

УДК 532.516

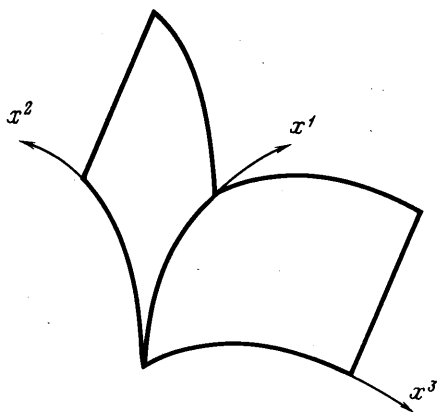
ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ВБЛИЗИ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ИСКРИВЛЕННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

ГУРЕВИЧ Ю. Г.

Течение вязкой жидкости вблизи линии пересечения искривленных поверхностей при больших числах Re представляет значительный интерес. Случай пересечения двух неподвижных плоскостей изучался во многих экспериментальных и теоретических работах. Он характеризуется очень малыми поперечными скоростями и отсутствием влияния угла на течение в далеке от него [1-4]. Течения вблизи пересекающихся искривленных поверхностей практически не исследованы, за исключением частного случая пересечения вогнутой цилиндрической поверхности и плоскости в потоке несжимаемой жидкости. На этом примере было показано, что кривизна качественно меняет картину течения не только вблизи линии пересечения, но и далеко от нее [5].

В данной статье рассматривается течение вязкой жидкости при $Re \gg 1$ вблизи линии пересечения произвольных, достаточно гладких поверхностей при наличии внешних массовых сил, а также в неинерциальной системе координат, связанной с обтекаемыми поверхностями (например, вращающиеся поверхности). На основе анализа уравнений Навье - Стокса и уравнения энергии при $Re \rightarrow \infty$ получены достаточные условия возникновения интенсивных поперечных течений вблизи линии пересечения, которые и приводят к качественному изменению картины течения; показано, что в зависимости от внешних сил и геометрических параметров поверхностей возможны различные типы течения; получены соотношения, определяющие возникновения того или иного типа течения, уравнения и необходимые граничные условия, описывающие некоторые из этих течений.

1. Пусть x^i - координата криволинейной неортогональной системы координат, в которой пересекающиеся поверхности описываются уравнениями $x^2=0$; $x^3=0$ (фиг. 1). Линия пересечения совпадает с одной из координатных линий x^1 , компоненты метрического тензора $g^{i3}=g^{i2}=0$.



Фиг. 1

Величины $h_i^2=g_{ii}$ и $h_2h_3 \cos \alpha=g_{23}$, α - угол между координатными поверхностями $x^2=\text{const}$; $x^3=\text{const}$, v - вектор скорости с компонентами $v^i=dx^i/dt$, а $u^i=v^ih_i$. Аналогично введены величины $f^i=F^ih_i$, где F^i - компонента вектора внешней массовой или инерционной силы. В выбранной системе координат $|F|=F^iF_hg_{ih}$

$$Re = \frac{u_\infty \rho_\infty L}{\mu_\infty}; \quad \mu = \frac{\mu^*}{\mu_\infty}; \quad \rho = \frac{\rho^*}{\rho_\infty}$$

$$p = \frac{p^*}{p_\infty}; \quad T = \frac{T^*}{T_\infty}; \quad Pr = \frac{\mu C_p}{k}; \quad t = \frac{t^* u_\infty}{L}$$

где k - коэффициент теплопроводности. Звездочкой обозначены размерные величины, индексом ∞ - параметры набегающего потока. Скорость отнесена к скорости набегающего потока, x^i - к линейному размеру задачи L , который принят равным ха-

ракетному радиусу R кривизны поверхностей. Характерные кривизны координатных линий и координатных поверхностей также порядка R .

В случае пересечения двух неподвижных плоскостей при отсутствии внешних сил составляющие скорости и градиента давления в поперечных направлениях малы и индуцируются вытесняющими эффектами. При этом справедливы следующие оценки [1-4]:

$$\Delta x^i \sim 1; u^i \sim 1; \Delta x^i \sim \text{Re}^{-1/2}; u^i \sim \text{Re}^{-1/2}$$

$$u^i \frac{\partial u^i}{\partial x^i} \sim 1, \quad u^i \frac{\partial u^j}{\partial x^i} \sim \text{Re}^{-1/2}, \quad \frac{\partial p}{\partial x^i} \sim o(\text{Re}^{-1/2}) \quad (i, j \neq 1)$$

где Δx^i — характерные масштабы координат x^i .

Предположим, что внешние массовые силы и кривизна поверхностей не меняют качественно структуру течения вблизи линии пересечения и оценки для величин Δx^i и u^i ($i \neq 1$) сохраняются такими же, как в случае пересечения плоскостей. Тогда уравнения движения по координатным направлениям x^2 и x^3 после пренебрежения в уравнениях Навье — Стокса малыми, стремящимися к нулю членами при $\text{Re} \rightarrow \infty$ примут вид

$$-c_{13}(u^1)^2 = -\frac{1}{M^2 \rho \kappa h_2} \frac{\partial p}{\partial x^2} + f_2$$

$$-c_{12}(u^1)^2 = -\frac{1}{M^2 \rho \kappa h_3} \frac{\partial p}{\partial x^3} + f_3 \quad (1.1)$$

где c_{ij} — геодезическая кривизна координатной линии x^i на координатной поверхности $x^j = \text{const}$. В уравнениях (1.1) $c_{1i} = c_{1i}(x^1)$; $h_i = h_i(x^1)$; $f_i = f_i(x^1, u^1)$, так как предполагается, что характерные масштабы изменения аргументов этих функций имеют порядок единицы.

Положим $\rho = \text{const}$. Приравняв перекрестные производные от давления, получим

$$\frac{\partial}{\partial u^1} [c_{12}(u^1)^2 + f_3] \frac{\partial u^1}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial u^1} [c_{13}(u^1)^2 + f_2] \frac{\partial u^1}{\partial x^3} = 0 \quad (1.2)$$

Если $\partial [c_{1i}(u^1)^2 + f_j] / \partial u^1 \neq 0$, то соотношение (1.2) выполняется только при $u^1 = \text{const}$ вдоль некоторых линий, пересекающих хотя бы одну из поверхностей $x^2 = 0$ или $x^3 = 0$, а, учитывая условие прилипания, $u^1 = 0$. Следовательно, течение в угловой зоне не может описываться уравнениями (1.1) и предположение о малости слагаемых $u^i \partial u^j / \partial x^i$ в уравнениях Навье — Стокса не верно ($i, j \neq 1$). Это позволяет сформулировать следующее достаточное условие возникновения интенсивных поперечных течений вблизи угла: если хотя бы одна из величин $B_j = [c_{1i}(u^1)^2 + f_j]$ зависит от u^1 ($i, j \neq 1, i \neq j$), то вблизи угла возникают интенсивные поперечные течения и $u^i \partial u^j / \partial x^i \gg 1$.

Поперечное течение в пограничном слое, например на поверхности $x^j = 0$, возникает из-за того, что градиент давления $\partial p / \partial x^i$ ($i, j \neq 1, i \neq j$) сохраняется поперек пограничного слоя, в то время как величины $c_{1j}(u^1)^2$ и f_i изменяется с изменением u^1 от значения скорости во внешнем потоке u_0 до 0 (координата x^1 направлена вдоль линии тока внешнего потока). Введем величину $D_i = B_i(x^1, x^i, u_0) - B_i(x^1, x^i, u^1)$. Если D_i не меняет знак в достаточно большой окрестности рассматриваемой точки на обтекаемой поверхности, то направление скорости поперечного течения в пограничном слое u^i определяется знаком величины D_i . Если $D_i > 0$, то $u^i < 0$ и при $D_i < 0$, $u^i > 0$. Случаи, когда D_i меняет знак в пограничном слое, в интервале $0 < u^1 < u_0$, не рассматриваются.

Предполагая, что изменение кривизны линии тока внешнего потока и функции f_i происходит достаточно плавно для того, чтобы направление поперечного течения определялось знаком D_i , и что область «углового течения» имеет размер δ , который мал по сравнению с характерным раз-

мером задачи R , получим, что направление поперечного течения в пограничном слое вблизи линии пересечения определяется знаком величины D_i , подсчитанным по геометрии линии пересечения. Тогда знаки пары величин D_i ($i=2, 3$), подсчитанных на линии пересечения для каждой из поверхностей, определяют следующие возможные типы течения вблизи угла: растекание из угла ($D_i < 0$), перетекание через угол (D_i разного знака), втекание в угол ($D_i > 0$).

Интересно отметить, что геодезическая кривизна линии пересечения и внешняя массовая сила, зависящая от продольной составляющей скорости (например, сила Кориолиса), качественно оказывают одинаковое влияние на возникновение того или иного типа течения вблизи угла.

2. Рассмотрим случай растекания от угла. Так как растекание возникает под действием поперечных градиентов давления $\partial p / \partial x^i \sim (u^1)^2 / c_{ij}$ или $\partial p / \partial x^i \sim f_i(u^1, x^1)$, то величина

$$u^i \frac{\partial u^j}{\partial x^i} \sim 1 \quad (i, j \neq 1) \quad (2.1)$$

Кроме того, предположим, что вблизи линии пересечения выполняются следующие условия: $u^1 \sim 1$; $\Delta x^1 \sim 1$; в продольном направлении вязкие силы порядка инерционных; силы вязкого взаимодействия жидкой частицы с обеими поверхностями одного порядка. Из этих условий для области углового течения получаются оценки

$$\varepsilon_2 \sim \varepsilon_3 \sim \text{Re}^{-1/2}; \quad \delta_2 \sim \delta_3 \sim \text{Re}^{-2/3}$$

где $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ — масштабы скоростей u^2 и u^3 , а δ_2 и δ_3 — масштабы координат $\Delta x^2, \Delta x^3$ соответственно.

При $\text{Pr} \sim 1$ для толщины температурного пограничного слоя получим $\delta_T \sim \text{Re}^{-2/3}$. Введем новые переменные и представим функции p и f^i в виде разложения по степеням Re

$$\begin{aligned} dx &= h_1 dx^1; & dy &= h_2 dx^2 \text{Re}^{2/3} \\ dz &= h_3 dx^3 \text{Re}^{2/3}; & u &= u^1; & v &= u^2 \text{Re}^{1/3} \\ w &= u^3 \text{Re}^{1/3}; & \rho &= \rho; & T &= T; & t &= t \\ p &= p^0 + \text{Re}^{-2/3} p_1 + O(\text{Re}^{-4/3}) \\ f^i &= f^{0i} + \text{Re}^{-1/3} f_1^i + O(\text{Re}^{-5/3}) \end{aligned}$$

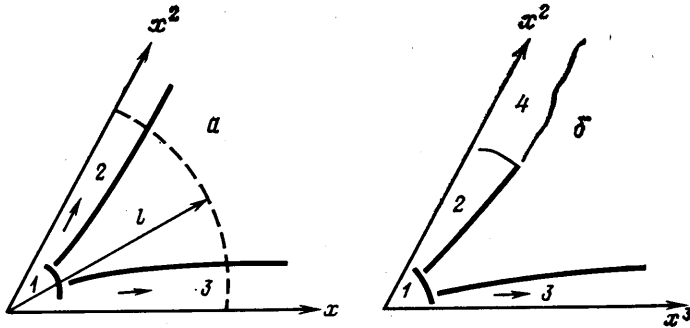
Пренебрегая малыми членами при $\text{Re} \rightarrow \infty$ в уравнениях Навье — Стокса, получим уравнения для области 1 на фиг. 2, а. Введя сокращенные обозначения для дифференциальных операторов, эти уравнения можно записать в виде

$$\begin{aligned} G \begin{pmatrix} u \\ H^* \end{pmatrix} &= B \begin{pmatrix} u \\ \text{Pr}^{-1} H^* + (\text{Pr}^{-1} - 1) H \end{pmatrix}; & \frac{\partial p^0}{\partial y} &= \frac{\partial p^0}{\partial z} = 0 \\ G \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} - \rho u^2 \begin{pmatrix} C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} &= \frac{1}{M^2 \kappa} \begin{pmatrix} v_v \\ v_z \end{pmatrix} p^1 + \begin{pmatrix} A_v + \sin^2 \alpha f^{02} \\ A_z + \sin^2 \alpha f^{03} \end{pmatrix} \\ & \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \\ G &= \rho \sin^2 \alpha \left(v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right); & v_v &= \frac{\partial}{\partial y} - \cos \alpha \frac{\partial}{\partial z} \\ B &= \frac{\partial}{\partial y} (\mu v_v) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu v_z) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$C_i = \left[\frac{1}{h_i h_1} \frac{\partial h_1}{\partial x^i} - \frac{\cos \alpha}{h_i h_j} \frac{\partial h_1}{\partial x^j} \right] \sin \alpha \quad (i, j=2, 3; i \neq j)$$

$$A_y = \frac{v_y}{3} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + 2v_z \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

Выражения для v_z и A_z получаются из соответствующих выражений для v_y и A_y путем циклической перестановки y с z и v с w .



Фиг. 2

Система уравнений (2.2), описывающая течение в угловой зоне в случае растекания из угла, обладает некоторыми характерными свойствами. В уравнениях движения отсутствуют слагаемые с производной по времени, т. е. течение квазистационарно. Течение в угловой зоне квазидвумерно — отсутствуют производные по x . При $Pr=1$ справедлив интеграл Крокко: если u — решение первого уравнения в (2.2), то $H^* = au + b$ — решение уравнения энергии. Благодаря отсутствию в первом уравнении движения градиента давления интеграл Крокко справедлив при любом распределении давления (a и b — константы).

В качестве граничных условий для уравнений (2.2) нужно использовать решения уравнений, описывающих течение в пограничных слоях на пересекающихся поверхностях.

К области 1 примыкают области 2 и 3 (см. фиг. 2, а), течение в которых описывается автомодельными уравнениями пограничного слоя, справедливыми вблизи острой кромки, совпадающей с линией тока внешнего потока [1, 6]. Асимптотическое сращивание решений уравнений (2.2) в области 1 с решением автомодельных уравнений в области 3 дает при $z \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} w(y, z) &\rightarrow w_3 \left(\frac{y}{z^{1/4}} \right) z^{1/2}, & v(y, z) &\rightarrow v_3 \left(\frac{y}{z^{1/4}} \right) z^{-1/4}, \\ u(y, z) &\rightarrow u_3 \left(\frac{y}{z^{1/4}} \right), & T(y, z) &\rightarrow T_3 \left(\frac{y}{z^{1/4}} \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь индексом 3 обозначены решения автомодельных уравнений пограничного слоя в области 3 на фиг. 2, а.

Аналогичное сращивание решений в области 1 с решениями в области 2 при $y \rightarrow \infty$ вместе с условиями для температуры и скоростей на обтекаемых поверхностях дает все необходимые граничные условия для решения уравнений (2.2). В окрестности угла на расстоянии l от него течение остается квазистационарным, квазидвумерным и выполняется интеграл

Крокко. Из решений уравнений пограничного слоя в областях 2 и 3 не трудно получить оценку: $l \sim Re^{-1/2}$.

Возможен случай, когда растекание от угла происходит вдоль одной из поверхностей (одна из величин $D_i = 0$, а другая меньше нуля). Он отличается тем, что между областью 1 и областью двумерного пограничного слоя 4 (фиг. 2, б) на поверхности, по которой нет растекания, расположена переходная область 2. Течение в ней развивается как бы под действием стока, распределенного вдоль линии пересечения, интенсивность которого определяется автомодельным решением в области 3. Задача о развитии течения в пограничном слое на искривленной поверхности под действием локального стока или другого локального возмущения представляет самостоятельный интерес и требует специального рассмотрения, которое здесь не приводится.

Рассмотренные случаи характеризуются тем, что распределение параметров потока вблизи угла необходимо для постановки граничных условий уравнений, описывающих формирование пограничного слоя на обеих или на одной из пересекающихся поверхностей. Иначе говоря, область влияния угла распространяется далеко от линии пересечения вдоль обтекаемых поверхностей. Основным результатом состоит в том, что этими граничными условиями являются решения автомодельных уравнений пограничного слоя на острой боковой кромке [1, 6]. Расчетные и экспериментальные исследования показывают, что влияние угла существенно и в ряде случаев качественно меняет характеристики пограничного слоя на обтекаемых поверхностях далеко от линии пересечения [7, 8]. Существенны также изменения в тепловом режиме течения по мере приближения к углу — сильное возрастание тепловых потоков при заданной температуре стенки или сильное изменение температуры стенки при заданном тепловом потоке.

3. В случае, когда пограничный слой «притекает» к углу вдоль одной или обеих поверхностей, профиль скорости в «притекающем» пограничном слое вблизи угла определяется течением в пограничном слое на всей поверхности и компонента скорости $u^i \sim 1$. Можно предположить, что уравнения пограничного слоя перестают выполняться на некотором расстоянии от угла $\delta \ll 1$, тогда из условия непротекания следует, что хотя бы одна из величин $\partial u^i / \partial x^j \sim 1 / \delta \gg 1$, а $\partial u^i / \partial x^i \ll 1$ ($j, i \neq 1$).

Это приводит к случаю интенсивных поперечных течений вблизи угла, где величина $u^i \partial u^j / \partial x^i \gg 1$ ($i, j \neq 1$) (см. п. 1). Оценки показывают, что течение в угловой области будет описываться уравнениями, в которые не входят производные по x^1 . При этом с точностью до членов малого порядка давление на внешней границе этой области постоянно, и задача о взаимодействии пограничных слоев вблизи угла сводится в каждом сечении $x^1 = \text{const}$ к задаче о натекании пристеночных струй на угол. Профили скорости взаимодействующих струй совпадают с профилями соответствующих компонент скорости в пограничном слое, а вязкость оказывается несущественной почти во всей области «углового течения». Подробно задача о натекании плоской пристеночной струи на угол рассмотрена в рамках асимптотической теории при $Re \rightarrow \infty$ в [9].

При натекании пограничного слоя на угол вдоль одной из поверхностей решение струйной задачи приводит к переносу без изменения профиля скорости пограничного слоя через угол с одной поверхности на другую. Развитие пограничного слоя на поверхности, по которой он оттекает от угла, определяется граничными условиями вдоль линии пересечения. В качестве таких граничных условий нужно задавать профили скорости из натекающего на угол пограничного слоя. Постановка такой задачи некорректна, если $D_i = 0$ вдоль поверхности, на которую пограничный слой натекает. Тогда необходимо рассматривать задачу о взаимодействии пограничного слоя с внешним потоком. Если пограничный слой притекает к углу по обеим поверхностям, то решение струйной задачи приводит к выносу завихренности из пристеночной области течения во внешний поток и задачу в целом также невозможно решить без учета взаимного влияния пристеночного и внешнего потоков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. М.: Физматгиз, 1962. 479 с.
2. Zamir M., Young A. D. Experimental investigation of the boundary layer in a streamwise corner. — Aeronaut. Quart., 1970, v. 21, № 4, p. 313–339.

3. *Rubin S. G., Grossman B.* Viscous flow along a corner: numerical solution of the corner layer equations.— *Quart. Appl. Math.*, 1971, v. 29, № 2, p. 169–186.
4. *Корнилов В. И., Харитонов А. М.* Некоторые особенности вязких течений в угловых конфигурациях.— В кн.: Исследования пристенных течений вязкого газа. Новосибирск, 1979, с. 45–58.
5. *Гуревич Ю. Г.* Пограничный слой в окрестности угла между вогнутой цилиндрической поверхностью и плоскостью.— *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1981, № 2, с. 160–165.
6. *Белянин Н. М., Шальман Е. Ю.* Ламинарный пограничный слой в закрученном потоке.— *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1976, № 1, с. 43–49.
7. *Френсис, Пирс.* Экспериментальное изучение турбулентных пограничных слоев со скосом в потоках с низкой скоростью.— *Теор. основы инж. расчетов*, 1967, т. 89, № 3, с. 161–174.
8. *Шальман Е. Ю.* Пограничный слой на круговом секторе.— *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1982, № 1, с. 35–41.
9. *Smith F. T., Duck P. W.* Separation of jets or thermal boundary layers from a wall.— *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, 1977, v. 30, № 2, p. 143–156.

Москва

Поступила в редакцию
24.XI.1983