МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 1985

УДК 532.591

ПОЛНАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ДЛИННЫХ ВОЛН И ИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ С ВЕРТИКАЛЬНОЙ СТЕНКОЙ

АЛЕШКОВ Ю. З.

Проведен асимптотический анализ нелинейной пространственной краевой задачи теории потенциала, получена полная система уравнений, описывающая процесс распространения длинных поверхностных волн. Построены приближенные, с точностью третьего приближения, решения задач как о бегущих, так и о стоячих волнах.

1. Рассматриваем движение идеальной несжимаемой однородной тяжелой жидкости, ограниченной сверху свободной поверхностью, снизу – непроницаемым дном. Систему координат выберем так, чтобы плоскость xy совпадала с невозмущенной свободной поверхностью, ось z направим вертикально вверх. Тогда уравнение $z=\zeta(x,y,t)$, где t – время, будет задавать свободную поверхность, а уравнение $z=-H(x,y)$ – поверхность дна.

Движение жидкости считаем безвихревым, оно определяется решением следующей задачи:

$$\varphi_{xx}+\varphi_{yy}+\varphi_{zz}=0$$
$$\zeta_t+\zeta_x\varphi_x+\zeta_y\varphi_y=\varphi_z,\quad z=\zeta$$
$$\varphi_t+v^2/2+g\zeta=F(t),\quad z=\zeta$$
$$H_x\varphi_x+H_y\varphi_y+\varphi_z=0,\quad z=-H;\quad \varphi_x=0,\quad x=0 \tag{1.1}$$

Здесь $\varphi=\varphi(x,y,z,t)$ – потенциал скорости; $\mathbf{v}=\operatorname{grad}\varphi$; g – ускорение силы тяжести; $F(t)$ – произвольная функция.

Если жидкость простирается до бесконечности, то искомые функции в бесконечно удаленной точке полагаем ограниченными. Начальные условия сводятся к заданию ζ и $\operatorname{grad}\varphi$ в некоторый момент времени.

Запишем задачу (1.1) в следующем безразмерном виде:

$$\mu\Delta\Phi+\Phi_{zz}=0 \tag{1.2}$$
$$\mu(Z_t+\nabla Z\nabla\Phi)=\Phi_z,\quad z=Z \tag{1.3}$$
$$\mu(\Phi_t+Z+|\nabla\Phi|^2/2)+\Phi_z^2/2=\mu\Gamma(t),\quad z=Z \tag{1.4}$$
$$\mu\nabla H\nabla\Phi+\Phi_z=0,\quad z=-H;\quad \Phi_x=0,\quad x=0 \tag{1.5}$$
$$x_1=Lx,\quad y_1=Ly,\quad z_1=H_*z,\quad Lt=\sqrt{gH_*}t_1$$
$$\varphi_1=L\sqrt{gH_*}\Phi,\quad \zeta_1=H_*Z,\quad F_1=gH_*\Gamma$$
$$\mu=(H_*/L)^2,\quad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2},\quad \nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Здесь L – характерный горизонтальный размер, H_* – характерный вертикальный размер; индексом 1 обозначены размерные переменные.

Подставим Φ в виде ряда

$$\Phi=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(z+H)^k,\quad \alpha_k=\alpha_k(x,y,t;\mu)$$

В силу уравнения (1.2) и первого условия (1.5) имеем

$$\Phi=\alpha-\mu[(\nabla H\nabla\alpha)(z+H)+\Delta\alpha(z+H)^2/2]+$$
$$+\mu^2\{(\nabla H\nabla\alpha)|\nabla H|^2(z+H)+[\Delta\alpha|\nabla H|^2+\Delta H(\nabla H\nabla\alpha)](z+H)^2/2+$$
$$+[\Delta(\nabla H\nabla\alpha)+\Delta H\Delta\alpha](z+H)^3/6+\Delta^2\alpha(z+H)^4/24\}+O(\mu^3),\quad \alpha=\alpha_0$$

Кинематическое условие (1.3) линейно по Φ, поэтому, собирая в нем члены с μ не выше первой степени, непосредственно получаем

$$h_t+\nabla h\nabla\alpha+h\Delta\alpha=\mu\{[\nabla(\nabla H\nabla\alpha)h+\nabla(\Delta\alpha)^2h^2/2]\nabla(h-H)+$$
$$+(\nabla H\nabla\alpha)|\nabla H|^2+[\Delta\alpha|\nabla H|^2+\Delta H(\nabla H\nabla\alpha)]h+[\Delta(\nabla H\nabla\alpha)+$$
$$+\Delta H\Delta\alpha]h^2/2+\Delta^2\alpha h^3/6\},\qquad h=H+Z$$

Из динамического условия (1.4) имеем

$$\alpha_t-\mu((\nabla H\nabla\alpha_t)h+\Delta\alpha_t h^2/2]+h-H+$$
$$+\{|\nabla\alpha|^2-2\mu[\nabla\alpha\nabla(\nabla H\nabla\alpha)h+\nabla\alpha\nabla(\Delta\alpha)h^2/2\}/2+$$
$$+\mu(\nabla H\nabla\alpha+\Delta\alpha h)^2/2=\Gamma(t)$$

Введем $\nabla\alpha=\mathbf{w}$ и учтем, что $\Delta\alpha=\operatorname{div}\mathbf{w}$.

Тогда для определения $h(x,y,t)$, $\mathbf{w}(x,y,t)$ будем иметь следующую систему уравнений:

$$h_t+\operatorname{div}(h\mathbf{w})=\mu\Big\{[\nabla(\nabla H\mathbf{w})h+\nabla\operatorname{div}\mathbf{w}h^2/2]\nabla(h-H)+(\nabla H\mathbf{w})|\nabla H|^2+$$
$$+[|\nabla H|^2\operatorname{div}\mathbf{w}+\Delta H(\nabla H\mathbf{w})]h+[\Delta(\nabla H\mathbf{w})+\Delta H\operatorname{div}\mathbf{w}]h^2/2+\Delta\operatorname{div}\mathbf{w}h^3/6\Big\}\times$$
$$\times\mathbf{w}_t+\nabla(h-H+|\mathbf{w}|^2/2)=\mu\nabla\Big\{-(\nabla H\mathbf{w})^2/2+[\nabla H\mathbf{w}_t+\mathbf{w}\nabla(\nabla H\mathbf{w})-(\nabla H\mathbf{w})\operatorname{div}\mathbf{w}]h+$$
$$+\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{w}\nabla\right)\operatorname{div}\mathbf{w}-(\operatorname{div}\mathbf{w})^2\right]h^2/2\Big\}$$

Отметим, что данная система получена без использования предположения о малости амплитудного параметра.

2. Перейдем к рассмотрению движения жидкости в вертикальной плоскости при горизонтальном дне. Соответствующая система уравнений примет вид

$$\nu Z_\tau+(w+Zw)_x=(\mu/6)[w_{xx}(1+Z)^3]_x$$
$$\nu w_\tau+(Z+w^2/2)_x=(\mu/2)[(\nu w_{x\tau}+ww_{xx}-w_x^2)(1+Z)^2]_x$$

где $\tau=\nu t$, ν – некоторая постоянная.

Будем строить решение в виде степенных рядов по малому амплитудному параметру ε

$$Z=\sum_{i=1}^{\infty}\zeta_i\varepsilon^i,\qquad w=\sum_{i=1}^{\infty}w_i\varepsilon^i,\qquad \nu=\nu_0+\sum_{i=1}^{\infty}\nu_i\varepsilon^i$$

Тогда для определения ζ_i, w_i, ν_{i-1}, $i=1, 2, 3$, получим соответствующие системы уравнений

$$\nu_0\zeta_{1\tau}+w_{1x}=(\mu/6)w_{1xxx},\qquad \nu_0w_{1\tau}+\zeta_{1x}=(\mu/2)\nu_0w_{1xx\tau}$$
$$\nu_0\zeta_{2\tau}+\nu_1\zeta_{1\tau}+w_{2x}+(w_1\zeta_1)_x=(\mu/6)(w_{2xx}+3\zeta_1w_{1xx})_x$$
$$\nu_0w_{2\tau}+\nu_1w_{1\tau}+\zeta_{2x}+w_1w_{1x}=(\mu/2)(\nu_0w_{2x\tau}+\nu_1w_{1x\tau}+w_1w_{1xx}-w_{1x}^2+2\nu_0\zeta_1w_{1x\tau})_x$$
$$\nu_0\zeta_{3\tau}+\nu_2\zeta_{1\tau}+\nu_1\zeta_{2\tau}+w_{3x}+(w_1\zeta_2+w_2\zeta_1)_x=$$
$$=(\mu/6)[w_{3xx}+3\zeta_1w_{2xx}+3(\zeta_2+\zeta_1^2)w_{1xx}]_x$$
$$\nu_0w_{3\tau}+\nu_2w_{1\tau}+\nu_1w_{2\tau}+\zeta_{3x}+w_1w_{2x}+w_2w_{1x}=$$
$$=(\mu/2)[\nu_0w_{3x\tau}+\nu_2w_{1x\tau}+\nu_1w_{2x\tau}+w_1w_{2xx}+w_2w_{1xx}-2w_{1x}w_{2x}+$$
$$+2\zeta_1(\nu_0w_{2x\tau}+\nu_1w_{1x\tau}+w_1w_{1xx}-w_{1x}^2)+\nu_0w_{1x\tau}(2\zeta_2+\zeta_1^2)]_x$$

Для случая бегущей волны искомые коэффициенты разложения равны

$$w_1=\alpha_1 \cos (x-\tau), \quad \nu_0^2=(1+\mu/6)/(1+\mu/2)$$

$$\zeta_1=\beta_1 \cos (x-\tau), \quad \beta_1=\nu_0\alpha_1(1+\mu/2)$$

$$\nu_1=0, \quad w_2=\alpha_2 \cos 2(x-\tau), \quad \alpha_2=(\nu_0\alpha_1^2/4\mu)(1+\mu/2)(1+\mu^2/6)$$

$$\zeta_2=\beta_2 \cos 2(x-\tau), \quad \beta_2=(\alpha_1^2/4\mu)(1+7\mu/6+2\mu^2+25\mu^3/36+\mu^4/18)$$

$$4\nu_0\alpha_1(1+\mu/2)\nu_2=\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1+\mu[2\alpha_2\beta_1+(\alpha_1/2)(\beta_2+3\beta_1^2/2)]+$$

$$+2\nu_0[(\alpha_1\alpha_2/2)(1+9\mu/2)+2\beta_1(\alpha_1^2-2\nu_0\alpha_2)-\nu_0\alpha_1(\beta_2+3\beta_1^2/4)]$$

$$w_3=\alpha_3 \cos 3(x-\tau), \quad 16\mu\alpha_3/(1+\mu/2)=3(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)+$$

$$+3\mu[2\alpha_2\beta_1+(\alpha_1/2)(\beta_2+\beta_1^2/2)]+6\nu_0[(\alpha_1\alpha_2/2)(1+\mu/2)-4\nu_0\beta_1\alpha_2-\nu_0\alpha_1(\beta_2+\beta_1^2/4)]$$

$$\zeta_3=[\alpha_1\nu_2(1+\mu/2)-(\alpha_1\alpha_2/2)(1+9\mu/2)-2\beta_1(\alpha_1^2-2\nu_0\alpha_2)+\nu_0\alpha_1(\beta_2+3\beta_1^2/4)]\cos (x-\tau)+$$

$$+[\nu_0\alpha_3(1+9\mu/2)-(\alpha_1\alpha_2/2)(1+\mu/2)+4\nu_0\beta_1\alpha_2+\nu_0\alpha_1(\beta_2+\beta_1^2/4)] \cos 3(x-\tau)$$

Данное решение описывает волны большой высоты при наличии их дисперсии. При этом скорость распространения волны зависит от амплитуды. Имеет место асимметрия волны относительно невозмущенного уровня свободной поверхности, высота гребня больше ординаты наинизшей точки впадины.

Рассмотрим взаимодействие волн с вертикальной стенкой. Будем использовать условие непротекания через стенку, находящуюся в сечении $x=0$, в результате чего при периодическом во времени движении жидкости формируется стоячая волна.

Для случая стоячей волны искомые коэффициенты разложения равны

$$w_1=\gamma_1 \cos\tau \sin x, \quad \nu_0^2=(1+\mu/6)/(1+\mu/2)$$

$$\zeta_1=\delta_1 \sin\tau \cos x, \quad \delta_1=-\nu_0\gamma_1(1+\mu/2)$$

$$\nu_1=0, \quad w_2=\gamma_2 \sin 2\tau \sin 2x$$

$$8\mu\gamma_2=-\nu_0\gamma_1^2(1+\mu/2)(3+\mu^2/6)$$

$$\zeta_2=(a_2+b_2 \cos 2\tau) \cos 2x, \quad a_2=(\gamma_1^2/8)[1+2\mu(1+\mu/6)]$$

$$b_2=\nu_0\gamma_2(1+2\mu)+(\gamma_1^2/8)[1-2\mu(1+\mu/6)]$$

$$2\nu_0\gamma_1(1+\mu/2)\nu_2=-(a_{11}+\nu_0 b_{11})$$

$$w_3=\gamma_{31} \cos 3\tau \sin x+\gamma_{13} \cos\tau \sin 3x+\gamma_{33} \cos 3\tau \sin 3x$$

$$-\zeta_3=[\gamma_1\nu_2(1+\mu/2)+b_{11}] \sin\tau \cos x+[3\nu_0\gamma_{31}(1+\mu/2)+b_{31}] \sin 3\tau \cos x+$$

$$+(1/3)[\nu_0\gamma_{13}(1+9\mu/2)+b_{13}] \sin\tau \cos 3x+(1/3)[3\nu_0\gamma_{33}(1+9\mu/2)+b_{33}] \sin 3\tau \cos 3x$$

$$8(1+\mu/6)\gamma_{31}=-(a_{31}+3b_{31})$$

$$[9(1+3\mu/2)-\nu_0^2(1+9\mu/2)]\gamma_{13}=3a_{13}+b_{13}$$

$$3[1+3\mu/2-\nu_0^2(1+9\mu/2)]\gamma_{33}=a_{33}+b_{33}$$

$$a_{11}=(1/4)[-\gamma_2\delta_1(1+2\mu)-\mu\gamma_1\delta_1^2/8+\gamma_1(1+\mu/2)(2a_2+b_2)]$$

$$a_{31}=(1/4)[\gamma_2\delta_1(1+2\mu)+\mu\gamma_1\delta_1^2/8+\gamma_1(1+\mu/2)b_2]$$

$$a_{13}=(3/4)[-\gamma_2\delta_1(1+2\mu)-\mu\gamma_1\delta_1^2/8-\gamma_1(1+\mu/2)(2a_2+b_2)]$$

$$a_{33}=(3/4)[\gamma_2\delta_1(1+2\mu)+\mu\gamma_1\delta_1^2/8-\gamma_1(1+\mu/2)b_2]$$

$$b_{11}=(1/4)[\gamma_1\gamma_2(1+9\mu/2)+\mu(\gamma_1+9\nu_0\delta_1/8)\gamma_1\delta_1+\mu\nu_0(4\delta_1\gamma_2-\gamma_1 b_2+2\gamma_1 a_2)]$$

$$b_{31}=(1/4)[\gamma_1\gamma_2(1+9\mu/2)+\mu(\gamma_1-3\nu_0\delta_1/8)\gamma_1\delta_1+\mu\nu_0(-4\delta_1\gamma_2+\gamma_1 b_2)]$$

$$b_{13}=(3/4)[-\gamma_1\gamma_2(1-\mu/2)+\mu\nu_0(4\delta_1\gamma_2+3\gamma_1\delta_1^2/8+2a_2\gamma_1-b_2\gamma_1)]$$

$$b_{33}=(3/4)[-\gamma_1\gamma_2(1-\mu/2)+\mu\nu_0(\gamma_1 b_2-4\delta_1\gamma_2-\gamma_1\delta_1^2/8)]$$

Из приведенных выражений следует, что средний уровень ординаты свободной поверхности на стенке не совпадает с ее невозмущенным уровнем. Частота колебаний свободной поверхности, определяемая величиной ν, зависит как от μ, так и от амплитудного параметра ε в отличие от случаев первого и второго приближений, когда такая зависимость от ε еще не проявляется. В целом они описывают картину взаимодействия длинных волн большой высоты с вертикальной стенкой.

Построенные приближенные решения задач как для бегущих, так и для стоячих волн содержат нерегулярные части относительно параметра μ. Поэтому для сходимости процесса следует считать, что $(\varepsilon/\mu)<1$. Кроме того, дисперсионное соотношение линейного приближения определяет частоту как вещественную величину для всех значений μ. Это обстоятельство обусловит устойчивость процесса вычислений при рассмотрении задач с начальными возмущениями свободной поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. М.: Физматгиз, 1963, ч. 1. 583 с.
2. *Сретенский Л. Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
3. *Стокер Дж. Дж.* Волны на море. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 617 с.
4. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
5. *Friedrichs K. O.* On the derivation of the shallow water theory.— Commun. Pure Appl. Math., 1948, v. 1, № 1, p. 1–81.
6. *Keller J. B.* The solitary wave and periodic waves in shallow water.— Commun. Pure Appl. Math., 1948, v. 1, № 4, p. 323–339.
7. *Korteweg D. J., Vries G., de.* On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel, and on a new type of long stationary waves.— Philos. Mag., 1985, v. 39, № 420, p. 422–443.

Ленинград

Поступила в редакцию
20.IV.1984

УДК 533.6.011:536.423.4

ОДНОМЕРНАЯ СТАЦИОНАРНАЯ КОНДЕНСАЦИЯ ПРИ СКОРОСТЯХ ДВИЖЕНИЯ ПАРА, СОПОСТАВИМЫХ СО СКОРОСТЬЮ ЗВУКА

КРЮКОВ А. П.

Одномерная задача о стационарной конденсации одноатомного пара при скорости его движения значительно меньшей звуковой в настоящее время изучена достаточно полно.

Существенно меньше исследована нелинейная задача, когда скорость пара сопоставима со скоростью звука. Впервые такая ситуация изучалась в [1], где решалось модельное уравнение и были получены результаты для дозвуковых течений. Отношение температуры конденсируемого пара к температуре межфазной поверхности изменялось от 1,7 до 2,0, а отношение соответствующих плотностей – от 1,098 до 1,23. В [2] развит приближенный метод решения, результаты которого аппроксимировались зависимостью, подтвержденной экспериментальными исследованиями [3]. В [4, 5] рассматриваемая задача изучалась моментным методом. При этом максимальная величина отношения температуры конденсируемого пара к температуре границы раздела фаз составляла 2,3, а соответствующих давлений 3,1.

Процесс сверхзвуковой конденсации впервые рассматривался в [6] для числа Маха, равного 1,5. Там же обсуждались вопросы существования и единственности решения. В [7], продолжая [4], исследован ряд сверхзвуковых течений. В настоящей работе изложена схема решения задачи о конденсации моментным методом и представлены результаты, полученные для до- и сверхзвуковых скоростей в широком диапазоне изменения параметров конденсируемого пара.

Рассматривается течение одноатомного пара в полубесконечном пространстве $\infty>x>0$, x – координата, отсчитываемая по внешней нормали к межфазной поверхности. Конденсация происходит на плоскости $x=0$. Известны температура границы раздела фаз T_S, а следовательно, и соответствующая ей равновесная числовая плотность пара по кривой насыщения n_S и два газодинамических параметра вдали от поверхности конденсации, например среднемассовая скорость потока пара u_∞ и его температура T_∞. Поток движется в отрицательном по x направлении. Требуется определить скорость пара u, его температуру T и плотность n как функции x.

Изучение задачи осуществляется при помощи моментного метода решения кинетического уравнения Больцмана для максвелловских молекул. В рассматриваемом