

УДК 532.517.4

## ВАРИАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОГО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ПОТОКА

ГОЛЬДШТИК М. А.

Анализируется модель эффективно вязких турбулентных течений, удовлетворяющих уравнениям Навье — Стокса и некоторым условиям скольжения на твердых стенках. Турбулентная вязкость определяется на основе принципа минимума скорости диссипации энергии, смысл и условия применимости которого подробно обсуждаются. Намечена новая модель турбулентных отрывных течений. Решена задача о турбулентном потоке в пористой вращающейся трубе. Предсказано существование двух метастабильных режимов течения: одного с приосевой циркуляционной зоной, а другого — прямооточного. В случае сильной закрутки потока первый из них имеет преимущественную вероятность реализации, однако при ослаблении вращения в некоторой критической ситуации циркуляционная зона схлопывается, после чего течение может быть только прямооточным. Несмотря на отсутствие эмпирических включений, предлагаемая теория во всех аспектах хорошо согласуется с экспериментальными исследованиями течений в вихревых камерах.

Вращающиеся турбулентные потоки, имеющие все возрастающее техническое значение, характеризуются сложной внутренней структурой. Для примера на фиг. 1 показана схема осредненного течения воздуха в вихревой камере, сообщающейся с атмосферой. Камера имеет глухой торец  $z=0$ , а подвод воздуха осуществляется по всей боковой поверхности длины  $L$  через тангенциальные щели. Воздух истекает в атмосферу через диафрагму радиуса  $a$ . Как показывают наблюдения [1], в области  $r > a$  поток близок к одномерному вихревому стоку, во внутренней области  $r < a$  течение значительно сложнее.

В случае истечения капальной жидкости в приосевой зоне возникает кавитационная воронка радиуса  $\xi$ , определение которого является основной задачей теории центробежной форсунки, сформулированной в одномерной приближенной постановке в [2]. В рамках схемы потенциального движения идеальной жидкости решена [1] и осесимметричная задача, не требующая привлечения дополнительных гипотез.

При затопленном истечении в случае достаточно интенсивного вращения на месте воронки размещается циркуляционная зона. Течение в этой зоне оказывается сильно турбулизированным из-за наличия в профиле осевой скорости точек перегиба, генетически связанных с тангенциальным разрывом, который имел бы место в идеальной жидкости. Развитие такого рода неустойчивости обычно порождает свободную турбулентность, как, например, в струях, следах, слоях смещения, которые допускают неплохое описание с помощью модели турбулентной вязкости  $\nu_T$ , определяемой эмпирически [3].

**1. Модели эффективно вязких турбулентных течений.** Модель турбулентной вязкости, предложенная более ста лет назад Ж. Буассинеском, является простейшей и на фоне современных полуэмпирических теорий турбулентного переноса кажется примитивной. Тем не менее известно [1, 3, 4], что для теоретического описания некоторых свободно турбулентных течений модель постоянной турбулентной вязкости, являющейся эмпирическим параметром, работает очень хорошо. Известны также [5, 6] успешные применения этой модели к турбулентным отрывным течениям, в которых, несмотря на наличие стенок, турбулентность в основном носит характер свободной, так как порождается вихревыми слоями, сходящими в свободное пространство из точек отрыва. Применительно к вращающимся потокам положительный вывод о применимости модели постоянной турбулентной вязкости получен

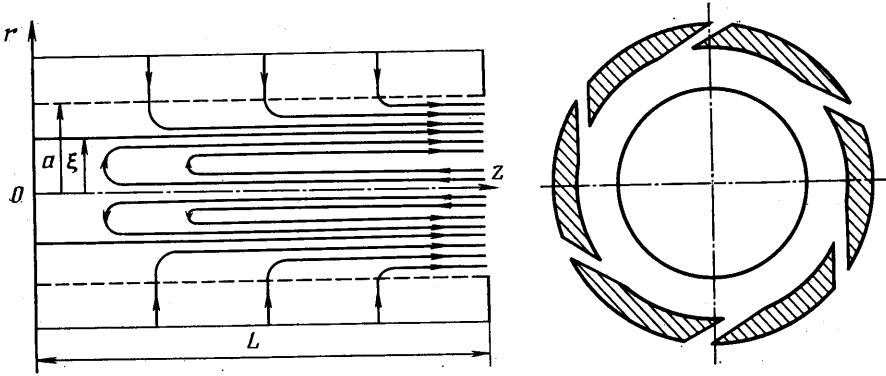
в [7] на основе анализа экспериментальных данных. Модель турбулентной вязкости обычно вводится для аппроксимации в уравнениях Рейнольдса

$$U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta U_i - \frac{\partial \langle v_i v_j \rangle}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0$$

рейнольдсовых напряжений с помощью выражения

$$-\langle v_i v_j \rangle + \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle \delta_{ij} = \nu_T \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.1)$$

Здесь  $v_i$  — пульсационные, а  $U_i$  — средние компоненты вектора скорости, угловыми скобками обозначено осреднение по времени. Второе слагаемое слева в тензорном равенстве (1.1) введено, чтобы уравнять первые инварианты (следы). В случае двумерной турбулентности коэффициент  $1/3$



Фиг. 1

должен быть заменен на  $1/2$ . Равенство (1.1) подробно проанализировано в [4], где указано, что строго непротиворечивым оно может быть лишь при условии, что  $\nu_T$  — тензор четвертого ранга. Отметим главный формальный недостаток равенства (1.1): его двукратное дифференцирование по  $x_j$  и  $x_i$  ведет к противоречию. Этот недостаток может быть преодолен, если принять другую модель турбулентной вязкости, взяв за основу уравнения Рейнольдса для средней завихренности

$$U_j \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_j} - \Omega_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \nu \Delta \Omega_i - \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle v_j \omega_i \rangle - \langle v_i \omega_j \rangle); \quad \omega = \text{rot } v \quad (1.2)$$

Поток вихря, связанный с турбулентным переносом, моделируется антисимметричным выражением

$$\langle v_j \omega_i \rangle - \langle v_i \omega_j \rangle = -\nu_T \left( \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \Omega_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.3)$$

Отметим, что соотношением (1.1) постулируются шесть равенств, тогда как соотношением (1.3) — только три, а в плоском случае — лишь два

$$\langle v_j \omega \rangle = -\nu_T \frac{\partial \Omega}{\partial x_j} \quad (1.4)$$

Таким образом, хотя соотношения (1.1) и (1.3) приводят к эквивалентным уравнениям (Навье — Стокса и Гельмгольца), они имеют разное физическое содержание.

Модель эффективно вязких турбулентных течений представляет предельную ситуацию, когда молекулярная вязкость  $\nu$  может быть отброше-

на. Движение удовлетворяет уравнениям Навье — Стокса

$$U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \nu_T \frac{\partial U_i}{\partial x_j}; \quad \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.5)$$

а на твердых стенках вместо условия прилипания, связанного с действием молекулярной вязкости, ставится другое условие.

Казалось бы, это условие можно получить из соотношений (1.1) или (1.3). Но последние неприменимы вплоть до стенки. Поэтому условие следует сформулировать на внешней границе турбулентного пограничного слоя. Если в пограничном слое принять логарифмическое распределение скоростей

$$u_x = (v_*/\kappa) \ln y + C \quad (1.6)$$

где  $u_x$  — продольная скорость,  $y$  — расстояние от стенки,  $v_*$  — динамическая скорость,  $\kappa$  и  $C$  — константы, и допустить на внешней границе слоя при  $y = \delta$  гладкое сопряжение с внешним потоком, так что  $u_x = U$ ,  $u_x' = U'$ ,  $u_x'' = U''$ , то из (1.6) для плоского течения легко выводится равенство

$$\partial \Omega / \partial n = -\Omega / \delta \quad (\Omega = -U') \quad (1.7)$$

В силу малости  $\delta$  условие (1.7) может быть заменено на условие скольжения  $\Omega = 0$  (непосредственно следующее из (1.1), если его применить для стенки). Однако если на границе имеются точечные источники завихренности, то член  $\partial \Omega / \partial n$  становится главным и (1.7) сводится к условию (в непосредственной окрестности источника) «адиабатичности» стенки  $\partial \Omega / \partial n = 0$  (вытекающему из (1.4)). Источники завихренности на стенке должны фигурировать в модели осредненных отрывных течений, иначе движение будет потенциальным! Речь идет, разумеется, не о вязких источниках, которые всегда есть, но слабы, а об источниках завихренности в точках отрыва, интенсивность которых должна быть определена из условия самосогласования задачи: разветвление потока в каждой точке отрыва.

В рассматриваемом случае турбулентного вращающегося потока отрыв является внутренним и поэтому на стенке ставится условие скольжения.

**2. Вариационный принцип.** Для описания осредненных характеристик турбулентных течений обычно составляются модельные уравнения, включающие эмпирические постоянные [8, 9]. В то же время весьма плодотворен метод получения уравнений на основе вариационных принципов [10, 11]. Последние могут иметь то преимущество, что по идее способны дать не только сами уравнения, но и упомянутые выше постоянные путем их последующего варьирования до достижения минимизируемым функционалом наименьшего возможного значения.

Проблема заключается в выборе функционала. В точной постановке эта проблема чрезвычайно трудна и пока не решена.

К сожалению, не существует такого голономного функционала, варьирование которого давало бы уравнение Навье — Стокса [11]. По смыслу дела искомый вариационный принцип должен вытекать из общей термодинамики необратимых процессов. Но эта наука сейчас находится лишь в стадии становления. Однако к этому вопросу для специального частного случая эффективно вязкой модели турбулентности можно попытаться подойти приближенно. Точный вариационный принцип должен был бы дать уравнения и для осредненного движения, и для определения турбулентной вязкости, которая является функционалом от этого движения и, вообще говоря, от внутренних переменных турбулентного потока, таких, как, например, кинетическая энергия турбулентности. Согласно п. 1, будем считать, что для эффективно вязких турбулентных течений справедливы уравнения движения (1.5). Остается найти турбулентную вязкость. Для слабо неравновесных процессов известен [12] принцип минимума производства энтропии. В условиях изотермической свободной турбулентности при моделировании турбулентных напряжений эффективно вязкими производст-

во энтропии приближенно сводится к скорости диссипации энергии

$$D = \int_v \nu_T \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) dV \quad (2.1)$$

Поскольку величина  $D$  функционально выражается через  $\nu_T$  и тензор осредненных скоростей деформаций, в такой приближенной постановке внутренние степени свободы можно не учитывать, а искать сразу среднее движение, подобно тому как для несжимаемой жидкости динамическая задача может изучаться независимо от тепловой. Остается, однако, неясным вопрос, насколько развитое турбулентное течение может считаться слабо неравновесным процессом. Поэтому следует непосредственно посмотреть, к чему приводит минимизация функционала (2.1). Как известно, при фиксированном  $\nu_T$  минимизация (2.1) путем варьирования  $U_i$  в классе соленоидальных векторных полей приводит к уравнению Стокса, которое соответствует первому уравнению (1.5) с нулевой левой частью. Уравнения Стокса не так уж плохи для описания осредненной турбулентности, во-первых, потому, что турбулентная вязкость обычно довольно велика, во-вторых, при отсутствии условий прилипания уравнения Стокса удовлетворяет даже потенциальное движение идеальной жидкости. Вместе с тем нельзя утверждать, что в турбулентных течениях конвекция завихренности не играет роли. Поэтому функционал (2.1) надо рассматривать как приближенный и использовать не для получения уравнений, в качестве которых следует принять полные уравнения Навье — Стокса, а лишь для определения  $\nu_T$  путем вторичной минимизации функционала.

Полная реализация поставленной задачи на минимум заключается в минимизации по  $\nu_T$  функционала (2.1) при использовании (1.5) в качестве добавочных функциональных условий. Однако для случая  $\nu_T = \text{const}$  проще ограничиться прямой минимизацией (2.1), используя в качестве  $U_i$  решения системы (1.5).

Рассмотрим вопрос, для каких течений следует ожидать существования минимума  $D(\nu_T)$ . Поскольку  $D > 0$ , минимум заведомо будет существовать, если  $D \rightarrow \infty$  при  $\nu_T \rightarrow \infty$  и  $\nu_T \rightarrow 0$ . Конечно, это требование может оказаться слишком жестким, но начать анализ естественно с него.

Для выполнения условия  $D(\infty) = \infty$  достаточно задать какую-либо кинематическую характеристику потока, например скорость, обеспечивающую поддержание деформационного ползущего движения при  $\nu_T \rightarrow \infty$ . Требование  $D(0) = \infty$  может быть выполнено, если только предельное движение при  $\nu_T \rightarrow 0$  будет разрывным. Но этого еще недостаточно. Рассмотрим, например, плоский пограничный слой, для которого

$$D_\delta = \int_0^L dx \int_0^\delta \nu \left( \frac{dU_x}{dy} \right)^2 dy \sim \nu \frac{U^2}{\delta_L} L \quad (2.2)$$

Поскольку  $\delta \sim x / \sqrt{Ux/\nu}$ , то при фиксированных  $U$  и  $L$   $D_\delta \sim \sqrt{\nu}$  и, следовательно,  $D_\delta \rightarrow 0$  при  $\nu \rightarrow 0$ , несмотря на возникновение разрыва скорости на стенке. Поскольку пограничный слой асимптотически не дает вклада в диссипацию энергии, этот результат показывает, что функционал (2.1) неприменим для описания пристенной турбулентности.

Иначе обстоит дело в случае отрывных течений, например при обтекании ступеньки высотой  $h$ . Пусть в качестве виртуального при  $\nu = 0$  рассматривается разрывное течение Гельмгольца — Кирхгофа с бесконечной застойной зоной. При  $\nu \rightarrow 0$  диссипация будет сосредоточена в тонком пограничном слое вблизи линии разрыва, и соотношение (2.2) сохранит силу, если под  $L$  понимать длину зоны отрыва. Оценку для  $L$  можно получить, положив  $\delta = h$  при  $x = L$ . Это дает  $L \sim \nu^{-1}$ , так что, согласно (2.2),  $D_\delta \sim \delta_L^{-1}$ . Для величины  $\delta_L$  получается оценка  $\delta_L \rightarrow \text{const}$  при  $\nu \rightarrow 0$  и тогда  $D_\delta \rightarrow \text{const}$ . Ясно, что эта оценка весьма груба. Если все же допустить, что  $\delta_L \rightarrow 0$  при

$\nu \rightarrow 0$ , то  $D_0 \rightarrow \infty$  при  $\nu \rightarrow 0$ . В этом случае в данной модели отрывных течений найдется вязкость  $\nu = \nu_T$ , при которой диссипация энергии будет минимальной. Интенсивность точечных источников завихренности должна быть выбрана из условия конечности скорости в точках отрыва. Очевидно, что такой выбор обеспечит минимум  $D$  и по интенсивности источников. Реализация данной модели требует назначения величины  $\delta$ , входящей в условие (1.7). Но этот вопрос нуждается в самостоятельном изучении.

Отметим, что в [1] принцип минимума диссипации энергии был использован для вычисления турбулентного числа Рейнольдса круглой струи. Однако для подобных течений с особыми точками результат зависит от способа регуляризации функционала  $D$ , поэтому предпочтительнее рассматривать исходные неавтономные отрывные течения.

В случае вращающегося потока  $D \rightarrow \infty$  при  $\nu_T \rightarrow 0$  из-за разрыва тангенциальной скорости  $U_\varphi$  на оси вращения  $z$ , что предопределяет существование минимума  $D$ .

**3. Течение в пористой вращающейся трубе.** Если движение в цилиндрической области радиуса  $a$  (пунктир на фиг. 1) схематизировать как течение во вращающейся трубе с глухим торцом при  $z=0$  и проницаемой боковой поверхностью, сквозь которую осуществляется равномерный вдув с радиальной скоростью  $|U_{ra}|$ , то при  $\nu_T = \text{const}$  уравнения Навье – Стокса (1.5) допускают автомодельное решение вида

$$U_r = U_r(r), \quad U_\varphi = U_\varphi(r), \quad U_z = zW(r) \quad (3.1)$$

Подстановка соотношений (3.1) в систему (1.5) дает уравнения

$$U_r \frac{dU_r}{dr} - \frac{U^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu_T \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{drU_r}{dr} \quad (3.2)$$

$$\frac{U_r}{r} \frac{drU_\varphi}{dr} = \nu_T \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{drU_\varphi}{dr} \quad (3.3)$$

$$U_r \frac{dW}{dr} + W^2 = -\frac{1}{\rho z} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\nu_T}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dW}{dr} \quad (3.4)$$

$$\frac{drU_r}{dr} + rW = 0 \quad (3.5)$$

Поставим следующие граничные условия:

$$U_r(a) = U_{ra}, \quad U_\varphi(a) = U_{\varphi a}, \quad U_r(0) = U_\varphi(0) = \left. \frac{dW}{dr} \right|_{r=a} = 0 \quad (3.6)$$

Последнее соотношение представляет условие скольжения, связанное с требованием отсутствия осевого касательного напряжения  $\tau_{rz}$  на цилиндрической стенке

$$\tau_{rz} = \rho \nu_T \left( \frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{\partial U_r}{\partial z} \right) = \rho \nu_T z \frac{dW}{dr}$$

Согласно этому выражению, условие скольжения на торце  $z=0$  выполняется автоматически. Из уравнений (3.2)–(3.5) следует, что  $\partial p / \partial r = -\rho F(r)$  и  $\partial p / \partial z = \rho z f(r)$ . Отсюда находим, что необходимо положить

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -4\alpha^2 z \quad (3.7)$$

где  $\alpha$  – произвольная постоянная. Подставив (3.7) в (3.4), получим

$$U_r \frac{dW}{dr} + W^2 = 4\alpha^2 + \frac{\nu_T}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dW}{dr} \quad (3.8)$$

Уравнения (3.5) и (3.8) образуют замкнутую систему, которая может быть решена независимо от уравнений (3.2) и (3.3). Последние будут служить для определения функций  $p$  и  $U_*$  после нахождения  $U_r$ .

Положим

$$U_r = -v_T u / r \quad (3.9)$$

и введем новую переменную

$$x = 1/2 \alpha r^2 / v_T \quad (3.10)$$

Тогда уравнение (3.5) примет вид

$$W = \alpha dU/dx \quad (3.11)$$

После несложных преобразований соотношения (3.8) с учетом (3.11) получим одно уравнение третьего порядка, не содержащее параметров

$$2(xu'')' = u'^2 - uu'' - 4 \quad (3.12)$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по  $x$ . Уравнение (3.3) после введения функции

$$\Gamma = rU_\varphi / (aU_{\varphi a}) \quad (3.13)$$

приводится к виду

$$2x\Gamma'' + u\Gamma' = 0 \quad (3.14)$$

В новых обозначениях получим граничные условия, которые являются следствием (3.6)

$$u(x_m) = R_T, \quad \Gamma(x_m) = 1, \quad u(0) = \Gamma(0) = u''(x_m) = 0 \quad (3.15)$$

где  $R_T = a|U_{ra}|/v_T$  — радиальное турбулентное число Рейнольдса, а  $x_m = \alpha a^2 / (2v_T)$  — искомый параметр. Еще одно условие получается из требования аналитичности решения при  $x=0$ . Оно следует из (3.12) и имеет вид

$$2u''(0) = u'^2(0) - 4 \quad (3.16)$$

Уравнение (3.12) удобно решать, задавшись в качестве параметра значением  $u'(0) = -n$ . Тогда с учетом условий (3.16) и  $u(0) = 0$  получается задача Коши. Ее нужно интегрировать до такого значения  $x = x_m$ , при котором выполняется последнее из условий (3.15). Тогда первое из этих условий определяет значение  $R_T$ .

Задача в подобной постановке подробно исследована в [1]. Разница заключается в том, что там было использовано условие прилипания  $u'(x_m) = 0$ , т. е. рассмотрено ламинарное течение. Как выяснено в [1], задача имеет два решения при всех значениях  $0 \leq R_T \leq \infty$ , причем значению  $R_T = 0$  соответствует  $n = 0$  и 3,782, а пределу  $R_T \rightarrow \infty$  — значения  $n = -2$  и 4.

В случае граничных условий (3.15) задача также имеет два решения, одно из которых находится аналитически и соответствует потенциальному течению со вдувом  $u = 2x$ . Это решение удовлетворяет условиям (3.15) и (3.16), если положить  $x_m = R_T/2$ . Второе решение аналитически не выражается, но при  $R_T \rightarrow \infty$  стремится к функции

$$u = 2x - 6(1 - e^{-x}) \quad (3.17)$$

Решению (3.17) отвечает значение  $n = 4$ , а  $x_m \rightarrow \infty$  по закону

$$x_m \sim 3 + 1/2 R_T \quad (3.18)$$

Это асимптотическое решение дает картину меридионального течения, качественно близкую к изображенной на фиг. 1. В частности, оно содержит описание циркуляционной зоны в приосевой области. Для конечных значений  $R_T$  уравнение (3.12) легко решается численно. Как показывают вычисления, значению  $R_T = 0$  соответствует  $n = 3,901$ . Таким образом, когда  $n$  пробегает значения от 3,901 до 4 величина  $R_T$  изменяется от 0 до  $\infty$ .

Узость интервала изменения  $n$  позволяет получить приближенное аналитическое решение задачи. Обозначим (3.17) через  $u_0$  и будем искать решение вида  $u = u_0 + \varepsilon u_1$ , где  $\varepsilon = 4 - n \ll 1$ . Для определения  $u_1$  получается задача

$$3u_1''' = 2(1 - 3e^{-x})u_1' + (2 - x - 3e^{-x})u_1'' - 3e^{-x}u_1$$

$$u_1(0) = 0, \quad u_1'(0) = 1, \quad u_1''(0) = -4, \quad u_1'''(0) = 5,5$$

которую можно решить раз и навсегда. Наибольший интерес представляет поведение решения при больших  $x$ . Дело в том, что, согласно (3.17),  $u_0''' = 6e^{-x}$  и последнее из условий (3.15) выполняется лишь при  $x_m = \infty$ ; поправка и нужна, чтобы сделать  $x_m$  конечным. Пренебрегая экспоненциальными членами, нетрудно получить приближенное решение, близкое к (3.17), в виде

$$u = 2x - 6(1 - e^{-x}) - \varepsilon_1(1/3x^3 - x^2 + 2x)$$

где  $\varepsilon_1$  — новый малый параметр. Он может быть связан с  $R_T$  посредством соотношений

$$\varepsilon_1 = \frac{3e^{-x_m}}{x_m - 1}; \quad R_T = 2x_m - 6(1 - e^{-x_m}) - \frac{3e^{-x_m}}{x_m - 1} \left( \frac{x_m^3}{3} - x_m^2 + 2x_m \right) \quad (3.19)$$

При  $R_T > 5$ ,  $x_m > 5,5$  и  $\varepsilon_1 < 3 \cdot 10^{-3}$ , так что можно пользоваться асимптотической зависимостью (3.18), а для вычисления  $u(x)$  использовать (3.17). Отметим, что соотношение (3.18) неплохо работает даже при  $R_T = 0$ , которому, согласно вычислениям, соответствует точное значение  $x_m = 3,075$ .

Существенной чертой рассматриваемого класса решений является независимость меридионального течения от вращения. С этой точки зрения решения, близкие к (3.17) (назовем их решениями первого типа), едва ли могут считаться физически реальными для ламинарного режима. В самом деле, рассмотрим, например, предельное решение при  $n = 3,901$ , для которого  $R_T = 0$ . Ему соответствует непроницаемый вращающийся стакан. Легко можно представить, что и на опыте в таком стакане возникнет меридиональная циркуляция с возвратным течением в приосевой зоне и прямотоком на периферии. Но ясно, что интенсивность этих движений должна зависеть от скорости вращения стакана, тогда как рассматриваемое автомодельное решение при фиксированной вязкости дает вполне определенную картину и интенсивность течения, не зависящую от наличия вращения, что представляется парадоксальным. Иначе обстоит дело в турбулентном режиме, когда вращение может влиять на турбулентную вязкость, а через нее — на картину и интенсивность течения.

**4. Течение с минимальной диссипацией энергии.** Для рассматриваемого течения в цилиндре радиуса  $a$  и длины  $L$  скорость диссипации энергии имеет выражение

$$D = \int_0^L dz \int_0^a v_T \left[ \left( \frac{dU_\varphi}{dr} - \frac{U_\varphi}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial U_z}{\partial r} \right)^2 + 2 \left( \frac{dU_r}{dr} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial U_z}{\partial z} \right)^2 + 2 \left( \frac{U_r}{r} \right)^2 \right] r dr \quad (4.1)$$

При решении краевой задачи гидродинамики естественным является задание вектора скорости на границе области. Именно так были сформулированы условия (3.6), которыми задается величина  $U_{ra}$ . Однако с физической точки зрения задание поля  $U_r$  при  $r = a$  в реальной вихревой камере представляется не таким уж естественным, да и не легким делом. Значительно более естественно при данной геометрии камеры задать перепад давлений на ней или расход, т. е. некоторую интегральную характеристику. В данной частной задаче удобнее всего считать постоянным динамический параметр  $\alpha$ , определенный соотношением (3.7). Имеет место связь

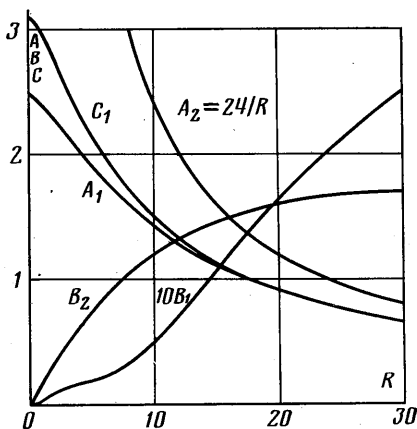
$$|U_{ra}| = \alpha \alpha R_T / (2x_m) \quad (4.2)$$

В переменных задачи (3.12), (3.14) выражение (4.1) может быть записано в виде (неварьируемый множитель опущен)

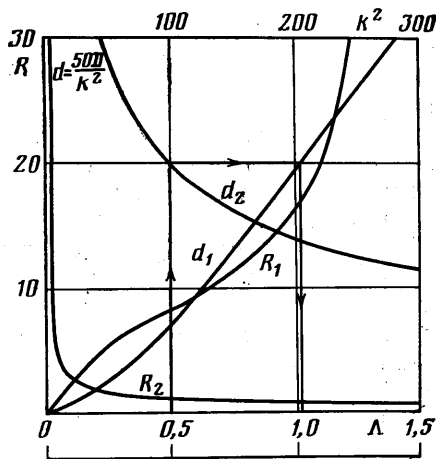
$$D = A(R_T) + k^2 [B(R_T) + 1/4 \Lambda^2 C(R_T)] \quad (4.3)$$

$$A = \frac{4}{x_m^2} \int_0^{x_m} u'^2 dx - \frac{R_T^2}{x_m^3}; \quad B = \frac{R_T^2}{x_m^2} \int_0^{x_m} \left( \Gamma' - \frac{\Gamma}{x} \right)^2 dx; \quad C = \frac{4}{3x_m^0} \int_0^{x_m} x u'^2 dx \quad (4.4)$$

где  $k=U_{\text{за}}/|U_{\text{ра}}|$ ,  $\Lambda=2L/(ka)$ . Поскольку неизвестная турбулентная вязкость  $\nu_T$  входит в (4.3) и (4.4) только через  $R_T$ , то минимизацию (4.3) и будем осуществлять по  $R_T$ .



Фиг. 2



Фиг. 3

Параметр  $\Lambda$  является основным в теории центробежной форсунки [1], а в теории Г. Н. Абрамовича [2] он единственный ( $\Lambda^{-1}$  — «геометрическая характеристика форсунки»). Величины  $k$  и  $\Lambda$  легко могут быть выражены только через геометрические характеристики вихревой камеры. В случае тангенциальных вводов  $k$  равно отношению площадей боковой поверхности камеры и вводов.

Графики зависимостей (4.4) для решений обоих типов представлены на фиг. 2 ( $C_2=0$ ). Величины  $A, B, C$  имеют ясный физический смысл. Они характеризуют диссипацию энергии соответственно в радиальном, вращательном и осевом движении. Отсюда вытекает, что если  $|U_r| \ll U_\sigma$ , то для режимов первого типа параметр  $k$  несуществен для определения минимального  $R_T=R_1$ , которое тем самым зависит лишь от  $\Lambda$ . Это целиком соответствует тому, что для реальных вихревых камер с большой степенью закрутки  $k$  вместо двух независимых безразмерных параметров  $k$  и  $L/a$  играет роль только их комбинация  $\Lambda$ .

Из фиг. 2 можно заключить, что имеют место неравенства  $A_2 > A_1$  и  $B_2 > B_1$ . Тогда из (4.3) следует, что при  $\Lambda \rightarrow 0$   $D_2 > D_1$ . Значит, при сильных вращениях (малые  $\Lambda$ ) первый режим обладает меньшей диссипацией, чем второй. Данные на фиг. 2 позволяют проанализировать все возможности. Однако наличие в (4.3) двух параметров затрудняет анализ. Поэтому при рассмотрении режимов первого типа ограничимся случаем больших  $k$ , что и представляет наибольший практический интерес. В этом случае минимальные значения  $R_1$  (определяются из условия  $dD/dR_T=0$ ) и величина  $d_1=50D_1/k^2$ , определенная по минимальному значению  $D_1$ , зависят только от  $\Lambda$ , тогда как соответствующие величины  $R_2$  и  $d_2$  являются только функциями  $k^2$ . Эти зависимости представлены на фиг. 3 в совмещенных осях координат. Если зафиксировать  $L/a$  и увеличивать  $k^2$ , то  $R_2 \rightarrow 0$ , а так как при этом  $\Lambda \rightarrow 0$ , то и  $R_1 \rightarrow 0$ . Таким образом, для каждого из решений увеличение степени закрутки приводит к увеличению  $\nu_T$  и снижению  $R_T$ , отвечающему минимуму диссипации энергии. В области малых  $\Lambda$

$$R_1=25\Lambda \quad (4.5)$$



Пусть  $k \rightarrow \infty$  за счет того, что  $|U_{ra}| \rightarrow 0$ . Тогда  $\Lambda \rightarrow 0$  и из последнего равенства и определения  $R_T$  найдем

$$v_T = a^2 U_{\varphi a} / (50L) \quad (4.6)$$

Таким образом, в приведенном выше примере с вращающимся стаканом турбулентная вязкость пропорциональна скорости вращения. Если, например,  $U_{\varphi a} = 0$ , то  $v_T = 0$  и, согласно (3.9), меридиональное движение отсутствует, так что в турбулентном режиме парадокс снимается. При  $U_{\varphi a} \neq 0$  движение в стакане будет автомодельным относительно скорости вращения, поскольку функция  $u(x)$  при  $R_T = 0$  вполне определена и не зависит от  $U_{\varphi a}$ . С увеличением длины стакана  $L$  интенсивность меридиональных движений при каждом фиксированном  $z$  будет уменьшаться. Все эти выводы, очень похожие на правду, как и формулу (4.5), следовало бы проверить специальным экспериментом, реализация которого не представляется сложной.

Вернемся к фиг. 3. Для решения вопроса, какой из минимумов,  $d_1$  или  $d_2$ , при заданных параметрах  $k$  и  $\Lambda$  лежит ниже, можно по заданному  $k^2$  найти  $d_2$ , а затем по значению  $d_1 = d_2$  определить величину  $\Lambda_*$ . Указанная процедура проиллюстрирована на фиг. 3 стрелками. Так как с ростом  $\Lambda$  величина  $d_1$  возрастает, а  $d_2$  не меняется, то в случае  $\Lambda > \Lambda_*$  будет  $d_1 > d_2$  и наоборот. Иными словами, если с глубиной минимума связать вероятность появления того или иного режима, то можно сказать, что при  $\Lambda < \Lambda_*$  более вероятен режим 1 с циркуляционной зоной, а при  $\Lambda > \Lambda_*$  — прямоточный режим 2. При  $\Lambda = \Lambda_*$  оба режима равновероятны. Как показывают наблюдения, эти свойства действительно присущи реальным течениям.

При небольших степенях закрутки действительно сосуществуют оба режима, причем переход от одного из них к другому осуществляется буквально «мановением руки». С ростом  $\Lambda$  вероятность спонтанной реализации режима 2 возрастает (опыты автора).

Перейдем к количественному сопоставлению. Сначала рассмотрим конкретное течение в вихревой камере [13], имеющей радиус 8 см, высоту  $L = 20$  см, радиус выходного отверстия  $a = 6$  см; направляющий аппарат выполнен в виде 12 щелей общей площадью 16,38 см<sup>2</sup>, наклоненных под углом 45°. Величина  $k$ , определенная по параметрам потока при  $r = a$ , составляет 36,1. Тогда  $\Lambda = 0,185$ . По графику фиг. 3 определяем  $R_1 = 4,3$  (формула (4.5) дает  $R_1 = 4,6$ ). Согласно (3.19), находим  $x_m = 5,2$  (формула (3.18) дает  $x_m = 5,15$ ). Далее, согласно (4.2) вычисляется параметр  $\alpha = (2x_m/R_T) |U_{ra}|/a$ . В соответствии с (3.7) имеем перепад давления вдоль оси камеры  $\Delta p = 2\rho\alpha^2 z^2 = 11,52\rho U_{ra}^2 (z/a)^2$ . Эта величина весьма невелика. Так, при  $\rho = 1$  кг/м<sup>3</sup>,  $|U_{ra}| = 1$  м/с для  $z = a$  имеем  $\Delta p = 11,52$  Па  $\approx 1$  мм H<sub>2</sub>O. Таким образом, можно считать давление на оси практически постоянным, что вполне согласуется с данными, представленными в [13].

Согласно (3.1) и (3.11), при использовании (3.17) получаем

$$U_z = 2\alpha z (1 - 3e^{-x}) \quad (4.7)$$

В препринте [13] значения  $U_z$  отнесены к средней расходной скорости  $U_0$  при  $z = L$

$$U_0 = \frac{2}{a^2} \int_0^a r U_z dr = \frac{1}{x_m} \int_0^{x_m} U_z(x) dx = 2\alpha L \left( 1 - 3 \frac{1 - e^{-x_m}}{x_m} \right) = 0,43 \cdot 2\alpha L$$

При  $z/L = 0,5$  (так в препринте)

$$U_z^* = U_z / U_0 = 1,17 (1 - 3e^{-x}); \quad x = x_m (r/a)^2 \quad (4.8)$$

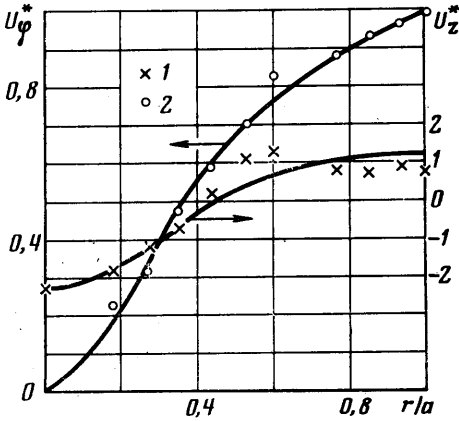
Для расчета относительной окружной скорости  $U_\varphi^* = U_\varphi / U_{\varphi a}$  достаточно проинтегрировать уравнение (3.14) с использованием (3.17) при условиях  $\Gamma(0) = 0$ ;  $\Gamma'(0) = 1$  до значения  $x = x_m$ . После этого  $U_\varphi^*$  вычисляется по формуле

$$U_\varphi^* = (\Gamma/\Gamma_m) (a/r); \quad \Gamma_m = \Gamma(x_m); \quad r = a\sqrt{x/x_m} \quad (4.9)$$

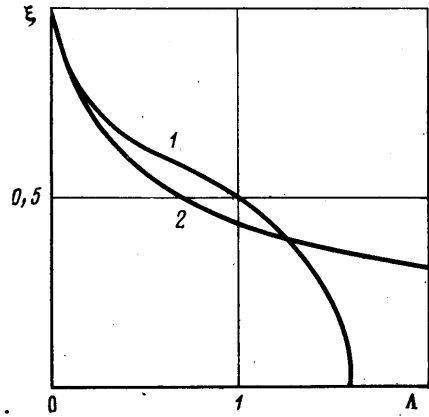
Зависимости (4.8) и (4.9) изображены на фиг. 4. Точками 1 (для  $U_z^*$ ) и 2 (для  $U_\varphi^*$ ) нанесены опытные данные из [13]. Учитывая разницу между реальной вихревой камерой и пористой вращающейся трубой, а также неизбежную погрешность эксперимента, согласие теории с измерениями следует признать хорошим. Отметим,

что в разобранным примере турбулентная вязкость достаточно велика, поэтому окружная скорость монотонно падает в направлении к оси камеры. При больших числах Рейнольдса расчетная зависимость  $U_{\varphi}(r)$  имеет максимум, который наблюдается и в эксперименте.

К сожалению, поля скоростей в вихревых камерах не поддаются универсальному обобщению. Поэтому приходится довольствоваться отдельными сопоставлениями. Однако для режимов типа 1 существует универсальная характеристика (относительный радиус циркуляционной зоны  $\xi$ ), которая определяет всю гидродинамику



Фиг. 4



Фиг. 5

вращающегося потока. От  $\xi$  зависит положение максимума и значение максимальной окружной скорости, проходное сечение для основного потока, гидравлическое сопротивление камеры, наконец, ее акустические свойства. Зависимость  $\xi(\Lambda)$  для случая  $R_T \geq 5$  может быть легко построена следующим образом. По данному  $\Lambda$  определяется значение  $R_1$  (фиг. 3), по формуле (3.18) находится  $x_m$ , тогда  $\xi = x_0/x_m$ , где  $x_0 = 2,821439$  — ненулевой корень функции (3.17). Хотя  $x_0$  — фиксированное число, величина  $\xi$  убывает до нуля с ростом  $R_T$  до бесконечности, что физически совершенно естественно. При  $R_T < 5$   $\xi(\Lambda)$  строится численно.

Зависимость  $\xi(\Lambda)$ , найденная из условия минимума диссипации энергии, показана на фиг. 5 кривой 1. Здесь же кривой 2 нанесены значения радиуса воронки, вычисленные для идеальной жидкости [1]. Как видно, для режимов сильного вращения (малые  $\Lambda$ ) значения  $\xi$  в затопленном и кавитационном режимах совпадают. С ростом  $\Lambda$  появляется отличие, которое при  $\Lambda = 1,54$  приобретает катастрофический характер, ибо  $\xi$  обращается в нуль. Это означает, что циркуляционная зона схлопывается и при  $\Lambda > 1,54$  может существовать лишь прямоточный режим истечения 2. Заметим, что кавитационная полость в невязком потоке схлопнуться не может из-за появления бесконечных скоростей, так что расхождение кривых 1 и 2 при больших  $\Lambda$  закономерно (удивительным скорее является их согласие при малых  $\Lambda$ ).

Отметим также, что если кривая 2 подтверждена многочисленными измерениями, то для затопленных режимов данных почти нет. По-видимому, это связано с трудностями измерения (как правило, малой) радиальной скорости, по нулевому значению которой определяется величина  $\xi$ . Тем не менее кое-какие опытные данные имеются и они качественно и даже количественно подтверждают вывод о неизбежности схлопывания циркуляционной зоны. Практически увеличение параметра  $\Lambda$  проще всего осуществить путем уменьшения  $a$  за счет диафрагмирования выхода из камеры. Указание на то, что при малых  $a$  в камере возможен только прямоточный режим, содержалось еще в [14]. В работах [13, 15] указано, что при относительном радиусе диафрагмы 0,05 зона разрежения в камере отсутствует. По имеющимся там данным ( $L/a = 50$ ;  $k = 43,3$ ) нетрудно найти, что в этой камере было  $\Lambda = 2,3$ .

В диссертации [16] приведена эмпирическая формула для определения радиуса зоны разрежения:  $R_p/a = 0,67 - 0,27 / [(U_{\varphi 0}/U_0)^{0,8} - 0,1]$ . Согласно этой формуле,  $R_p = 0$  при  $\Lambda = 1,6$ . Отметим, однако, что условие  $R_p = 0$  является косвенным признаком схлопывания циркуляционной зоны и зависимость  $\xi(\Lambda)$  нуждается в прямой экспе-

риментальной проверке. Отметим также, что подобный эксперимент требует достаточной осторожности из-за слабой устойчивости метастабильного режима 1 при больших  $\Lambda$ .

Таким образом, предлагаемая вариационная модель, не использующая каких-либо эмпирических констант, вполне адекватно отражает особенности турбулентного вращающегося потока во всех его нетривиальных проявлениях. Это дает основание для дальнейшей разработки модели и позволяет надеяться на успех ее применения в других задачах.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдштик М. А. Вихревые потоки. Новосибирск: Наука, 1981. 366 с.
2. Абрамович Г. Н. Прикладная газовая динамика. М.: Гостехиздат, 1953. 736 с.
3. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
4. Хинце И. О. Турбулентность. М.: Физматгиз, 1963. 680 с.
5. Васильев О. Ф., Будунев Н. Ф. К вопросу о расчете турбулентного течения при внезапном расширении канала.— В кн.: Турбулентные течения. М.: Наука, 1974, с. 131–135.
6. Канавин В. П. К расчету течений вязкой жидкости в камерах на основе решения уравнения четвертого порядка для функции тока.— В кн.: Исследования в механике сплошных сред. Иркутск: Изд-во Иркутск. ун-та, 1983, с. 149–160.
7. Кинни Р. Универсальное подобие скоростей в полностью турбулентных вращающихся потоках.— Тр. амер. о-ва инж.-мех. Прикл. механика, 1967, т. 34, № 2, с. 199–206.
8. Харша П. Модели переноса кинетической энергии.— В кн.: Турбулентность, принципы и применения. М.: Мир, 1980, с. 207–261.
9. Турбулентные сдвиговые течения. Т. 1. М.: Машиностроение, 1982. 432 с.
10. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1973. 536 с.
11. Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 447 с.
12. Гленсдорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. М.: Мир, 1973. 280 с.
13. Волчков Э. П., Смутьский И. И. Аэродинамика вихревой камеры со вдувом по боковой поверхности (экспериментальное исследование). Новосибирск, Ин-т теплофизики СО АН СССР, Препринт № 38–79, 1979.
14. Гольдштик М. А. К теории эффекта Ранка (закрученный поток газа в вихревой камере).— Изв. АН СССР. Механ. и машиностр., 1963, № 1, с. 132–137.
15. Волчков Э. П., Смутьский И. И. Аэродинамика вихревой камеры с торцевым и боковым вдувом.— Теорет. основы хим. технологии, 1983, т. 17, № 2, с. 214–219.
16. Смутьский И. И. Исследование гидродинамики вихревых камер: Автореф. дис. на соискание уч. ст. канд. техн. наук. Новосибирск, Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1979, 17 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию  
20.XII.1983