7. *Oguchi H., Hatakeyama M.* One-dimensional, steady supersonic condensation.– Proc. 12th Int. Symp. on Rarefied Gas Dynamics, New York, 1980. New York, 1981, p. 321–329.
8. *Йен Ш.* Решение кинетических уравнений для неравновесного течения газа между эмиттирующей и поглощающей поверхностями.– В сб.: Динамика разреженных газов. М.: Мир, 1976, с. 139–148.
9. *Коган М. Н.* Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
10. *Yen S. M.* Non-equilibrium behaviour in the Knudsen layer near a condensing interphase.– In: 13th Int. Symp. on Rarefied Gas Dynamics, Novosibirsk, 1982. Book of abstracts. V. 1. Novosibirsk, 1982, p. 199–201.

Москва

Поступила в редакцию
20.IX.1983

УДК 536.25

О ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОМ ДВИЖЕНИИ РЕАГИРУЮЩЕЙ КАПЛИ В ХИМИЧЕСКИ АКТИВНОЙ СРЕДЕ

РЯЗАНЦЕВ Ю. С.

Известно, что наличие градиента температуры на поверхности капли (пузырька) может приводить к появлению градиента силы поверхностного натяжения (эффект Марангони) и вызывать движение капли (см., например, [1–3]). При формулировке задач о термокапиллярном движении капель неоднородное температурное поле во внешней среде, вызывающее движение, обычно считается заданным. В данной заметке теоретически исследуется термокапиллярное движение капли в первоначально однородной среде, когда появление градиента температуры на поверхности капли и связанных с ним термокапиллярных сил является следствием собственного движения капли. Рассматривается случай, когда возникновение неоднородного распределения температуры на поверхности капли вызвано протеканием на поверхности капли экзо(эндо)термической реакции, в которой участвует активный компонент, содержащийся в окружающей каплю среде. Получено приближенное аналитическое решение задачи, позволившее установить выражение для действующей на движущуюся каплю силы, которая в зависимости от значений характерных параметров может быть как положительной (сила сопротивления), так и отрицательной (сила тяги).

Рассмотрим установившееся, с постоянной скоростью движение капли в среде, заполняющей все пространство и содержащей активную компоненту, способную к сопровождающемуся выделением (поглощением) тепла химическому превращению на поверхности капли. Будем считать, что реакция протекает в диффузионном режиме (бесконечная скорость реакции) и что потоком Стефана, а также баро- и термодиффузией можно пренебречь. Плотности, вязкости, теплопроводности и некоторые другие характеристики среды и капли предполагаются имеющими постоянные значения, зависимость поверхностного натяжения капли от температуры принимается линейной. Будем считать, что движение капли может быть описано уравнениями Навье – Стокса в стоксовом приближении (малые числа Рейнольдса). Предполагается также, что при движении капля сохраняет сферическую форму. При формулировке задачи используется движущаяся система координат, связанная с центром капли. В рамках сформулированных допущений система уравнений и граничных условий для скорости и температуры капли и внешней среды, а также концентрации активной компоненты, реагирующей на поверхности капли, может быть записана в виде

$$-\frac{1}{\rho_i}\nabla p_i+\nu_i\,\Delta\mathbf{v}_i=0,\qquad \operatorname{div}\mathbf{v}_i=0$$

$$(\mathbf{v}_i\nabla)T_i=\chi_i\Delta T_i,\qquad (\mathbf{v}_i\nabla)C_1=D_1\Delta C_1$$

$$r=a,\qquad v_{r1}=v_{r2}=0,\qquad v_{\theta1}=v_{\theta2},\qquad \frac{p_2-p_1}{2}=\eta_2\frac{\partial v_{r2}}{\partial r}-\eta_1\frac{\partial v_{r1}}{\partial r}+\frac{\sigma}{a}$$

$$\eta_1\left(\frac{\partial \mathbf{v}_{1\theta}}{\partial r}-\frac{\mathbf{v}_{1\theta}}{r}\right)-\eta_2\left(\frac{\partial \mathbf{v}_{2\theta}}{\partial r}-\frac{\mathbf{v}_{2\theta}}{r}\right)+\frac{1}{a}\frac{d\sigma}{dT}\frac{dT}{d\theta}=0 \tag{1}$$

$$T_1=T_2,\qquad \lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial r}-\lambda_2\frac{\partial T_2}{\partial r}=-QD_1\frac{\partial C_1}{\partial r},\qquad C_1=0$$

$$r \to \infty, \quad v_1 \to U_\infty, \quad T_1 \to T_\infty, \quad C_1 \to C_\infty$$

$$r=0, \quad T_2 < \infty, \quad v_2 < \infty.$$

Здесь обозначения дифференциальных операторов стандартные, v_i, T_i, C_1 – скорость, температура и концентрация, ρ_i, p_i – плотность и давление, λ_i, $\chi_i=\lambda_i/\rho_i C_{pi}$, D_1, η_i, $\nu_i=\eta_i/\rho_i$ – коэффициенты теплопроводности, температуропроводности, диффузии, динамической вязкости и кинематической вязкости, Q – тепловой эффект реакции на поверхности капли, a – радиус капли, σ – коэффициент поверхностного натяжения, c_{pi} – теплоемкость, нижним индексом ∞ помечены значения величин во внешней среде на больших расстояниях от частицы, $i=1$, 2 – характеристики внешней среды и капли соответственно. Распределения скорости, температуры и концентрации обладают аксиальной симметрией относительно оси, проходящей через центр капли в направлении скорости движения, поэтому при анализе используется сферическая система координат, в которой радиус r отсчитывается от центра капли, а угол θ – от направления, противоположного скорости ее движения.

Введя функцию тока и перейдя к безразмерным переменным, уравнения и граничные условия (1) можно представить в следующей форме:

$$E^4\psi_i = 0, \qquad E^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \tag{2}$$

$$r=1, \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial\theta} = \frac{\partial\psi_2}{\partial\theta} = 0, \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial r} = \frac{\partial\psi_2}{\partial r}, \quad r=0, \quad \frac{\psi_2}{r^2} < \infty \tag{3}$$

$$r \to \infty, \quad \psi_1 \to \frac{r^2}{2}\sin^2\theta$$

$$r=1 \quad \left(\frac{2}{\sin\theta}\frac{\partial\psi_1}{\partial r} - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial r^2}\right) - \beta\left(\frac{2}{\sin\theta}\frac{\partial\psi_2}{\partial r} - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial r^2}\right) + M\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = 0 \tag{4}$$

$$-\frac{\mathrm{Pe}_\chi}{r^2\sin\theta}\frac{\partial(\psi_1,\varphi)}{\partial(r,\theta)} = \Delta\varphi \tag{5}$$

$$-\frac{\mathrm{Pe}}{r^2\sin\theta}\frac{\partial(\psi_1,\xi)}{\partial(r,\theta)} = \Delta\xi \tag{6}$$

$$-\frac{\varkappa^{-1}\,\mathrm{Pe}_\chi}{r^2\sin\theta}\frac{\partial(\psi_2,\Phi)}{\partial(r,\theta)} = \Delta\Phi \tag{7}$$

$$r=1, \quad \varphi=\Phi, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial r} - \delta\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{\partial\xi}{\partial r} \tag{8}$$

$$r\to\infty, \quad \varphi\to 0, \quad \xi\to 0, \quad r=0, \quad \Phi<\infty \tag{9}$$

$$v_{ir} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi_i}{\partial\theta}, \quad v_{i\theta} = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi_i}{\partial r}, \quad \varphi = Lc_{p1}\frac{T_1-T_\infty}{h}$$

$$\xi = \frac{C_\infty - C_1}{C_\infty}, \quad \Phi = Lc_{p1}\frac{T_2-T_\infty}{h}, \quad h = \frac{QC_\infty}{\rho_1}, \quad \beta = \frac{\eta_2}{\eta_1}$$

$$\delta = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad \varkappa = \frac{\chi_2}{\chi_1}, \quad L = \frac{\chi_1}{D}$$

$$\mathrm{Pe} = \frac{U_\infty a}{D_1}, \quad \mathrm{Pe}_\chi = \frac{U_\infty a}{\chi_1}, \quad M = \frac{QC_\infty D_1}{\rho_1 c_{p1}\eta_1 U_\infty \chi_1}\frac{d\sigma}{dT}$$

Здесь для безразмерной пространственной координаты и скорости использованы прежние обозначения.

Решения уравнений (2) с граничными условиями (3), определяющие поля скоростей вне и внутри капли, имеют вид

$$\psi_1 = \frac{1}{2}\sin^2\theta\left(r^2 + Ar - \frac{A+1}{r}\right) \tag{10}$$

$$\psi_2 = \frac{1}{2}\sin^2\theta\left(\frac{3}{2} + A\right)(r^4 - r^2) \tag{11}$$

Константа A пока остается не определенной и будет найдена из условия (4) в ходе решения задачи о распределении температуры и концентрации.

Как уже отмечалось, при описании движения среды использовано стоксово приближение, т. е. предполагается, что $\mathrm{Re}=U_\infty a/\nu_i<1$. Будем считать также, что $\mathrm{Pe}=L\mathrm{Pe}_{\chi1}=L\varkappa\mathrm{Pe}_{\chi2}<1$, $M\mathrm{Pe}\sim1$, и найдем приближенное решение задачи о полях концентрации и температуры методом сращиваемых асимптотических разложений (например, [4, 5]). Ограничившись нулевым и первым членами разложения, распределения концентрации и температуры представим в следующем виде.

Во внешней области

$$\varphi=\varphi^{(0)}+\mathrm{Pe}_{\chi1}\varphi^{(1)},\qquad \xi=\xi^{(0)}+\mathrm{Pe}\,\xi^{(1)} \tag{12}$$

Во внутренней области

$$\varphi=\varphi_0+\mathrm{Pe}_{\chi1}\varphi_1,\qquad \xi=\xi_0+\mathrm{Pe}\,\xi_1 \tag{13}$$

Внутри капли

$$\Phi=\Phi_0+\mathrm{Pe}_{\chi1}\Phi_1 \tag{14}$$

Последовательно определяя нулевые и первые члены разложений (12)–(13) из уравнений (5)–(7), в которых функции тока заданы выражениями (10), (11), граничных условий (8), (9) и условий сращивания внутренних и внешних разложений, аналогично [5] получим

$$\varphi_0=r^{-1},\qquad \xi_0=r^{-1},\qquad \varphi^{(0)}=\xi^{(0)}=0,\qquad \Phi_0=1 \tag{15}$$

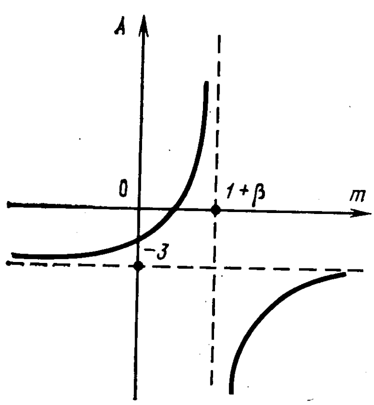
$$\mathrm{Pe}_\chi\,\varphi^{(1)}=\frac{1}{r}\exp\frac{\mathrm{Pe}_\chi\,r(\cos\theta-1)}{2},\qquad \mathrm{Pe}\,\xi^{(1)}=\frac{1}{r}\exp\frac{\mathrm{Pe}\,r(\cos\theta-1)}{2} \tag{16}$$

$$\xi_1=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2r}+\left[\frac{1}{2}+\frac{A}{2r}-\frac{3}{4}\frac{A+1}{r^2}+\frac{A+1}{4r^3}\right]\cos\theta \tag{17}$$

$$\varphi_1=-\frac{1}{2}+\frac{L}{2r}+\left[\frac{1}{2}+\frac{A}{2r}-\frac{3(L+\delta+1)+A(5+L+3\delta)}{4(2+\delta)r^2}+\frac{A+1}{4r^3}\right]\cos\theta \tag{18}$$

$$\Phi_1=\frac{L-1}{2}+\frac{(A+3)(1-L)}{4(2+\delta)}r\cos\theta \tag{19}$$

Формулы (15)–(19) с точностью до значения константы A определяют в принятом приближении распределения концентрации и температуры во внешней среде и поле температуры внутри капли. Для нахождения константы $A=A_0+\mathrm{Pe}A_1+\ldots$ воспользуемся граничным условием (4), устанавливающим связь между вязкими и термокапиллярными напряжениями на поверхности капли. Подставляя (10), (11), (18) в (4), с учетом предположения о том, что $M\mathrm{Pe}\sim1$, получим уравнение для A_0, решение которого имеет вид



$$A_0=-\frac{3}{2}\left[2m-1-\frac{2}{3\beta}\right]\left[m-1-\frac{1}{\beta}\right]^{-1},$$

$$m=\frac{M(1-L)\mathrm{Pe}}{12(2+\delta)\beta} \tag{20}$$

Зависимость A_0 от параметра m показана на фигуре. Определение константы A_0 завершает построение приближенного решения задачи с учетом эффекта Марангони в главном члене ряда для A; выражения (10), (11), (15)–(19) в явном виде описывают поля скорости, температуры и концентрации вне и внутри капли. При интерпретации полученных результатов заметим, что сила, действующая на каплю, движущуюся в безграничном пространстве, заполненном вязкой жидкостью, равна [6]

$$F=-4\pi\eta_1 aAU_\infty \tag{21}$$

Полученные решения описывают движение капли с постоянной скоростью и могут осуществляться при наличии внешней силы, например силы тяжести. При заданной величине силы скорость капли определяется из уравнения (21). Из выражения (20) для величины A_0 следует, что при движении капли химически активной жидкости в реакционноспособном газе возможны как случаи, когда термокапиллярная сила приводит к появлению сопротивления движению и для поддержания движения необходима сила, действующая в направлении скорости, так и случаи возникновения термокапиллярной силы тяги, когда для сохранения состояния равномерного движения необходима внешняя сила, действующая в направлении, противоположном направлению скорости. Возможность появления силы тяги пропорциональной скорости может служить указанием на неустойчивость состояния покоя реагирующей частицы при соответствующих значениях характерных параметров.

При анализе задачи было использовано линейное приближение, что ограничивает интервал значений A_0, при которых решение может считаться корректным. Если все же, руководствуясь методическими соображениями, рассмотреть всю область значений A_0, то можно убедиться, что резкое изменение величины A_0 в окрестности значения $A_0=1+\beta^{-1}$ связано с существенной перестройкой течения и образованием двух вихрей во внешнем потоке.

Отметим, что в рамках принятого приближения некоторые из использованных при формулировке задачи упрощающих предположений могут быть заменены более сложными, например может быть принята во внимание конечная скорость химической реакции, изменение формы частицы, что не приведет к принципиальным трудностям при построении решения в рамках принятого приближения. Отметим также, что величина скорости движения капли под действием термокапиллярной тяги в отсутствие внешних сил может быть найдена из анализа задачи в существенно нелинейной постановке.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Повицкий А. С., Любин Л. Я.* Основы динамики и тепломассообмена жидкостей и газов при невесомости. М.: Машиностроение, 1972. 252 с.
2. *Братухин Ю. К.* Термокапиллярный дрейф капельки вязкой жидкости.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 5, с. 156–161.
3. *Иванова С. В., Попель А. С.* О движении капли в вязкой жидкости под действием нерастворимого поверхностно-активного вещества.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 2, с. 63–68.
4. *Proudman I., Pearson J. R. A.* Expansions at small Reynolds numbers for the flow past a sphere and a circular cylinder.– J. Fluid Mech., 1957, v. 2, № 3, p. 237–262. (Рус. перев.: *Праудмен И., Пирсон Дж.* Разложения по малым числам Рейнольдса в задачах обтекания сферы и кругового цилиндра.– Механика. Период. сб. перев. иностр. лит., 1958, № 2, с. 3–28).
5. *Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С., Чалюк А. Т.* О поле температур, возникающем при движении реагирующей сферы при малых конечных числах Пекле и Рейнольдса.– ПМТФ, 1972, № 2, с. 59–65.
6. *Хаппель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с.

Поступила в редакцию 16.III.1984

Москва