transfer from fluid spheres. — Int. J. Heat and Mass Transfer, 1973, v. 16, N 7, p. 1371–1384.
23. Петузов Б. С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М.: Энергия, 1967. 411 с.
24. Keil R. H., Baird M. H. I. Enhancement of heat transfer by flow pulsation. — Ind. and Eng. Chem. Process Des. and Develop., 1971, v. 10, № 4, p. 473–478.

Казань

Поступила в редакцию  
20.VI.1983