

Из приведенных выражений следует, что средний уровень ординаты свободной поверхности на стенке не совпадает с ее невозмущенным уровнем. Частота колебаний свободной поверхности, определяемая величиной ν , зависит как от μ , так и от амплитудного параметра ϵ в отличие от случаев первого и второго приближений, когда такая зависимость от ϵ еще не проявляется. В целом они описывают картину взаимодействия длинных волн большой высоты с вертикальной стенкой.

Построенные приближенные решения задач как для бегущих, так и для стоячих волн содержат нерегулярные части относительно параметра μ . Поэтому для сходимости процесса следует считать, что $(\epsilon/\mu) < 1$. Кроме того, дисперсионное соотношение линейного приближения определяет частоту как вещественную величину для всех значений μ . Это обстоятельство обусловит устойчивость процесса вычислений при рассмотрении задач с начальными возмущениями свободной поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. М.: Физматгиз, 1963, ч. 1. 583 с.
2. Срегенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
3. Стокер Дж. Дж. Волны на море. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 617 с.
4. Узем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
5. Friedrichs K. O. On the derivation of the shallow water theory.— Commun. Pure Appl. Math., 1948, v. 1, № 1, p. 1–81.
6. Keller J. B. The solitary wave and periodic waves in shallow water.— Commun. Pure Appl. Math., 1948, v. 1, № 4, p. 323–339.
7. Korteweg D. J., Vries G., de. On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel, and on a new type of long stationary waves.— Philos. Mag., 1885, v. 39, № 420, p. 422–443.

Ленинград

Поступила в редакцию
20.IV.1984

УДК 533.6.011:536.423.4

ОДНОМЕРНАЯ СТАЦИОНАРНАЯ КОНДЕНСАЦИЯ ПРИ СКОРОСТЯХ ДВИЖЕНИЯ ПАРА, СОПОСТАВИМЫХ СО СКОРОСТЬЮ ЗВУКА

КРЮКОВ А. П.

Одномерная задача о стационарной конденсации одноатомного пара при скорости его движения значительно меньшей звуковой в настоящее время изучена достаточно полно.

Существенно меньше исследована нелинейная задача, когда скорость пара сопоставима со скоростью звука. Впервые такая ситуация изучалась в [1], где решалось модельное уравнение и были получены результаты для дозвуковых течений. Отношение температуры конденсируемого пара к температуре межфазной поверхности изменялось от 1,7 до 2,0, а отношение соответствующих плотностей — от 1,098 до 1,23. В [2] развит приближенный метод решения, результаты которого аппроксимировались зависимостью, подтвержденной экспериментальными исследованиями [3]. В [4, 5] рассматриваемая задача изучалась моментным методом. При этом максимальная величина отношения температуры конденсируемого пара к температуре границы раздела фаз составляла 2,3, а соответствующих давлений 3,1.

Процесс сверхзвуковой конденсации впервые рассматривался в [6] для числа Маха, равного 1,5. Там же обсуждались вопросы существования и единственности решения. В [7], продолжая [4], исследован ряд сверхзвуковых течений. В настоящей работе изложена схема решения задачи о конденсации моментным методом и представлены результаты, полученные для до- и сверхзвуковых скоростей в широком диапазоне изменения параметров конденсируемого пара.

Рассматривается течение одноатомного пара в полубесконечном пространстве $\infty > x > 0$, x — координата, отсчитываемая по внешней нормали к межфазной поверхности. Конденсация происходит на плоскости $x=0$. Известны температура границы раздела фаз T_s , а следовательно, и соответствующая ей равновесная числовая плотность пара по кривой насыщения n_s и два газодинамических параметра вдали от поверхности конденсации, например среднемаховая скорость потока пара u_∞ и его температура T_∞ . Поток движется в отрицательном по x направлении. Требуется определить скорость пара u , его температуру T и плотность n как функции x .

Изучение задачи осуществляется при помощи моментного метода решения кинетического уравнения Больцмана для максвелловских молекул. В рассматриваемом

случае это уравнение имеет вид

$$\xi_x \frac{df}{dx} = J \quad (1)$$

где f — функция распределения молекул по скоростям, ξ_x — x -я проекция скорости молекулы в лабораторной системе координат, J — интеграл столкновений. Принимается шестимоментная аппроксимация функции распределения

$$f = \begin{cases} f_1 = n_1(x) \left[\frac{h_1(x)}{\pi} \right]^{3/2} \exp\{-h_1(x) [(\xi_x - u_1(x))^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2]\}, & \xi_x > 0 \\ f_2 = n_2(x) \left[\frac{h_2(x)}{\pi} \right]^{3/2} \exp\{-h_2(x) [(\xi_x - u_2(x))^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2]\}, & \xi_x < 0 \end{cases} \quad (2)$$

В выражении (2) $h = 1/2RT$, n , T , u — числовая плотность, температура, переносная скорость, характеризующие соответственно потоки молекул k (индекс 2) и от (индекс 1) межфазной поверхности.

Некоторым обоснованием принятой аппроксимации могут служить следующие соображения. При $x=0$ функция (2) точно описывает положительно направленный поток молекул, имея в виду диффузный характер испарения. Вдали от границы раздела фаз приближение (2) также точно описывает состояние пара. К тому же в ряде решений сходных задач, осуществленных с использованием метода Монте-Карло для вычисления интеграла столкновений (например, [8]), полученный вид функции распределения похож на двухсторонний максвеллиан (2).

В соответствии с моментным методом обе части уравнения (1) умножаются на функции $\varphi(\xi)$, где ξ — скорость молекулы в лабораторной системе координат, и затем интегрируются по пространству скоростей. В качестве $\varphi(\xi)$ принимаются $\varphi_1=1$, $\varphi_2=\xi_x$, $\varphi_3=\xi_x^2$, $\varphi_4=\xi_x^3$, $\varphi_5=\xi_x \xi^2$. Таким образом, имеем взамен (1) систему шести приближенных моментных уравнений

$$\frac{dM_i(n_1, T_1, u_1, n_2, T_2, u_2)}{dx} = I_i(n_1, T_1, u_1, n_2, T_2, u_2) \quad (3)$$

$$M_i = \int \xi_x f \varphi_i d\xi, \quad I_i = \int \varphi_i J d\xi, \quad i=6$$

Выражения для M_i и I_i , когда взаимодействующие молекулы максвелловские, а аппроксимация функции распределения определяется выражением (2), можно найти в [4, 7].

При известных $n_1(0)$, $T_1(0)$, $u_1(0)$, $n_2(0)$, $T_2(0)$, $u_2(0)$ для системы (3) формулируется задача Коши и названная система дифференциальных уравнений первого порядка может быть решена численно одним из стандартных методов.

Положив коэффициент испарения равным единице, имеем на границе раздела фаз: $n_1(0) = n_s$, $T_1(0) = T_s$, $u_1(0) = 0$. Вдали же от межфазной поверхности ($x \rightarrow \infty$) выполняется условие

$$n_1(\infty) = n_2(\infty) = n_\infty, \quad T_1(\infty) = T_2(\infty) = T_\infty, \quad u_1(\infty) = u_2(\infty) = u_\infty \quad (4)$$

Определение значений n_1 , T_1 , u_1 , n_2 , T_2 , u_2 при $x=0$ осуществляется следующим образом. В (3) $I_i=0$ для $i=1, 2, 3$, следовательно, для этих i $M_i = \text{const}$, т. е. справедливо $M_i|_{x=0} = M_i|_{x \rightarrow \infty}$ или

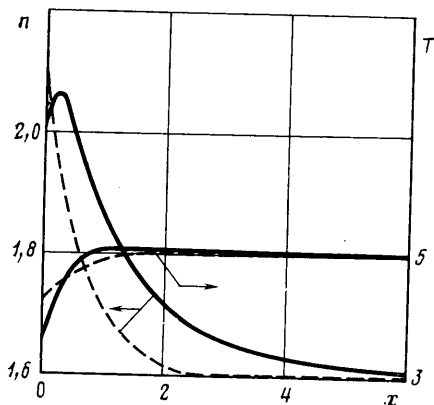
$$M_i(n_s, T_s, 0, n_2(0), T_2(0), u_2(0)) = M_i(n_\infty, T_\infty, u_\infty) \quad (5)$$

В этой системе трех уравнений сохранения (5) при двух известных параметрах вдали от границы раздела фаз, например T_∞ и u_∞ , а также n_s , T_s , содержится четыре неизвестных: $n_2(0)$, $T_2(0)$, $u_2(0)$, n_∞ . Задание произвольно n_∞ замыкает названную систему и позволяет вычислить $n_2(0)$, $T_2(0)$, $u_2(0)$. Решение поставленной задачи должно удовлетворять условию (4). Если оно не выполняется, то необходимо задать другое n_∞ , определить новые $n_2(0)$, $T_2(0)$, $u_2(0)$ из (5), затем в ходе решения (3) найти n_1 , T_1 , u_1 , n_2 , T_2 , u_2 при $x \rightarrow \infty$ и проверить выполнение (4). Решением считаются $n_1(x)$, $T_1(x)$, $u_1(x)$, $n_2(x)$, $T_2(x)$, $u_2(x)$, удовлетворяющие с требуемой точностью этому условию. Ниже представлены полученные таким образом решения ряда задач нелинейной конденсации.

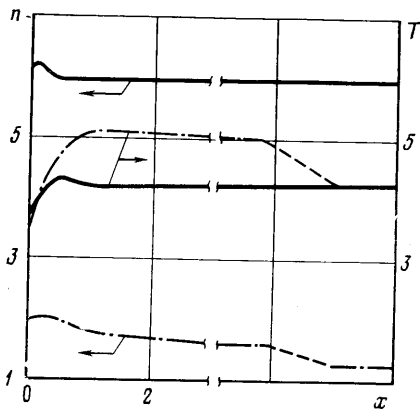
На первом этапе проводился расчет дозвуковых режимов течения пара. Для всех исходных данных, приведенных в [2], по рассмотренной методике были определены газодинамические параметры и необходимые потоки. Результаты полностью согласуются со значениями, определяемыми аппроксимационной зависимостью [2]. Также рассчитывался процесс конденсации при $M_\infty = u_\infty / (\sqrt{3}RT_\infty)^{1/2} = -0,857$ и $T_\infty/T_s = 5$, исследовавшийся в [6]. Сопоставление этих двух решений показано на фиг. 1. Сплошная линия — результаты автора, пунктир — данные работы [6].

Исследование процесса сверхзвуковой конденсации рассмотрим на примере течения, для которого $T_{\infty}'=4,25$, $u_{\infty}'=-2,22$ ($M_{\infty}'=-1,18$). Здесь и далее $T'=T/T_s$, $n'=n/n_s$, $u'=u/(2RT_s)^{1/2}$. Для удобства записи везде ниже штрихи у безразмерных величин опускаются. В ходе решения задачи выяснилось, что система (3) удовлетворяется с хорошей точностью для многих значений n_{∞} . В качестве примера на фиг. 2 сплошными линиями показаны кривые изменения n , T по x для $n_{\infty}=6,0$, $T_{\infty}=4,25$, $u_{\infty}=-2,22$. Здесь и на остальных рисунках x дается в длинах свободного пробега молекул пара.

В то же время поток пара, имеющий скорость $u_{\infty}=-2,22$ и температуру $T_{\infty}=4,25$, но меньшую плотность, может достичь поверхности конденсации, пройдя через плоский скачок уплотнения. Например, если $n_{\infty}=1,26$, то, воспользовавшись известными соотношениями взаимосвязи газодинамических параметров до и после



Фиг. 1



Фиг. 2

скачка уплотнения, получим, что n , T , u после скачка соответственно равны 1,6; 5,0; -1,75. Процесс конденсации при $n_{\infty}=1,6$, $T_{\infty}=5,0$, $u_{\infty}=-1,75$ рассмотрен выше (см. фиг. 1). Следовательно, параметры конденсируемого пара изменяются от $n_{\infty}=1,26$, $T_{\infty}=4,25$, $u_{\infty}=-2,22$ до $n_{\infty}=1,6$, $T_{\infty}=5,0$, $u_{\infty}=-1,75$ при прохождении через стационарную ударную волну, а далее — по закономерностям дозвуковой конденсации. Графически сказанное иллюстрирует фиг. 2 (штрихпунктирные линии). В представленном решении не определены положение ударной волны по координате x и толщина скачка уплотнения.

Итоги решения, представленные на фиг. 2, подтверждают выводы качественно анализа задачи об одномерном стоке на основе уравнений Навье — Стокса. В соответствии с результатами этого анализа при $|M_{\infty}| > 1$ находится бесконечно много решений, однако среди них существует единственное, описывающее структуру стационарной ударной волны. Что касается бесконечного числа решений типа показанных сплошными линиями на фиг. 2, то проведенные расчеты позволяют утверждать следующее. При заданных T_{∞} , u_{∞} в отличие от дозвуковой области, где подбирается единственная плотность n_{∞} , чтобы удовлетворить условию (4), для $|M_{\infty}| > 1$ величина n_{∞} может быть произвольной в достаточно широких пределах.

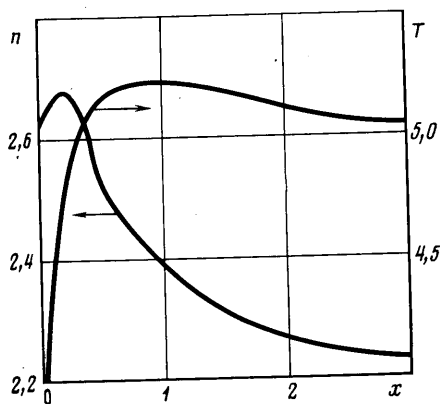
В рассмотренном примере ($T_{\infty}=4,25$, $u_{\infty}=-2,22$) при варьировании n_{∞} получены для $x=10$ также результаты: при $n_{\infty}=6,0$, $n=5,98$, $T=4,22$, $u=-2,22$, при $n_{\infty}=4,0$, $n=4,00$, $T=4,24$, $u=-2,22$, при $n_{\infty}=8,0$, $n=7,99$, $T=4,24$, $u=-2,22$. Для сравнения необходимо отметить, что в дозвуковой области изменение n_{∞} лишь на небольшую величину приводит к тому, что условие (4) не удовлетворяется. Такое различие влияния изменения n_{∞} на решение в дозвуковой и сверхзвуковой областях представляется естественным, так как при $|M_{\infty}| > 1$ малые возмущения параметров межфазной поверхности n_s , T_s (информация о границе раздела фаз) не успевают распространяться в натекающий поток в силу того, что скорость последнего больше скорости звука. (Возмущения сносятся потоком.) Таким образом, в этом случае для однозначного решения задачи необходимо задание трех параметров: n_{∞} , T_{∞} , u_{∞} .

Результаты исследования различных режимов конденсации представлены ниже:

T_{∞}	5	5	10	10	15	15
$-u_{\infty}$	3,5	3,5	4	4	6	6
$ M_{\infty} $	1,77	1,77	1,45	1,45	1,70	1,70
n_{∞}	40	60	20	50	60	80
δ , %	0,95	1,10	0,27	0,28	0,58	0,61

Здесь δ — наибольшая из величин $(n-n_{\infty})/n_{\infty}$, $(T-T_{\infty})/T_{\infty}$, $(u-u_{\infty})/u_{\infty}$, n , T , u — установившиеся параметры пара на достаточно большом расстоянии от поверхности

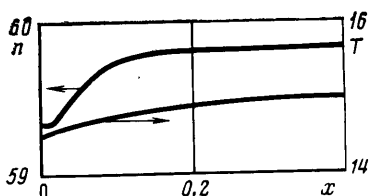
конденсации. Таким образом, δ представляет собой величину относительной ошибки решения. На фиг. 3 показано решение для околосвукового течения ($n_\infty=2,2$, $T_\infty=5,0$, $u_\infty=-2,0$, $|M_\infty|=0,98$), а на фиг. 4 — для сверхзвукового режима конденсации ($n_\infty=60,0$, $T_\infty=15$, $u_\infty=-6,0$, $|M_\infty|=1,7$). Из фиг. 2, 4 следует, что при сверхзвуковой конденсации с приближением к межфазной поверхности плотность может как возрастать (фиг. 2), так и уменьшаться (фиг. 4). Температура в обоих случаях уменьшается, однако для течения, иллюстрируемого фиг. 2 (сплошная линия), это уменьшение осуществляется немонотонно.



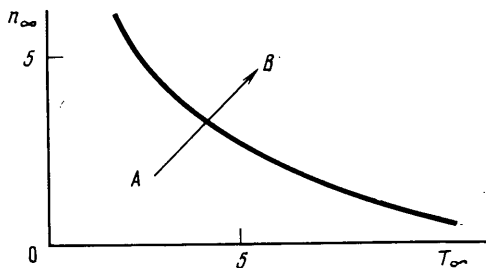
Фиг. 3

Анализ полученных результатов приводит к выводу о том, что с увеличением температуры дозвуковая область реализуется при все меньшем значении n_∞ (все более разреженном газе). Следовательно, вся плоскость n_∞, T_∞ разделяется на области дозвукового и сверхзвукового течений линией, качественный ход которой показан на фиг. 5. Исходя из этого, для устранения скачка уплотнения перед плоской конденсирующей поверхностью надо уменьшить T_s . При этом n_s уменьшится, а $n_\infty' = n_\infty/n_s$ соответственно возрастет, что приведет к перемещению исходной точки в сверхзвуковую область (переход $A \rightarrow B$, фиг. 5).

Следует отметить, что функция (2) в соответствии с [9] является приспособленной к граничным условиям, а рассмотрен-



Фиг. 4



Фиг. 5

ная граничная задача — корректной для соответствующих этой функции моментных уравнений независимо от их выбора. Учитывая, что для конденсации, как следует из [10], момент от функции распределения M_4 изменяется по x незначительно, произвол такого выбора ограничивается, по-видимому, пятым и шестым уравнениями системы (3).

Автор благодарит Г. А. Пузыреву и С. Б. Нестерова за помощь в выполнении вычислительных работ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коган М. Н., Макашев Н. К. О роли слоя Кнудсена в теории гетерогенных реакций и в течениях с реакциями на поверхности. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1971, № 6, с. 3—11.
2. Labuntsov D. A., Kryukov A. P. Analysis of intensive evaporation and condensation. — Int. J. Heat Mass Transfer, 1979, v. 22, № 7, p. 989—1002.
3. Niknejad J., Rose J. W. Interphase matter transfer: an experimental study of condensation of mercury. — Proc. Roy Soc., London, 1981, v. A 378, № 1774, p. 305—327.
4. Hatakeyama M., Oguchi H. Kinetic approach to non-linear condensation of flowing vapor. — Proc. 11th Int. Symp. on Rarefied Gas Dynamics. Cannes, France. V. 2. Paris, 1979, p. 1293—1303.
5. Ytrehus T., Alvestad J. A Mott-Smith solution for nonlinear condensation. — Proc. 12-th Int. Symp. on Rarefied Gas Dynamics, New York, 1980. New York, 1981, p. 330—345.
6. Бишаев А. М., Рыков В. А. Исследование задачи об одномерном стоке на основе кинетического уравнения. — В кн.: Численные методы в динамике разреженного газа. М.: Изд. ВЦ АН СССР, 1973, с. 9—21.

7. Oguchi H., Hatakeyama M. One-dimensional, steady supersonic condensation.— Proc. 12th Int. Symp. on Rarefied Gas Dynamics, New York, 1980. New York, 1981, p. 321–329.
8. Иен Ш. Решение кинетических уравнений для неравновесного течения газа между эмитирующей и поглощающей поверхностями.— В сб.: Динамика разреженных газов. М.: Мир, 1976, с. 139–148.
9. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
10. Yen S. M. Non-equilibrium behaviour in the Knudsen layer near a condensing interphase.— In: 13th Int. Symp. on Rarefied Gas Dynamics, Novosibirsk, 1982. Book of abstracts. V. 1. Novosibirsk, 1982, p. 199–201.

Москва

Поступила в редакцию
20.IX.1983

УДК 536.25

О ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОМ ДВИЖЕНИИ РЕАГИРУЮЩЕЙ КАПЛИ В ХИМИЧЕСКИ АКТИВНОЙ СРЕДЕ

РЯЗАНЦЕВ Ю. С.

Известно, что наличие градиента температуры на поверхности капли (пузырька) может приводить к появлению градиента силы поверхностного натяжения (эффект Марангони) и вызывать движение капли (см., например, [1–3]). При формулировке задач о термокапиллярном движении капель неоднородное температурное поле во внешней среде, вызывающее движение, обычно считается заданным. В данной заметке теоретически исследуется термокапиллярное движение капли в первоначально однородной среде, когда появление градиента температуры на поверхности капли и связанных с ним термокапиллярных сил является следствием собственного распределения температуры на поверхности капли вызвано протеканием на поверхности капли экзо(эндо)термической реакции, в которой участвует активный компонент, содержащийся в окружающей каплю среде. Получено приближенное аналитическое решение задачи, позволившее установить выражение для действующей на движущуюся каплю силы, которая в зависимости от значений характерных параметров может быть как положительной (сила сопротивления), так и отрицательной (сила тяги).

Рассмотрим установившееся, с постоянной скоростью движение капли в среде, заполняющей все пространство и содержащей активную компоненту, способную к сопровождаемому выделением (поглощением) тепла химическому превращению на поверхности капли. Будем считать, что реакция протекает в диффузионном режиме (бесконечная скорость реакции) и что потоком Стефана, а также баро- и термодиффузией можно пренебречь. Плотности, вязкости, теплопроводности и некоторые другие характеристики среды и капли предполагаются имеющими постоянные значения, зависимость поверхностного натяжения капли от температуры принимается линейной. Будем считать, что движение капли может быть описано уравнениями Навье – Стокса в стоксовом приближении (малые числа Рейнольдса). Предполагается также, что при движении капля сохраняет сферическую форму. При формулировке задачи используется движущаяся система координат, связанная с центром капли. В рамках сформулированных допущений система уравнений и граничных условий для скорости и температуры капли и внешней среды, а также концентрации активной компоненты, реагирующей на поверхности капли, может быть записана в виде

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{\rho_i} \nabla p_i + \mathbf{v}_i \Delta \mathbf{v}_i = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_i = 0 \\
 & (\mathbf{v}_i \nabla) T_i = \chi_i \Delta T_i, \quad (\mathbf{v}_i \nabla) C_i = D_i \Delta C_i \\
 & r = a, \quad v_{r1} = v_{r2} = 0, \quad v_{\theta 1} = v_{\theta 2}, \quad \frac{p_2 - p_1}{2} = \eta_2 \frac{\partial v_{r2}}{\partial r} - \eta_1 \frac{\partial v_{r1}}{\partial r} + \frac{\sigma}{a} \\
 & \eta_1 \left(\frac{\partial v_{1\theta}}{\partial r} - \frac{v_{1\theta}}{r} \right) - \eta_2 \left(\frac{\partial v_{2\theta}}{\partial r} - \frac{v_{2\theta}}{r} \right) + \frac{1}{a} \frac{d\sigma}{dT} \frac{dT}{d\theta} = 0 \\
 & T_1 = T_2, \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} - \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} = -QD_1 \frac{\partial C_1}{\partial r}, \quad C_1 = 0
 \end{aligned} \tag{1}$$