МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 1985

УДК 532.517.4

ПОЛУЭМПИРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ТУРБУЛЕНТНОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЧЕНИЙ С ОБЪЕМНЫМИ СИЛАМИ

ИЕВЛЕВ В. М., СОН Э. Е.

В работе получена замкнутая система уравнений для вторых моментов, определяющая турбулентный перенос в неоднородных течениях с объемными силами в приближении локальной «равновесности» турбулентности. Учет диффузии и конвективного переноса не представляет затруднений, так как полученные выражения для членов, содержащих пульсации объемных сил и обменных членов, сохраняются. Влияние внешних сил рассмотрено для двух случаев – турбулентного движения в стратифицированной среде и течения проводящей жидкости в продольном магнитном поле. В последнем случае внешние силы являются бездивергентными, поэтому они не влияют на пульсации давления. Рассматривается одномасштабная модель, в которой под масштабом в пограничном слое подразумевается поперечный масштаб.

Для расчета турбулентных неоднородных течений в пограничных слоях, каналах, трубах и струях широко применяется полуэмпирическая теория [1], основанная на гипотезе локального равновесия. В этой теории для получения одноточечных моментов пульсационных величин второго порядка используется уравнение баланса турбулентной энергии, в котором предполагается, что генерация и диссипация находятся в локальном равновесии. Уравнения для энергии пульсаций по различным осям содержат также обменные члены, выражающие обмен энергией между компонентами, в суммарный баланс турбулентной энергии они не входят. В неоднородных течениях и течениях с объемными силами турбулентность становится анизотропной, так как внешние силы или границы течения подавляют (или, наоборот, усиливают) пульсации по одной из осей, а обмен приводит к воздействию на другие составляющие.

Настоящая работа является развитием полуэмпирической теории турбулентности [2] для неоднородных течений, в которых объемные силы создают анизотропию турбулентных пульсаций.

Уравнения для пульсаций скорости в неоднородном потоке получаются вычитанием уравнений движения для мгновенных и осредненных скоростей [1]

$$\frac{\partial u_i'}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_k}(\langle u_k\rangle u_i'+u_k'\langle u_i\rangle+u_k'u_i'-\langle u_k'u_i'\rangle)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_k\,\partial x_k}+F_i' \tag{0.1}$$

Пульсационное движение предполагается несжимаемым. Уравнения для вторых моментов следуют из (0.1). Сохраняя в этих уравнениях в соответствии с гипотезой локального равновесия члены, описывающие генерацию, обмен и диссипацию турбулентности, получим

$$\langle u_k'u_j'\rangle\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_k}+\langle u_k'u_j'\rangle\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_k}=\frac{1}{\rho}\left\langle p'\left(\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)\right\rangle-$$
$$-2\nu\left\langle\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}\right\rangle+Q_{ij} \tag{0.2}$$

$$Q_{ij}=\langle F_i'u_j'\rangle+\langle F_j'u_i'\rangle \tag{0.3}$$

Тензор Q_{ij} определяет взаимодействие турбулентности с внешними силами. Для обменных членов в [2] были предложены выражения, основанные на результатах для однородной турбулентности, в работах [3, 4] они были уточнены. В данной работе используются общие свойства обменных членов [5, 6], получены выражения для них, а эмпирические постоянные определены из сравнения с экспериментами в пограничных слоях.

Для определения корреляций, содержащих пульсации давления, используем уравнение, полученное дифференцированием (0.1)

$$\frac{1}{\rho}\Delta p'=-2\frac{\partial\langle u_k\rangle}{\partial x_q}\frac{\partial u_q'}{\partial x_k}-\frac{\partial^2}{\partial x_k\,\partial x_q}(u_k'u_q'-\langle u_k'u_q'\rangle)-\frac{\partial F_k'}{\partial x_k} \tag{0.4}$$

Уравнение Пуассона (0.4) имеет решение

$$\frac{p'(\mathbf{x})}{\rho}=\int\frac{1}{2\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\frac{\partial\langle u_k\rangle}{\partial y_q}\frac{\partial u_q'}{\partial y_k}d^3y+$$
$$+\int\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\left[\frac{\partial^2(u_k'u_q'-\langle u_k'u_q'\rangle}{\partial y_k\,\partial y_q}+\frac{\partial F_k'}{\partial y_k}\right]d^3y \tag{0.5}$$

Осредненные параметры мало изменяются на длине корреляции поля скоростей, поэтому они могут быть вынесены из-под знака интеграла. Используя решение (0.5), для корреляции пульсаций давления и скорости получаем следующее общее выражение:

$$\frac{1}{\rho}\left\langle p'\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right\rangle=a_{ik}^{jq}\frac{\partial\langle u_k\rangle}{\partial x_q}+b_i^j+f_kc_{ik}^j$$

$$a_{ik}^{jq}=-\int\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial^2\langle u_j'(0)u_q'(\mathbf{r})\rangle}{\partial r_i\,\partial r_k}d^3r$$

$$b_i^j=-\int\frac{1}{4\pi r}\frac{\partial^3\langle u_j'(0)u_k'(\mathbf{r})u_q'(\mathbf{r})\rangle}{\partial r_i\,\partial r_k\,\partial r_q}d^3r$$

$$c_{ik}^j=-\int\frac{1}{4\pi r}\frac{\partial^2\langle u_j'(0)\theta'(\mathbf{r})\rangle}{\partial r_i\,\partial r_k}d^3r$$

В выражении (0.3) считаем, что пульсации объемной силы вызываются пульсациями скалярной величины $F_k'=f_k\theta'$.

Рассмотрим свойства тензоров a_{ik}^{iq}, b_i^j, c_{ik}^j. Вследствие инвариантности относительно порядка дифференцирования по координатам a_{ik}^{jq} и c_{ik}^j симметричны по нижним индексам ($a_{ik}^{jq}=a_{ki}^{jq}$, $c_{ik}^j=c_{ki}^j$). Из уравнения непрерывности следует равенство нулю сверток $a_{ik}^{jk}=0$, $b_i^i=0$, $c_{ik}^i=0$, кроме того, тензор a_{ik}^{jq} симметричен по верхним индексам ($a_{ik}^{jq}=a_{ik}^{qj}$). Найдем свертку коэффициентов a_{ik}^{jq} и c_{ik}^j по нижним индексам. Воспользуемся тождеством, которое является следствием уравнения Пауссона для функции $\varphi(\mathbf{r})$

$$\varphi(0)=-\int\frac{1}{4\pi r}\Delta\varphi(\mathbf{r})\,d^3r$$

Из этого равенства следуют свойства

$$a_{kk}^{jq}=2\langle u_j'u_q'\rangle,\quad c_{kk}^i=\langle u_i'\theta'\rangle$$

Коэффициенты a_{ik}^{jq} и c_{ik}^j определяются интегралами от моментов второго порядка, поэтому, учитывая их свойства, можно записать следующие общие выражения:

$$a_{ik}^{jq}=a_1\langle u_j'u_q'\rangle\delta_{ik}+a_2\langle u_i'u_k'\rangle\delta_{jq}+a_3(\langle u_i'u_j'\rangle\delta_{kq}+$$
$$+\langle u_k'u_q'\rangle\delta_{ij}+\langle u_k'u_j'\rangle\delta_{iq}+\langle u_i'u_q'\rangle\delta_{kj})+$$
$$+a_4\langle u_l'u_l'\rangle\delta_{ik}\delta_{jq}+a_5\langle u_l'u_l\rangle(\delta_{ij}\delta_{kq}+\delta_{kj}\delta_{iq})$$
$$c_{ik}^j=c_1\delta_{ik}\langle u_j'\theta'\rangle+c_2(\delta_{kj}\langle u_i'\theta'\rangle+\delta_{ij}\langle u_k'\theta'\rangle)$$

Из свойств тензора c_{ik}^{j} следует $c_1=0{,}4$; $c_2=-0{,}1$, а из свойств тензора a_{ik}^{jq}

$$a_1=0{,}8+2a,\ a_2=-0{,}3+5{,}5a,\ a_3=-0{,}1-1{,}5a,\ a_4=0{,}1-2{,}5a,\ a_5=a$$

Таким образом, 81 компонент тензора a_{ik}^{jq} выражается через моменты второго порядка и один эмпирический коэффициент. Член b_i^j, содержащий тройные корреляции скорости, также выразим через парные корреляции. С учетом свойств b_i^j получим

$$b_i^j=\frac{b}{\tau}(w^2\delta_{ij}-\langle u_i'u_j'\rangle),\qquad w^2=\frac{\langle u_l'u_l'\rangle}{3},\qquad \tau=\frac{l}{w}$$

где τ — характерное время турбулентных пульсаций, l — масштаб турбулентности.

Для вязкой диссипации примем следующее выражение:

$$\nu\left\langle\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}\right\rangle=\frac{kw^2}{\tau}\delta_{ij}+\frac{k_1}{\tau}(w^2\delta_{ij}-\langle u_i'u_j'\rangle)\tag{0.6}$$

Второй член в правой части может быть объединен с обменным членом b_i^j, поэтому далее будем считать, что $k_1=0$, а постоянная b содержит как обменную, так и диссипативную части, которые не различаются в полуэмпирической теории.

Таким образом, в уравнении локального баланса (0.2) в отсутствие объемных сил ($Q_{ij}=0$) все члены уравнения определены с точностью до трех постоянных a, b и k, которые можно найти, используя опытные данные.

1. Турбулентный пограничный слой без объемных сил. Рассмотрим плоскопараллельный пограничный слой со средней скоростью $\langle u\rangle=u(y)$, направленной по оси $x_1=x$. Обозначим $x_2=y$, $u_i'=(u',v',w')$. Турбулентное напряжение трения определяется моментом $\langle u'v'\rangle$. Для его нахождения получим систему уравнений для вторых моментов, подставляя выражения a_{ik}^{jq}, b_i^j, c_{ik}^j и вязкой диссипации (0.6) в уравнения (0.2) для пар индексов $ij=11$, 22, 33, 12

$$a_{11}^{12}-\langle u'v'\rangle\frac{du}{dy}+b_1^1-\frac{kw^2}{\tau}=0,\qquad a_{21}^{22}\frac{du}{dy}+b_2^2-\frac{kw^2}{\tau}=0$$

$$a_{31}^{32}\frac{du}{dy}+b_3^3-\frac{kw^2}{\tau}=0,\qquad (a_{11}^{21}+a_{11}^{12})\frac{du}{dy}+b_1^2+b_2^1=0$$

Вычисляя значения коэффициентов и подставляя в эти уравнения, получим замкнутую систему уравнений, определяющую моменты второго порядка

$$(a+0{,}4)\langle u'v'\rangle\frac{du}{dy}-\frac{b}{\tau}(w^2-\langle u'^2\rangle)+\frac{kw^2}{\tau}=0\tag{1.1}$$

$$(0{,}5-2{,}5a)\langle u'v'\rangle\frac{du}{dy}-\frac{b}{\tau}(w^2-\langle v'^2\rangle)+\frac{kw^2}{\tau}=0\tag{1.2}$$

$$(0{,}1+1{,}5a)\langle u'v'\rangle\frac{du}{dy}-\frac{b}{\tau}(w^2-\langle w'^2\rangle)+\frac{kw^2}{\tau}=0\tag{1.3}$$

$$[(4a-0{,}4)\langle u'^2\rangle+(0{,}5a-0{,}3)\langle v'^2\rangle+3(0{,}1-1{,}5a)w^2]\frac{du}{\partial y}-\frac{2b}{\tau}\langle u'v'\rangle=0\tag{1.4}$$

Распределение пульсационной энергии по различным осям определяется коэффициентами $\mu_p=\langle u_p'^2\rangle/w^2$. Для изотропной турбулентности $\mu_p=1$, а в рассматриваемом неоднородном случае их отличие от изотропных значений $\delta\mu_p = \mu_p - 1$ можно получить из уравнений (1.1)–(1.3)

$$\delta\mu_1 = \frac{k}{b}(0{,}2+3a); \quad \delta\mu_2 = \frac{k}{b}(0{,}5-7{,}5a); \quad \delta\mu_3 = \frac{k}{b}(4{,}5a-0{,}7) \tag{1.5}$$

Коэффициент a можно определить из экспериментальных данных по анизотропии пульсаций $\alpha = -\delta\mu_1/\delta\mu_2$ в пограничном слое.

Определим коэффициент корреляции $R = -\langle u'v'\rangle/w^2$. Суммируя уравнения (1.1)–(1.3), получим

$$R\tau\frac{du}{dy} = 3k \tag{1.6}$$

Из уравнения (1.4) следует

$$R^2 = \frac{1{,}5k}{b}[0{,}4+(0{,}4-4a)\delta\mu_1+(0{,}3-0{,}5a)\delta\mu_2] \tag{1.7}$$

Будем считать, что поперечный масштаб турбулентности l определен таким образом, что

$$-\langle u'v'\rangle = l^2\left(\frac{du}{dy}\right)^2$$

Учитывая определение времени турбулентных пульсаций τ, находим связь коэффициента корреляции с распределением скоростей $R = (\tau du/dy)^2$. Используя (1.6), находим соотношение $k = R^{3/2}/3$, подставляя которое в (1.7) и учитывая (1.5), получаем уравнение для коэффициента b, считая известными из опыта значение коэффициента корреляции и степень анизотропии

$$6R^{1/2}b^2 - 1{,}2b + R^{3/2}\varphi(a) = 0 \tag{1.8}$$

$$\varphi(a) = 8{,}25\,a^2 + 2{,}1a - 0{,}23$$

Из ограниченности коэффициента b и уравнения (1.8) следует

$$b = \frac{1}{10R^{1/2}}\left[1 - \sqrt{1-\left(\frac{R}{R^*}\right)^2}\right], \quad R^* = \left(\frac{0{,}06}{\varphi(a)}\right)^{1/2} \tag{1.9}$$

Для определения a и b используем экспериментальные данные Клебанова для пограничного слоя на плоской пластине и Лауфера – для трубы, приведенные в [7]: $\delta\mu_1 = 0{,}77$; $\delta\mu_2 = -0{,}73$; $\delta\mu_3 = -0{,}04$; $R = 0{,}33$. Система уравнений для коэффициентов a и b оказывается переопределенной, поэтому значения a и b определяются однозначно, если экспериментальные результаты непротиворечивы, а развитая полуэмпирическая теория самосогласована.

По анизотропии пульсационной энергии определяется значение $a = 0{,}15$, из (1.9) следует $b = 0{,}051$; $k = 0{,}064$. Экспериментальные и теоретические значения коэффициентов корреляции при этом различаются не более чем на 7%.

Полученный результат можно выразить другим способом: переопределенность системы уравнений относительно коэффициентов a и b означает, что по экспериментальным значениям коэффициентов распределения пульсационной энергии по различным осям можно вычислить напряжение Рейнольдса, отличающееся от экспериментального значения менее чем на 10%, что вполне удовлетворительно, учитывая приближенность баланса диссипации и генерации в пограничном слое.

2. Уравнения турбулентного переноса в стратифицированной среде. В задачах турбулентного движения в стратифицированной среде пульсации объемной силы вызываются пульсациями плотности, которые определяются пульсациями температуры или концентрации примеси при температурной или концентрационной стратификации [8]. Далее предположим, что пульсации скалярной величины, определяющие пульсации объемной силы, удовлетворяют уравнению диссипативного типа

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+u_k\frac{\partial\theta}{\partial x_k}=\chi\frac{\partial^2\theta}{\partial x_k\,\partial x_k} \qquad (2.1)$$

Замкнутая система уравнений для вторых моментов в приближении локального равновесия содержит уравнение (0.3), где

$$f_i=g_i,\ Q_{ij}=g_i\langle u_j'\theta'\rangle+g_j\langle u_i'\theta'\rangle$$

и уравнения для моментов $\langle u_i'\theta'\rangle$, $\langle\theta'^2\rangle$, которые определяются уравнениями (0.1) и (2.1)

$$\langle u_i'u_k'\rangle\frac{\partial\langle\theta\rangle}{\partial x_k}+\langle\theta'u_k'\rangle\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_k}-\frac{1}{\rho}\left\langle p\frac{\partial\theta'}{\partial x_i}\right\rangle-$$

$$-(\chi+\nu)\left\langle\frac{\partial\theta'}{\partial x_k}\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\right\rangle-g_i\langle\theta'^2\rangle=0 \qquad (2.2)$$

$$\langle u_k'\theta'\rangle\frac{\partial\langle\theta\rangle}{\partial x_k}+\chi\left\langle\frac{\partial\theta'}{\partial x_k}\frac{\partial\theta'}{\partial x_k}\right\rangle=0 \qquad (2.3)$$

Обменные члены, содержащие пульсации давления, определяются решением уравнения Пуассона (0.4) и могут быть записаны в следующем виде:

$$\frac{1}{\rho}\left\langle p'\frac{\partial\theta'}{\partial x_i}\right\rangle=\frac{1}{2}c_{ik}{}^{q}\frac{\partial\langle u_k\rangle}{\partial x_q}+e_i+g_kh_{ik}$$

$$e_i=-\int\frac{1}{4\pi r}\frac{\partial^3\langle\theta'(0)u_k'(\mathbf{r})u_q'(\mathbf{r})\rangle}{\partial r_i\,\partial r_k\,\partial r_q}d^3r$$

$$h_{ik}=-\int\frac{1}{4\pi r}\frac{\partial^2\langle\theta'(0)\theta'(r)\rangle}{\partial r_i\,\partial r_k}d^3r$$

Тензор h_{ik} симметричен ($h_{ik}=h_{ki}$), а его свертка $h_{kk}=\langle\theta'^2\rangle$. Как и при получении выражений для $a_{ik}{}^{jq}$, b_{ij}, $c_{ik}{}^{j}$, будем считать, что тензоры h_{ik}, e_i имеют следующий общий вид:

$$e_i=-\frac{e^{(1)}}{\tau}\langle u_i'\theta'\rangle,\qquad h_{ik}=h\langle\theta'^2\rangle\delta_{ik}$$

Из свойств тензора h_{ik} следует $h=1/3$.

Для диссипативных членов примем выражения, аналогичные (0.6)

$$(\chi+\nu)\left\langle\frac{\partial\theta'}{\partial x_k}\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\right\rangle=-\frac{e^{(2)}}{\tau}\langle\theta'u_i'\rangle \qquad (2.4)$$

$$\chi\left\langle\frac{\partial\theta'}{\partial x_k}\frac{\partial\theta'}{\partial x_k}\right\rangle=\frac{d}{\tau}\langle\theta'^2\rangle. \qquad (2.5)$$

В уравнении (2.2) члены, содержащие $e^{(1)}$ и $e^{(2)}$, можно объединить, полагая $e=e^{(1)}-e^{(2)}$.

Замкнутая система уравнений для вторых моментов в турбулентной стратифицированной среде в поле тяжести $g_i=(0,\ -g,\ 0)$ в приближении пограничного слоя содержит уравнения (1.1)–(1.4), где в левую часть (1.2) следует добавить член $g\langle v'\theta'\rangle$, а в левую часть (1.4) – член $g\langle u'\theta'\rangle$, и уравнения, которые следуют из (2.3) и (2.4)

$$0{,}8\langle v'\theta'\rangle\frac{du}{dy}+\langle u'v'\rangle\frac{d\theta}{dy}+\frac{e}{\tau}\langle u'\theta'\rangle=0$$

$$0{,}05\langle v'\theta'\rangle\frac{du}{dy}+\langle v'^2\rangle\frac{d\theta}{dy}+\frac{e}{\tau}\langle v'\theta'\rangle+\frac{4}{3}g\langle\theta'^2\rangle=0$$

$$\langle v'\theta'\rangle\tau\frac{d\theta}{dy}+d\langle\theta'^2\rangle=0$$

В этих уравнениях содержатся еще две эмпирические постоянные: e и d. Выражение для e_i совпадает с аппроксимацией А. С. Монина [9], в соответствии с экспериментальными результатами следует принять $e=3{,}2$.

При получении системы уравнений, определяющей турбулентный перенос в стратифицированной среде, предполагалось, что масштабы пульсаций скорости и скалярной примеси одинаковы. В общем случае различие между ними можно учесть, вводя отношения масштабов l/l_θ в уравнения (2.4) и (2.5), это отношение может изменяться в пределах $0{,}5<l/l_\theta<1$ [10].

3. Турбулентный пограничный слой в продольном магнитном поле. Рассмотрим турбулентный пограничный слой в проводящей жидкости, движущейся в продольном магнитном поле, при малых магнитных числах Рейнольдса $\mathrm{Re}_m=vl/\nu_m\ll 1$ ($\nu_m=c^2/4\pi\sigma$, c — скорость света, σ — электропроводность среды). Продольное магнитное поле непосредственно воздействует только на пульсации скорости, перпендикулярные магнитному полю [1], поэтому структура анизотропной турбулентности определяется воздействием магнитного поля на поперечные пульсации и обменом пульсационной энергией по различным направлениям. При малых магнитных числах Рейнольдса магнитное поле, индуцированное при движении среды, определяется уравнением магнитной индукции в безиндукционном приближении. Система уравнений магнитной гидродинамики в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_0}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k\,\partial x_k}+A_k\frac{\partial a_i}{\partial x_k} \tag{3.1}$$

$$\nu_m\frac{\partial^2 a_i}{\partial x_k\,\partial x_k}+A_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}=0 \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k}=0,\qquad \frac{\partial a_k}{\partial x_k}=0$$

$$A_k=\frac{H_k}{\sqrt{4\pi\rho}},\qquad a_k=\frac{h_k}{\sqrt{4\pi\rho}},\qquad p_0=p+\frac{H_kh_k}{4\pi}$$

Здесь H_k, h_k — внешнее и индуцированное магнитные поля.

Уравнения для вторых моментов в приближении локального равновесия имеют вид

$$\langle u_j'u_k'\rangle\frac{\partial u_i}{\partial x_k}-\frac{1}{\rho}\left\langle p'\left(\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)\right\rangle+$$

$$+A_k\left(\left\langle a_i'\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}\right\rangle+\left\langle a_j'\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\right\rangle\right)+2\nu\left\langle\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}\right\rangle=0 \tag{3.3}$$

Уравнение магнитной индукции (3.2) имеет общее решение

$$a_i'(\mathbf{x})=\frac{A_k}{4\pi\nu_m}\int\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\frac{\partial u_i'}{\partial y_k}d^3y \tag{3.4}$$

В (3.3) входят корреляции, которые определяются решением (3.4) и могут быть выражены через тензоры a_{kl}^{ij}

$$A_l\left\langle a_i'\frac{\partial u_j'}{\partial x_l}\right\rangle=-\frac{A_kA_l}{\nu_m}\int\frac{1}{4\pi r}\frac{\partial^2\langle u_j'(0)u_i'(r)\rangle}{\partial r_k\,\partial r_l}d^3r=\frac{A_kA_l}{2\nu_m}a_{kl}^{ii}$$

Таким образом, уравнения турбулентного пограничного слоя в продольном магнитном поле не содержат дополнительных эмпирических постоянных, так как корреляции, содержащие пульсации магнитного поля, выражаются через пульсации скорости, а пульсации давления p_0' связаны с пульсациями скорости уравнением (0.5), как и в отсутствие магнитного поля.

Система уравнений для определения вторых моментов следует из (3.3) для пар индексов ij=11, 22, 33, 12

$$(a+0{,}4)\langle u'v'\rangle\tau\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}+(k-b)\,w^2+b\langle u'^2\rangle+$$

$$+\frac{A^2\tau}{2\nu_m}[\,(0{,}1+1{,}5a)\langle u'^2\rangle+3(0{,}1-0{,}5a)\,w^2]=0$$

$$(0{,}5-2{,}5a)\langle u'v'\rangle\tau\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}+(k-b)\,w^2+b\langle v'^2\rangle+$$

$$+\frac{A^2\tau}{\nu_m}[\,(5{,}5a-0{,}3)\langle u'^2\rangle+(0{,}8+2a)\langle u'^2\rangle+3(0{,}1-2{,}5a)\,w^2]=0$$

$$(0{,}1+1{,}5a)\langle u'v'\rangle\tau\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}+(k-b)\,w^2+b\langle w'^2\rangle+$$

$$+\frac{A^2\tau}{2\nu_m}[\,(5{,}5a-0{,}3)\langle u'^2\rangle+(0{,}8+2a)\langle w'^2\rangle+3(0{,}1-2{,}5a)\,w^2]=0$$

$$[\,(0{,}4-4a)\langle u'^2\rangle+(0{,}3-0{,}5a)\langle v'^2\rangle+3(1{,}5a-0{,}1)\,w^2]\,\tau\frac{du}{dy}+$$

$$+2b\langle u'v'\rangle+\frac{A^2\tau}{2\nu_m}(1{,}2-2a)\langle u'v'\rangle=0$$

Подставляя значения постоянных a, b и k, полученные из обработки экспериментальных данных по пограничному слою без внешних сил, получим систему уравнений для μ_1, μ_2, R и $q=w/(l\mathrm{d}u/\mathrm{d}y)$

$$\begin{gathered}
q(\mu_1+0{,}255)-10{,}8R+S(3{,}19\mu_1+0{,}735)=0\\
q(\mu_2+0{,}255)-2{,}45R+S(5{,}15\mu_1+10{,}8\mu_2-8{,}09)=0\\
R=0{,}192q+S(0{,}137\mu_1+0{,}862)\\
R(q+4{,}41S)=3{,}68-1{,}96\mu_1+2{,}21\mu_2
\end{gathered}\qquad(3.5)$$

$$S=\frac{H^2}{4\pi\rho\nu_m\,du/dy}$$

Здесь S — локальное число Стюарта, определяющее воздействие магнитного поля на турбулентное движение. Турбулентная вязкость в магнитном поле определяется выражением

$$\nu_T=\psi(S)\,l^2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y},\qquad \psi(S)=Rq^2$$

где функция $\psi(S)$ получается в результате решения системы уравнений (3.5). Для сравнения с экспериментальными результатами по коэффициентам сопротивления турбулентного течения в трубе необходимо после вычисления функции $\psi(S)$ решить дифференциальное уравнение для нахождения распределения скоростей по сечению трубы (число Стюарта определяется локальными параметрами, поэтому $S=S(du/dy)$) и найти коэффициент сопротивления трубы.

Полученные уравнения могут применяться для турбулентных течений с не слишком большой анизотропией, так как при значительном подавлении пульсаций в одном направлении могут нарушиться «условия реализуемости» [6], связанные с невыполнением неравенства Шварца для пульсационных величин. Для решения задач с сильной анизотропией необходимо учитывать отличие продольного и поперечного масштабов турбулентности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Иевлев В. М.* Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред. М.: Наука, 1975. 256 с.
2. *Rotta J. C.* Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz.— Z. Physik, 1951, B. 129, № 5, S. 547–572; B. 131, № 1, S. 51–77.
3. *Launder B. E., Reece G. J., Redi W.* Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure.— J. Fluid Mech., 1975, v. 68, № 3, p. 537–566.
4. *Павельев А. А.* Развитие решеточной турбулентности в потоке с постоянным градиентом скорости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 1, с. 38–47.
5. *Иевлев В. М., Сон Э. Е.* Турбулентность газов, жидкостей и плазмы. М.: МФТИ, 1982. 139 с.
6. *Ламли Дж.* Модели второго порядка для турбулентных течений.— В кн.: Методы расчета турбулентных течений. М.: Мир, 1984, с. 7–34.
7. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Наука, 1965. 639 с.
8. *Онуфриев А. Т.* Модели феноменологических теорий турбулентности.— В сб.: Аэрогазодинамика и физическая кинетика. Новосибирск: Наука, 1977, с. 43–65.
9. *Монин А. С.* О свойствах турбулентности в приземном слое воздуха.— Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1965, т. 1, № 1, с. 45–54.
10. *Роди В.* Модели турбулентности окружающей среды.— В кн.: Методы расчета турбулентных течений. М.: Мир, 1984, с. 227–322.

Москва

Поступила в редакцию
9.IV.1984