МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 1985

УДК 532.591

РЕЛАКСАЦИЯ МАЛОГО ЛОКАЛЬНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПРИБЛИЖЕНИИ СТОКСА

ЧИВИЛИХИН С. А.

В работе исследуется апериодический режим релаксации малого локального возмущения плоской поверхности вязкой несжимаемой жидкости бесконечной глубины под действием силы тяжести и поверхностного натяжения. Описание проводится в стоксовом приближении [1]. Последнее накладывает, как показано в работе, ограничения на пространственный спектр рассматриваемых возмущений. Получено уравнение, описывающее затухание отдельных фурье-гармоник возмущения формы поверхности. Показано, что объем возмущения обращается в нуль за времена, малые по сравнению с характерным временем затухания возмущения. В коротковолновом пределе закон эволюции возмущения допускает простую геометрическую интерпретацию. При больших временах поверхность приобретает автомодельную, частично упорядоченную форму. Указанное явление иллюстрируется с помощью численного эксперимента.

Идея использования безынерционного приближения для расчета волн на поверхности жидкости с высокой вязкостью была высказана в [2]. Релаксация гармонического возмущения в этом приближении рассмотрена в [3]. Этот подход применяется также при исследовании течения тонких пленок жидкости [4]. Процесс самоупорядочения формы поверхности вязкой жидкости при наличии массового потока на границе описан в [5, 6].

1. Исследуем эволюцию малого локального возмущения формы поверхности жидкости вида $z=h(\mathbf{x}, t)$, где вектор $\mathbf{x}$ с компонентами (x_1, x_2) принадлежит невозмущенной поверхности, а ось z направлена вдоль внешней нормали к ней. Жидкость будем считать несжимаемой, изотермической и заполняющей в невозмущенном состоянии полупространство $z\leqslant 0$. Описание течения жидкости будем проводить в квазистационарном приближении [1]. Уравнения движения и неразрывности для жидкости, учитывая принятые предположения, запишем в виде

$$\Delta \mathbf{u} = \frac{1}{\mu} \nabla \Pi, \qquad \operatorname{div} \mathbf{u}=0$$

$$\Pi=P-\rho g z, \quad \mathbf{u}=(u_z,\ u_1,\ u_2) \tag{1.1}$$

Здесь u_z, u_1, u_2 — нормальная и касательные компоненты скорости, P — давление, g — ускорение свободного падения, ρ — плотность, μ — вязкость, σ — коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

Отметим, что в уравнении движения отсутствует член с производной по времени, что связано с принятым выше предположением о квазистационарности течения. Условие применимости такого предположения рассмотрено в п. 2.

Граничные условия, выражающие непрерывность нормальных и касательных напряжений на свободной поверхности, в линейном по h приближении принимают вид

$$\left(\Pi-2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=0} = -\sigma\frac{\partial^2 h}{\partial x_\beta\,\partial x_\beta}, \qquad \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x_\alpha}\right)\Bigg|_{z=0} = 0 \tag{1.2}$$

Здесь и далее α, $\beta=1, 2$; по повторяющимся индексам предполагается суммирование. Потребуем также выполнения условий

$$u_z|_{z\to-\infty}=0, \quad u_\alpha|_{z\to-\infty}=0, \quad \Pi|_{z\to-\infty}=0 \tag{1.3}$$

Решая задачу (1.1)—(1.3), можно по заданной форме поверхности $h(\mathbf{x}, t)$ рассчитать в данный момент времени поле скоростей и давлений. Для определения закона изменения формы поверхности запишем дополнительное граничное условие

$$u_z|_{z=0}=\partial h/\partial t \tag{1.4}$$

при выводе которого использовано предположение о малости h и его производных $\partial h/\partial x_\alpha$. Левая часть (1.4) является функционалом относительно h, поэтому все выражение можно рассматривать как уравнение для определения $h(\mathbf{x}, t)$. Поскольку время входит в (1.1)—(1.3) лишь параметрически, начальные условия следует ставить только к уравнению (1.4)

$$h|_{t=0}=h_0(\mathbf{x}) \tag{1.5}$$

Аналогичная математическая конструкция описана в [7].

Применяя к (1.1)—(1.3) преобразование Фурье по продольным координатам

$$f_\mathbf{k}=\int d^2x\, e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \tag{1.6}$$

и решая полученную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, находим

$$\begin{pmatrix} u_{z\mathbf{k}} \\ u_{\alpha\mathbf{k}} \\ \Pi_\mathbf{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kz-1 \\ ik_\alpha z \\ 2\mu k \end{pmatrix} \frac{\sigma k^2+\rho g}{2\mu k} h_\mathbf{k} e^{kz} \tag{1.7}$$

Видно, что влияние Фурье-компоненты $h_\mathbf{k}$ сказывается в слое глубиной k^{-1}.

Отметим, что однозначную связь между характеристиками течения жидкости и формой ее поверхности типа (1.7) невозможно установить вне рамок квазистационарного приближения [8—10].

2. Применяя (1.6) к (1.4), (1.5) и используя (1.7), находим уравнение эволюции возмущения в виде

$$\frac{dh_\mathbf{k}}{dt}+\frac{1}{2\mu k}(\sigma k^2+\rho g)h_\mathbf{k}=0$$
$$h_\mathbf{k}|_{t=0}=h_{\mathbf{k}0} \tag{2.1}$$

Видно, что отдельные гармоники $h_\mathbf{k}$ затухают независимо друг от друга по закону

$$h_\mathbf{k}=h_{\mathbf{k}0}\exp\left[-\frac{t}{\tau(k)}\right], \quad \tau(k)=\frac{2\mu k}{\sigma k^2+\rho g} \tag{2.2}$$

где $\tau(k)$ — характерное время затухания соответствующей гармоники. При $k=k_*=\sqrt{\rho g/\sigma}$ τ принимает свое максимальное значение: $\tau_*=\mu(\rho g\sigma)^{-1/2}$. При $k/k_*\to 0$ и $k/k_*\to\infty$ время затухания стремится к нулю за счет силы тяжести и поверхностного натяжения соответственно. Учитывая, что

$$h_\mathbf{k}|_{\mathbf{k}=0}=\int d^2x\, h(\mathbf{x}, t)$$

представляет собой «объем возмущения», видим, что эта величина, вообще говоря, отличная от нуля для начального возмущения, мгновенно становится (и в дальнейшем поддерживается) равной нулю. Мгновенность этого процесса определяется использованием в расчетах приближения Стокса. Получим теперь условие применимости этого приближения в рассматриваемой задаче. Сравнение с точным решением [2, 11] показывает, что при

$$\tau(k) \gg (2\nu k^2)^{-1} \tag{2.3}$$

где ν — кинематическая вязкость жидкости, время затухания действительно определяется полученным выше выражением. Однако одновременно существует и вторая ветвь с характерным временем затухания $\tau'(k) \sim \sim 1/(\nu k^2)$, ответственная за инерционные свойства течения. Отбрасывая на основании (2.3) эту вторую, быстро затухающую ветвь, осуществляем сингулярное возмущение уравнений движения по временно́й переменной, что и соответствует приближению Стокса. Вводя безразмерную величину $\varkappa = k/k_*$, заменим (2.3) на требование $\varkappa \gg \varkappa°$, где $\varkappa°$ — наибольший корень уравнения

$$\Lambda\varkappa^3 - \varkappa^2 - 1 = 0, \qquad \Lambda = 2k_*\tau_*\nu = \frac{2\rho\nu^2}{\sigma}\sqrt{\frac{\rho g}{\sigma}} \tag{2.4}$$

Безразмерный параметр Λ — величина большая по сравнению с единицей для многих вязких жидкостей (глицерин, расплавы стекол, жидкая вулканическая лава) и ряда суспензий. С помощью диаграммы Ньютона [12] можно показать, что при $\Lambda \to \infty$ $\varkappa° = \Lambda^{-1/3}$ и условие (2.3) принимает вид

$$k \gg k° = \Lambda^{-1/3} k_* \tag{2.5}$$

Если основная часть спектра начального возмущения лежит в области, удовлетворяющей (2.5), то предложенное описание релаксации возмущения в основном верно. Однако предельный переход $k \to 0$, который использован выше при получении утверждения о мгновенности зануления объема возмущения, строго говоря, запрещен. При $k \simeq k°$ обе ветви коэффициента затухания сливаются, и при меньших значениях k остается только вторая ветвь, которая одновременно приобретает мнимую составляющую $1/\tau'(k) = 2\nu k^2 \pm i\sqrt{kg}$ $(k \to 0)$.

Таким образом, при $k \to 0$ $\tau'(k) \to \infty$. Однако лишь при $k < \Lambda^{-1/2} k_*$ время затухания становится соизмеримым и превосходит τ_*. Поскольку основная часть спектра по предположению лежит в области $k \gg k° = \Lambda^{-1/3} k_*$, то амплитуда долгоживущих длинноволновых возмущений является пренебрежимо малой. Можно сказать, что за времена порядка $\tau(k°) = 2\Lambda^{-1/3}\tau_*$ становится равным нулю объем возмущения, но не по отношению к уровню невозмущенной жидкости, а относительно медленно затухающей системы бегущих волн малой амплитуды.

3. Требование $\Lambda \gg 1$, выполняющееся лишь для высоковязких жидкостей, не является обязательным для применимости приближения Стокса в рассматриваемой задаче. Уравнение (2.4) имеет положительные решения при любых значениях Λ. При $\Lambda \ll 1$, что верно для большинства жидкостей, $\varkappa° = \Lambda^{-1}$ и условие (2.3) принимает вид

$$k \gg k° = \Lambda^{-1} k_* \tag{3.1}$$

В этом случае в области допустимых волновых чисел $\tau(k) = 2\mu/(\sigma k)$, что соответствует доминированию силы поверхностного натяжения над силой тяжести. Однако соответствующая длина волны $\lambda° = 2\pi/k°$ может оказаться весьма малой. Так, для воды при нормальных условиях $\lambda° = 5 \cdot 10^{-7}$ м. Такие волны могут представлять интерес при описании релаксационных свойств поверхности капель, образующихся в процессе конденсации, что, естественно, потребует соответствующей доработки теории. Отсутствие максимума $\tau(k)$ в области, соответствующей (3.1), делает невозможным эффекты, описанные в п. 4. Однако в коротковолновом пределе при $k \gg k_*$ уравнение эволюции (2.1) приобретает новые интересные свойства. В этом случае его можно записать в виде

$$dh_k/dt + {}^1/{}_2\sigma\mu^{-1}kh_k = 0 \tag{3.2}$$

что позволяет перейти в координатное представление

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}+\frac{\sigma^2}{4\mu^2}\frac{\partial^2 h}{\partial x_\beta\,\partial x_\beta}=0 \tag{3.3}$$

Уравнение (3.3) инвариантно относительно инверсии времени, поэтому кроме затухающих во времени решений оно имеет и растущие. Исключение этих нефизичных решений происходит за счет задания кроме начальной формы границы (1.5) начального распределения скорости ее движения

$$\left.\frac{\partial h}{\partial t}\right|_{t=0}=-\frac{\sigma}{2\mu}\sqrt{-\frac{\partial^2}{\partial x_\beta\,\partial x_\beta}}\,h_0(\mathbf{x})=\frac{\sigma}{4\pi\mu}\int\frac{d^2x'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\frac{\partial^2 h_0(\mathbf{x}')}{\partial x_\beta'\,\partial x_\beta'} \tag{3.4}$$

вытекающего из (3.2). Использованный здесь псевдодифференциальный оператор $\sqrt{\partial^2/\partial x_\beta\partial x_\beta}$ рассмотрен, например, в [13]. Вводя вместо времени новую переменную размерности длины $\theta=\sigma t/(2\mu)$, видим, что (3.3) представляет собой условие нулевой кривизны поверхности $z=h(\mathbf{x},\,\theta)$ в пространстве $(z,\,x_1,\,x_2,\,\theta)$, натянутой на кривые $z=h_0(\mathbf{x})$, $\theta=0$; $z=0$, $\theta\to\infty$.

4. Возвращаясь к случаю произвольных волновых чисел, изучим асимптотическое при $t\to\infty$ поведение возмущения поверхности. Из (2.1) видно, что рассматриваемая система ведет себя как своеобразный фильтр, «вырезая» из всего спектра пространственных частот начального возмущения $h_{\mathbf{k}0}$ полосу в окрестности k_*, причем характерная ширина этой полосы $\Delta k(t)=k_*\sqrt{\tau_*/t}$ убывает со временем, что приводит к частичному упорядочиванию формы поверхности. Для того чтобы исследовать это явление в явном виде, переведем (2.1) в координатное представление

$$h(\mathbf{x},t)=\int d^2x'G(\mathbf{x}-\mathbf{x}',t)\,h_0(\mathbf{x}') \tag{4.1}$$

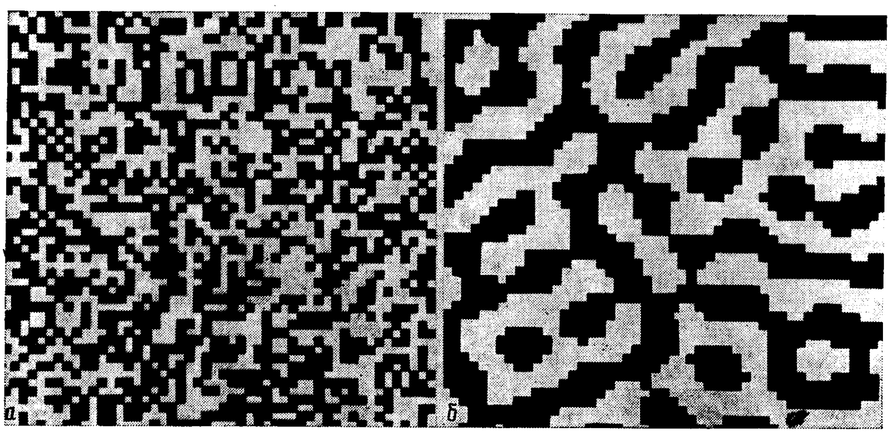
$$G(\mathbf{x},t)=\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\exp\left(i\mathbf{k}\mathbf{x}-\frac{t}{\tau(k)}\right)=\int_0^\infty\frac{kdk}{2\pi}\exp\left(-\frac{t}{\tau(k)}\right)J_0(k|\mathbf{x}|) \tag{4.2}$$

Здесь $J_0(\mathbf{x})$ — функция Бесселя нулевого порядка.

Функция $G(\mathbf{x},\,t)$ представляет собой фундаментальное решение задачи Коши (1.4), (1.5). При $t\gg\tau_*$

$$G(\mathbf{x},t)=\sqrt{\frac{\tau_*}{2\pi t}}\exp\left(-\frac{t}{\tau_*}-k_*^2\tau_*\frac{|\mathbf{x}|}{2t}\right)J_0(k_*|\mathbf{x}|) \tag{4.3}$$

Граница области, в которой G существенно отлична от нуля, расширяется со временем по закону $x_*=\sqrt{2Dt}$, где $D=(2k_*^2\tau_*)^{-1}$ представляет со-



бой эффективный коэффициент диффузии возмущения. Возвращаясь к условию (2.5), видим, что входящий в него большой параметр $\Lambda=\nu/D$ представляет собой диффузионное число Прандтля рассматриваемой задачи. Рост x_* со временем позволяет определить эффективную скорость границы области, занятой возмущением $v_*=\dot{x}_*=D/x_*$. Тогда можно ввести эффективное число Рейнольдса $\mathrm{Re}_*=v_*x_*/\nu=\Lambda^{-1}$, малость которого обеспечивается условием $\Lambda\gg1$.

Отметим, что тождество $\Delta kx_*=1$ представляет собой обычную связь между пространственными и спектральными размерами волнового пакета и не связано с физической природой рассматриваемых волн. С этой точки зрения рост x_* со временем определяется описанной выше пространственной фильтрацией, т. е. все большей локализацией k в окрестности k_*.

При $t\gg\tau_*$ и одновременно $x_*\gg L$ (где L — характерный пространственный размер области начального возмущения) пространственные и временные переменные в $G(\mathbf{x}, t)$ факторизуются. Тогда (4.1) можно записать в виде

$$h_\infty(\mathbf{x},t)=\sqrt{\frac{\tau_*}{2\pi t}}\exp\left(-\frac{t}{\tau_*}\right)\int d^2x' J_0(k_*|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)h_0(\mathbf{x}') \tag{4.4}$$

Итак, при $t\gg\max(\tau_*, L^2/2D)$ форма возмущения поверхности становится автомодельной и меняется лишь амплитуда возмущения. При произвольном распределении пространственных гармоник начального возмущения в (4.4) входят лишь гармоники с модулем волнового вектора, равным k_*, угловое же их распределение остается произвольным, чем и определяется частичная упорядоченность возникающей структуры.

Для иллюстрации указанного явления был проделан численный эксперимент, при котором в качестве начального возмущения были взяты значения, выдаваемые генератором случайных чисел. На фигуре, *а*, *б* представлены соответственно начальная $h_0(\mathbf{x})$ и асимптотическая $h_\infty(\mathbf{x}, t)$ формы поверхности, причем темные области соответствуют значениям h_0, $h_\infty>0$. Из рисунка видно, что асимптотическая форма поверхности представляет собой частично упорядоченную по линейным масштабам устанавливающихся волн структуру.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хаппель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с.
2. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.— Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
3. *Левич В. Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
4. *Зацепин А. Г., Костяной А. Г., Шапиро Г. И.* Медленное растекание вязкой жидкости по горизонтальной поверхности.— Докл. АН СССР, 1982, т. 265, № 1.
5. *Сергеев В. П., Чивилихин С. А.* Образование структуры на поверхности кварцевого стекла при его синтезе из газовой фазы.— Письма в Журн. техн. физики, 1983, т. 9, вып. 9, с. 523—525.
6. *Крылов О. С., Сергеев В. П., Хотимченко В. С., Чивилихин С. А., Эраносян Г. М.* Полигональная оптическая неоднородность — проявление памяти кварцевого стекла.— Докл. АН СССР, 1983, т. 273, № 5, с. 1159—1161.
7. *Иванов Л., Котко Л., Крейн С.* Краевые задачи в переменных областях.— Дифференциальные уравнения и их применения. Вып. 19. Вильнюс, 1977, с. 128.
8. *Сретенский Л. Н.* О волнах на поверхности вязкой жидкости.— Тр. ЦАГИ, 1941, № 541. 33 с.
9. *Никитин А. К., Подрезов С. А.* К пространственной задаче о волнах на поверхности вязкой жидкости бесконечной глубины.— ПММ, 1964, № 3, с. 28.
10. *Черкесов Л. В.* Пространственная задача Коши — Пуассона для волн в вязкой жидкости.— ПММ, 1965, т. 29, № 6, с. 1138—1146.
11. *Погорелова Т. М.* Влияние поверхностной пленки на собственные колебания свободной границы жидкости.— В кн.: Теоретические и экспериментальные исследования поверхностных и внутренних волн. Севастополь, 1980, с. 175—181.
12. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 528 с.
13. *Маслов В. П.* Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977. 384 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
6.XII.1983