МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 1985

УДК 533.6.011

ОСОБЕННОСТИ ТЕЧЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ТОРМОЖЕНИЯ ПРИ СВЕРХЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ ТЕЛ СТЕПЕННОЙ ФОРМЫ

КАРЛОВСКИЙ В. Н., ЛЕВИН В. А.

Тела степенной формы с образующей вида $y=x^\alpha$, $0{,}5<\alpha<1$, имеют в вершине вертикальную касательную (как тупые тела) и бесконечную кривизну (как острые). Сверхзвуковое обтекание осесимметричных тел со степенным продольным профилем изучалось в [1, 2], где на основании анализа большого количества численных расчетов сформулированы некоторые эмпирические законы подобия. Из этих соотношений следует, что положение и форма дозвукового участка ударной волны определяются не особенностью контура тела, а положением на теле звуковой точки и его «затупленностью» по отношению к конусу «критического» угла раствора.

В работе О. В. Титова[1] аналитически подтверждаются полученные в [1, 2] результаты, однако при этом делается предположение, что кривизна ударной волны и вторая производная кривизны по продольной криволинейной координате конечны в вершине. Это предположение накладывает ограничение на контур тела — при его выполнении кривизна обтекаемого профиля также получается конечной. Поэтому естественно рассмотреть случай, когда упомянутое предположение не выполняется.

В настоящей работе изучается обтекание тел степенной формы с ударными волнами, имеющими бесконечную кривизну в вершине и конечную кривизну, но бесконечную вторую производную кривизны по продольной координате.

1. Рассмотрим плоское или осесимметричное тело, обтекаемое равномерным сверхзвуковым потоком идеального газа с постоянным показателем адиабаты γ. Плотность и компоненты вектора скорости отнесены к значениям соответствующих параметров в невозмущенном потоке, а давление — к величине $\rho_\infty V_\infty^2$. Введем систему координат (φ, η), где φ — угол между касательной к ударной волне и вертикальной осью, η — координата, отсчитываемая по нормали к ударной волне (фиг. 1). В этих координатах уравнения газовой динамики и граничные условия на ударной волне имеют вид

$$uu_\varphi+v(R-\eta)u_\eta-uv=-\frac{p_\varphi}{\rho}$$

$$uv_\varphi+v(R-\eta)v_\eta+u^2=-(R-\eta)\frac{p_\eta}{\rho} \tag{1.1}$$

$$u\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right)_\varphi+v(R-\eta)\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right)_\eta=0,\qquad (\rho u y^\nu)_\varphi+(\rho v y^\nu(R-\eta))_\eta=0$$

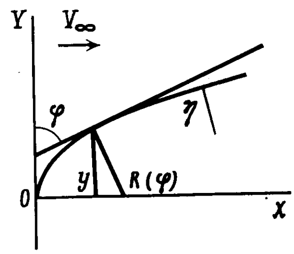
$$\rho(Q)=(\gamma+1)\left(\gamma-1+\frac{2}{M^2\cos^2\varphi}\right)^{-1},\qquad p(Q)=\frac{2}{\gamma+1}\left(\cos^2\varphi-\frac{\gamma-1}{2\gamma M^2}\right)$$

---

[1] *Титов О. В.* Приближенное аналитическое рассмотрение некоторых законов подобия в задаче сверхзвукового обтекания затупленных тел. М.: Ин-т механики МГУ, отчет № 2464, 1980.

$$u(Q)=\sin\varphi,\qquad v(Q)=\frac{1}{\gamma+1}\left[(\gamma-1)\cos\varphi+\frac{2}{M^2\cos\varphi}\right]$$

где u, v — компоненты вектора скорости по касательной и по нормали к ударной волне, $\nu=0$ и 1 для плоского и осесимметричного случаев соответственно, Q — точка на ударной волне, такая, что φ — острый угол.



Фиг. 1

Решение системы (1.1) будем искать в виде степенного ряда по координате η: $f(\varphi,\eta)=f_0(\varphi)+\eta f_1(\varphi)$, где f — одна из функций p, ρ, u, v. Тогда получим ($\nu=0$)

$$Ku_0\frac{du_0}{d\varphi}+v_0u_1-Ku_0v_0=-\frac{K}{\rho_0}\frac{dp_0}{d\varphi}\tag{1.2}$$

$$v_0v_1+\frac{p_1}{\rho_0}=K\left(-u_0\frac{dv_0}{d\varphi}-u_0^2\right)\tag{1.3}$$

$$v_0p_1-\rho_1\frac{\gamma v_0p_0}{\rho_0}=K\left(\frac{\gamma p_0u_0}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{d\varphi}-u_0\frac{dp_0}{d\varphi}\right)\tag{1.4}$$

$$\rho_0v_1+\rho_1v_0=K\left[\rho_0v_0-\frac{d}{d\varphi}(\rho_0u_0)\right]\tag{1.5}$$

В случае $\nu=1$ уравнения (1.2) — (1.4) не изменяются, а уравнение (1.5) принимает вид

$$\rho_1v_0+\rho_0v_1=K\left[\rho_0v_0-\frac{d}{d\varphi}(\rho_0u_0)\right]-\rho_0(u_0\cos\varphi-v_0\sin\varphi)\left[K\int_0^{\varphi}R\cos\varphi\,d\varphi\right]^{-1}\tag{1.6}$$

Здесь и далее $K(\varphi)=1/R$ — кривизна ударной волны. Функции с индексом 0 известны из граничных условий на ударной волне, а неизвестные функции с индексом 1 находятся решением системы алгебраических уравнений (1.2) — (1.5) или (1.2) — (1.6)

$$v_1=\frac{4K\cos\varphi\operatorname{tg}^2\varphi}{(\gamma+1)(1-H)}-\frac{4K(\gamma-0,5(\gamma-1)H)E^{\nu}(\varphi)}{(\gamma+1)^2}\tag{1.7}$$

$$u_1=2K\sin\varphi\frac{\gamma-3+(\gamma+5)H}{(\gamma+1)(\gamma-1+2H)};\quad E(\varphi)=1+\sin\varphi\left/K\int_0^{\varphi}R\cos\varphi\,d\varphi\right.^{-1};\tag{1.8}$$

$$H=\frac{1}{M^2\cos^2\varphi}$$

Функции p_1, ρ_1 представляются аналогичными, но более громоздкими формулами.

Уравнение, выражающее условие непротекания, имеет вид

$$K(\varphi)\frac{d\delta}{d\varphi}=\frac{(1-K\delta)v}{u}\tag{1.9}$$

где зависимость $\eta=\delta(\varphi)$ задает контур тела.

2. Пусть в декартовых координатах продольный профиль поверхности ударной волны задается формулой $y=x^\alpha$ $(0{,}5<\alpha<1)$. В окрестности вершины ударной волны такой формы $R(\varphi)$ представимо в виде

$$R(\varphi)=C\varphi^\beta+O(\varphi^{\beta+2}),\qquad \beta=\frac{2\alpha-1}{1-\alpha},\qquad C=\frac{\alpha^{1/(1-\alpha)}}{1-\alpha}=\frac{(\beta+1)^{\beta+2}}{(\beta+2)^{\beta+1}}$$

Подставим найденную функцию $K(\varphi)$ в формулы для скоростей (1.7), (1.8). Поскольку кривизна $K(\varphi)\to\infty$ при $\varphi\to0$, то решение в виде степенного ряда по координате η нельзя продолжить в сколь угодно малом круге, содержащем вершину ударной волны. Следовательно, ударная волна с бесконечной кривизной в вершине может быть только присоединенной. Заметим, что, хотя $R(\varphi)\to0$ при $\varphi\to0$, якобиан преобразования от (φ,η) к (x,y) не обращается в нуль при $y\geqslant0$.

Для асимптотического определения формы тела, находящегося за волной степенной формы, исследуем уравнение (1.9) в окрестности его особой точки $\varphi=0$. Подставив в это уравнение значения u_0, v_0, u_1, v_1, $R(\varphi)$ и, выделив главные члены, после некоторых преобразований получим

$$\beta\frac{d\delta^\circ}{d\varphi}=\frac{(q-\delta^\circ)(Lq+F\delta^\circ)+O(q^{2/\beta})}{q(q+G\delta^\circ)+O(q^{1+2/\beta})}$$

$$\delta=C\delta^\circ,\qquad \varphi=q^{-\beta}\tag{2.1}$$

где L, F, G — многочлены от γ и M.

В полярных координатах $\delta^\circ=r\sin\psi$, $q=r\cos\psi$, опустив члены более высокого порядка по r, преобразуем (2.1) к виду

$$\frac{dr}{d\psi}\left[\beta\operatorname{tg}\psi-\frac{(1-\operatorname{tg}\psi)(L+F\operatorname{tg}\psi)}{1+G\operatorname{tg}\psi}\right]=-r\left[\beta+\operatorname{tg}\psi\frac{(1-\operatorname{tg}\psi)(L+F\operatorname{tg}\psi)}{1+G\operatorname{tg}\psi}\right]\tag{2.2}$$

Найдем особые направления, т. е. лучи, входящие в начало координат и являющиеся решениями (2.2)

$$A_{1,2}=\frac{1}{2(\beta G+F)}\left(-(\beta+L-F)\pm\sqrt{D}\right),\qquad A=\operatorname{tg}\psi,$$

$$D=(\beta+L-F)^2+4L(\beta G+F)$$

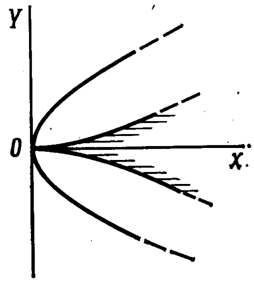
При $\nu=0$ и 1 функция $D(\gamma, M, \beta)$ такова, что для $\beta>0$, $1<\gamma<2$, $M>1$ всегда $D>0$, т. е. существует два действительных различных особых направления. Функция, обозначенная в (2.1) как $O(q^{2/\beta})$, удовлетворяет условию: для любого фиксированного β существует $\mu>0$ такое, что $O(r^{2/\beta})/r^\mu\to0$ при $r\to0$, где r — полярный радиус. Тогда относительно полного уравнения (2.1) можно утверждать следующее (см. [3, с. 98]): любое решение этого уравнения, входящее в его особую точку (0, 0), есть либо спираль, либо оно входит в начало координат по направлению, определяемому лучом $\delta^\circ=A_1q$ или $\delta^\circ=A_2q$. Чтобы решение имело физический смысл, необходимо: $A_{1,2}<1/(\beta+1)$.

Проверка этого условия проводилась численно при $\gamma=1{,}4$. В широком диапазоне изменения β и M показано, что $A_1<1/(\beta+1)$, а $A_2>1/(\beta+1)$, где A_1 является тем корнем уравнения, которому соответствует знак плюс. С точностью до малых более высокого порядка по x контур тела в явном виде задается функцией

$$y=C^{-1/\beta}A_1^{-1-1/\beta}\left(\frac{1}{\beta+1}-A_1\right)x^{1+1/\beta}$$

Так как $\beta>0$, то $dy/dx\to0$ при $x\to0$ (см. фиг. 2).

Таким образом, ударной волне с бесконечной кривизной в вершине локально соответствует присоединенное заостренное тело. Найденная здесь форма волны для заостренных тел представляет собой так называемое второе решение. Первым для таких тел является висячий скачок уплотнения. Как известно, при обтекании бесконечного клина теория предсказывает два решения. Второе соответствует ударной волне с большим углом наклона к оси клина и при уменьшении угла раствора клина до нуля переходит в прямой скачок на бесконечно тонкой пластине. Ударная волна степенной формы занимает промежуточное положение между вторым решением на клине (конусе) и прямым скачком на пластине (игле) — она имеет вертикальную касательную к вершине, но так сильно искривлена, что линии тока за волной в окрестности ее вершины расходятся в разные стороны от плоскости (оси) симметрии. Этот результат согласуется с [4], где также изучаются ударные волны с бесконечной кривизной в передней точке и сделан вывод, что такие волны могут быть только присоединенными.



Фиг. 2

3. Пусть в окрестности вершины ударная волна задается функцией вида

$$R(\varphi)=R(0)+A\varphi^s, \quad 0<s<2 \tag{3.1}$$

т. е. имеет конечную кривизну, но бесконечные производные кривизны по φ, начиная с первой или второй. Исследуем контур тела в окрестности точки торможения в зависимости от A, s, $R(0)$. Из (1.9) с учетом (1.8), (1.7)

$$\frac{d\delta}{d\varphi}K=\frac{(1-\delta K)\cos\varphi[L_1-4K\delta E^\nu F_1+4K\delta \operatorname{tg}^2\varphi(1-H)^{-1}]}{\sin\varphi(\gamma+1+2K\delta G_1 L_1^{-1})} \tag{3.2}$$

где L_1, G_1, F_1 — функции γ и M, а $K(\varphi)$ определяется (3.1). Величину отхода $\delta(0)$ определим как корень уравнения $v_0+\delta v_1(0)=0$. Уравнение (3.2) имеет особенность типа 0/0 в точке торможения $(0, \delta(0))$. Для исследования этой особенности вместо $\delta(\varphi)$ введем новую функцию $\delta^*(\varphi)$

$$\delta^*(\varphi)=\delta(\varphi)-\frac{1}{K(\varphi)}(\gamma+1)\left(\gamma-1+\frac{2}{M^2}\right)\left(2^{\nu+2}\left(\gamma-\frac{\gamma-1}{2M^2}\right)\right)^{-1} \tag{3.3}$$

В переменных (φ, δ^*) уравнение (3.2) имеет особенность в начале координат.

Физический смысл имеют только те решения (3.2), которые входят в особую точку, причем под определенным углом. Поэтому при малых φ можно считать $\delta^*(\varphi)$ малой величиной. Подставив в (3.2) $\delta^*(\varphi)$ из (3.3) и $R(\varphi)$ из (3.1), при малых φ получим (пока $\nu=0$)

$$\frac{d\delta^*}{d\varphi}=V\frac{\delta^*}{\varphi}(1+O(\varphi))+sAZ\varphi^{s-}+O(\varphi)+\frac{O(\delta^{*2})}{\varphi} \tag{3.4}$$

$$V=V(\gamma, M),\ Z=Z(\gamma, M^2)$$

Если ограничиться главными по φ членами (3.4), то его общее решение

$$\delta^*=T\varphi^V e^{I(\varphi)}+\varphi^V e^{I(\varphi)}\int\limits_0^\varphi \varphi^{-V}e^{-I(\varphi)}(sAZ\varphi^{s-1}+O(\varphi))\,d\varphi$$

где $I(\varphi)$ — некоторый многочлен от φ, причем $I(0)\neq 0$, T — произвольная константа. Будем считать, что $M>M_0=2\sqrt{\gamma/(4\gamma-\gamma^2+1)}$ (для $\gamma=1{,}4$ $M_0=1{,}09$). Тогда $V<0$ и в особую точку входит единственное решение δ_1^*, а именно то, где $T=0$. Решение полного уравнения (3.4) будем искать в виде $\delta^*=\delta_1^*+\sigma$. Пренебрегая степенями σ выше первой, получим уравнение для σ, решение которого, входящее в особую точку, единственно и имеет асимптотику $\sigma_1\sim\varphi^{2s}$.

Таким образом, контур тела, перед которым волна локально задается (3.1), имеет в первом приближении форму $\delta^*=AZs/(s-V)\varphi^s$. Для случая $\nu=1$ уравнение, аналогичное (3.4), будет иметь вид

$$\frac{d\delta^*}{d\varphi}=V_1\frac{\delta^*}{\varphi}(1+O(\varphi^s,\varphi))+AY\varphi^{s-1}(1+O(\varphi^s,\varphi))+\frac{O(\delta^{*2})}{\varphi}$$

$$V_1=V_1(\gamma,M),\quad Y=Y(\gamma,M)$$

Если принять $M>M_0=\sqrt{(6\gamma+2)/(-\gamma^2+8\gamma+1)}$ (для $\gamma=1{,}4$ $M_0=1{,}05$), то $V_1<0$, а $Y>0$ для любого γ и $s>0$. Аналогично случаю $\nu=0$ получим, что с точностью до малых более высокого порядка по φ контур осесимметричного тела задается функцией $\delta^*\sim\varphi^s$.

В координатах (x, y) в первом приближении имеем

$$\frac{y}{R(0)}=\left(\frac{R(0)}{A}\right)^{1/s}(1-Z_1)\left(Z_1+\frac{Y}{s-V_1}\right)^{-1/s}\left(\frac{x}{R(0)}-Z_1\right)^{1/s}\qquad(3.5)$$

Формула (3.5) представляет широкий класс контуров степенной формы. Если $0<s<1$, это заостренные тела ($dy/dx\to 0$ при $x\to 0$), при $s=1$ — это конус, причем угол раствора может быть любым в зависимости от $R(0)$ и A. Если же $1<s<2$, то (3.5) описывает степенной затупленный профиль с бесконечной кривизной в вершине, а профиль ударной волны имеет конечную кривизну в вершине и бесконечные производные по координате вдоль волны, начиная только с четвертой. Таким образом, профиль ударной волны является более гладкой кривой, чем профиль тела. Этот вывод согласуется с [2, 5]. Если положить $s=2$, то $R''(0)$ конечна и обтекаемое тело имеет конечную кривизну в вершине.

Заметим, что проведенное выше исследование контура тела и течения в его окрестности является локальным. Форма ударной волны в окрестности носика, вообще говоря, определяется профилем всей дозвуковой части обтекаемого тела; поэтому на полученные результаты следует смотреть, как на возможные случаи формирования ударных волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Радвогин Ю. Б.* Параметры, определяющие форму дозвукового участка ударной волны при осесимметричном обтекании.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1976, № 4, с. 77—83.
2. *Радвогин Ю. Б.* Зависимость отхода ударной волны от числа Маха набегающего потока.— Докл. АН СССР, 1974, т. 215, № 5, с. 1063—1066.
3. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.— Л.: Гостехиздат, 1949. 550 с.
4. *Шифрин Э. Г.* О течениях с дозвуковой особенностью на ударной волне.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 4, с. 149—152.
5. *South J. C., Jr.* New features of the method of integral relations for the blunt body problem.— AIAA Journal, 1969, v. 7, № 2, pp. 369—371. (Рус. перев.: *Саут, мл.* Новые особенности метода интегральных соотношений в задаче об обтекании затупленного тела.— Ракетная техника и космонавтика, 1969, т. 7, № 2, с. 232—234.)

Москва

Поступила в редакцию
18.I.1984