МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 1985

УДК 532.59

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ УСТАНОВИВШИЕСЯ ТЕЧЕНИЯ СЛОИСТОЙ ЖИДКОСТИ И ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ

ТЕР-КРИКОРОВ А. М.

Изучаются трехмерные установившиеся потоки идеальной тяжелой слоистой несжимаемой стратифицированной в каждом слое жидкости над плоским или асимптотически плоским дном. Выбираются такие смешанные эйлерово-лагранжевы переменные, в которых поверхности постоянной плотности, в том числе границы раздела слоев, становятся плоскостями, параллельными плоскости дна. Исходная задача приводится к нелинейной граничной задаче для системы трех квазилинейных уравнений в плоском слое. Полученная система уравнений использована для построения асимптотической теории длинных волн в трехмерном случае, имеющей в первом приближении частные решения в виде солитонов и систем солитонов.

1. Постановка задачи и вывод уравнений в эйлерово-лагранжевых переменных. Рассмотрим установившийся трехмерный поток идеальной несжимаемой тяжелой неоднородной жидкости над плоским или асимптотически плоским дном. Выберем декартову систему координат так, чтобы плоскость xy была асимптотической для дна, ось z направим вертикально вверх.

Предполагается, что при $x\to-\infty$ поток асимптотически одномерный и имеет слоистую структуру. В качестве единицы длины выберем толщину h невозмущенного потока. Плотность и скорость одномерного потока задаются произвольными кусочно-гладкими функциями $R(\zeta)$ и $U(\zeta)$, имеющими разрывы первого рода в точках ζ_k, $0<\zeta_1<\ldots<\zeta_{N-1}<1$. Скорость параллельна оси x, плотность монотонно убывает с увеличением ζ. Единицы скорости и плотности выбираются так, чтобы

$$\int_0^1 R(\zeta)d\zeta=1,\qquad \int_0^1 A^2(\zeta)d\zeta=1,\qquad A^2(\zeta)=R(\zeta)U^2(\zeta)$$

Слоистая структура невозмущенного одномерного потока порождает слоистую структуру трехмерного потока. В каждом слое должны быть удовлетворены стационарные уравнения гидродинамики, которые возьмем в безразмерном виде

$$\operatorname{div}\mathbf{a}=0,\ (\mathbf{a}\nabla)\rho=0,\ \mathbf{a}\times\operatorname{rot}\mathbf{a}=\nabla H-\nu z\nabla\rho \tag{1.1}$$

$$\mathbf{a}=\mathbf{v}\sqrt{\rho},\qquad H=\frac{a^2}{2}+\rho\nu z+p,\qquad \nu=\frac{gh}{c^2}$$

Здесь ρ — плотность частицы, $\mathbf{v}$ — скорость, p — давление, H — плотность энергии частицы, c — характерная скорость. Из уравнений (1.1) следует, что плотность и полная энергия частиц постоянны на траекториях. Удобно предполагать, что пространство над свободной границей заполнено фиктивной жидкостью нулевой плотности.

Будем через $[f]_k$ обозначать скачок функции при переходе через k-ю границу раздела. Поскольку давление непрерывно в области течения, то должны выполняться граничные условия

$$[p]_k=0,\ k=1,\ 2,\dots,N \tag{1.2}$$

Нормальная составляющая скорости должна обращаться в ноль на твердых стенках и границах раздела.

Для задач о течениях над плоским дном будем считать, что трехмерный поток возникает в результате мгновенной потери устойчивости одномерным потоком, при которой траектории искривляются, но на них сохраняются значения плотности и полной энергии частиц

$$\rho=R(\zeta),\qquad \frac{1}{2}a^2+\nu\rho z+p=H(\zeta) \tag{1.3}$$

В формулах (1.3) ζ будет лагранжевой координатой, которая лишь неявно выражается через декартовы координаты, $\zeta=\zeta(x,\ y,\ z)$. Это обстоятельство затрудняет теоретическое и численное исследование нелинейных задач. В линеаризованной постановке и в приближении Буссинеска лагранжева координата ζ в формулах (1.3) отождествляется с декартовой координатой z. Возникающая при этом погрешность трудно поддается оценке.

Примем в качестве независимых переменных декартовы координаты x, y и эйлерову переменную ζ. Будет показано, что система уравнений и граничных условий (1.1), (1.2) может быть приведена к виду

$$\frac{\partial}{\partial x}(z_\zeta a_x)+\frac{\partial}{\partial y}(z_\zeta a_y)=0,\qquad \frac{\partial b_x}{\partial x}+\frac{\partial b_y}{\partial y}=0 \tag{1.4}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial a^2}{\partial \zeta}-z_\zeta a_y\frac{\partial a_z}{\partial y}-z_\zeta a_x\frac{\partial a_z}{\partial x}=H'(\zeta)-\nu\rho'(\zeta)z \tag{1.5}$$

$$a_z=a_x z_x+a_y z_y,\qquad a^2=a_x^2+a_y^2+a_z^2 \tag{1.6}$$

$$b_x=-a_y(1+z_y^2)-a_x z_x z_y,\ \ b_y=a_x(1+z_x^2)+a_y z_x z_y \tag{1.7}$$

$$[a^2/2+\nu\rho(\zeta)z-H(\zeta)]_k=0,\qquad k=1,2,\dots,N \tag{1.8}$$

$$[z]_k=0,\quad k=1,\ 2,\dots,N-1,\quad z(x,\ y,\ 0)=z_0(x,\ y) \tag{1.9}$$

В переменных x, y, ζ границы раздела станут плоскостями $\zeta=\zeta_k$, дно — плоскостью $\zeta=0$, последнее уравнение (1.9) задает форму дна.

Для задач обтекания препятствия нужно поставить еще асимптотические условия при $x\to-\infty$

$$a_x\to A(\zeta),\qquad a_y\to 0,\qquad z\to\zeta \tag{1.10}$$

Переходя к выводу уравнений (1.4)—(1.9), заметим, что декартова координата z станет зависимой переменной $z=z(x,\ y,\ \zeta)$. Если в области течения $z_\zeta\neq 0$, то уравнение $z=z(x,\ y,\ \zeta)$ можно разрешить относительно ζ, $\zeta=\zeta(x,\ y,\ z)$. Производные функций $z(x,\ y,\ \zeta)$ и $\zeta(x,\ y,\ z)$ связаны обычными соотношениями $\zeta_z=1/z_\zeta$, $\nabla\zeta=\mathbf{n}/z_\zeta$. Через $\mathbf{n}$ будем обозначать нормаль к поверхности $z=z(x,\ y,\ \zeta)$, $\zeta=\mathrm{const}$, $\mathbf{n}=(-z_x,\ -z_y,\ 1)$.

Так как поверхность $z=z(x,\ y,\ \zeta)$ образована траекториями, то a_z выражается через a_x и a_y при помощи первого из соотношений (1.6). Заметим, что его можно записывать еще и в виде $(\mathbf{a},\ \mathbf{n})=0$.

Уравнение Эйлера (1.1) можно теперь записать в виде

$$\mathbf{a}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{a}=\frac{\mathbf{n}}{z_\zeta}[H'(\zeta)-\nu z\rho'(\zeta)]$$

Умножая это уравнение векторно и скалярно на $\mathbf{n}$ и используя выражение (1.6) для a_z, получаем

$$(\operatorname{rot}\mathbf{a},\mathbf{n})=0,\qquad (\operatorname{rot}\mathbf{a},\mathbf{b})=\frac{n^2}{z_\zeta}[H'(\zeta)-\nu z\rho'(\zeta)] \tag{1.11}$$

где b_x и b_y выражаются через a_x и a_y при помощи формул (1.7), $b_z=-z_x a_y+z_y a_x$, $\mathbf{b}=\mathbf{n}\times\mathbf{a}$.

Так как при переходе через границы раздела $\zeta=\zeta_k$ давление и $z(x, y, \zeta)$ должны меняться непрерывно, то выполняются граничные условия (1.8), (1.9).

Для одномерного потока справедливы соотношения

$$\mathbf{n}=(0, 0, 1),\quad \operatorname{rot}\mathbf{a}_0=(0, A'(\zeta), 0),\quad z=\zeta$$

$$\mathbf{b}=(0, -A(\zeta), 0),\ H'(\zeta)=\nu\zeta\rho'(\zeta)+A(\zeta)A'(\zeta)$$

$$[H(\zeta)-\rho\nu\zeta+A^2(\zeta)/2]_k=0,\quad k=1, 2, \ldots, N$$

Перейдем теперь в уравнении неразрывности $\operatorname{div}\mathbf{a}=0$ и в динамических уравнениях (1.11) к переменным x, y, ζ. Заметим, что если $f(x, y, \zeta)$ – дифференцируемая функция и $\Phi(x, y, z)=f(x, y, \zeta(x, y, z))$, то

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{z_x}{z_\zeta}\frac{\partial f}{\partial\zeta},\quad \frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{z_y}{z_\zeta}\frac{\partial f}{\partial\zeta},\quad \frac{\partial\Phi}{\partial z}=\frac{1}{z_\zeta}\frac{\partial f}{\partial\zeta} \tag{1.12}$$

Для простоты записи будем функцию после замены переменных обозначать той же функцией, что и до замены. Используя правило (1.12) и подставляя в выражение для $\operatorname{div}\mathbf{a}$ величину a_z из уравнения (1.6), приведем уравнение неразрывности к первому из уравнений (1.4). При желании это уравнение позволяет ввести функцию тока.

Сделаем теперь замену переменных в первом из уравнений (1.11). Воспользуемся формулой Стокса. Возьмем контур ∂C, лежащий на поверхности $\zeta=\text{const}$ и содержащий внутри точку $P(x, y, z)$. Так как в силу (1.11) $(\operatorname{rot}\mathbf{a}, \mathbf{n})=0$, то, воспользовавшись инвариантностью дифференциальной формы $\mathbf{a}d\mathbf{r}$ и вспоминая выражения (1.7) для b_x, b_y, получаем

$$0=\int\limits_{\partial C}\mathbf{a}\,d\mathbf{r}=\int\limits_{\partial C^*}a_x\,dx+a_y\,dy+a_z(z_x\,dx+z_y\,dy)=$$

$$=\int\limits_{\partial C^*}b_y\,dx-b_x\,dy=-\iint\limits_{C^*}\left[\frac{\partial b_x}{\partial x}+\frac{\partial b_y}{\partial y}\right]dx\,dy$$

Здесь C^* – образ C при отображении $x, y, z\to x, y, \zeta$. В силу произвольности C должно удовлетворяться второе из уравнений (1.4).

Осталось вычислить проекцию $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ на направление вектора $\mathbf{b}$. Воспользуемся опять формулой Стокса. Проведем через точку $P(x, y, z)$ плоскость с нормалью $\mathbf{b}$ и возьмем в этой плоскости контур ∂C, содержащий внутри точку $P(x, y, z)$. Пусть $\mathbf{b}^\circ=\mathbf{b}/|\mathbf{b}|$. Воспользовавшись еще раз инвариантностью дифференциальной формы $\mathbf{a}d\mathbf{r}$, выражениями (1.7) для b_x и b_y, а также вторым из уравнений (1.4), получаем

$$\iint\limits_{C}(\operatorname{rot}\mathbf{a},\mathbf{b}^\circ)\,dS=\int\limits_{\partial C^*}b_y\,dx-b_x\,dy+z_\zeta a_z\,d\zeta=$$

$$=\iint\limits_{C^*}\left[\frac{\partial}{\partial y}(z_\zeta a_z)+\frac{\partial b_x}{\partial\zeta}\right]dy\,d\zeta+\left[\frac{\partial b_y}{\partial\zeta}-\frac{\partial}{\partial x}(z_\zeta a_z)\right]d\zeta\,dx$$

Так как площадка C будет стягиваться к точке P, то с точностью до $o(S)$ имеем

$$S(\operatorname{rot}\mathbf{a},\mathbf{b}^\circ)_P=\left[\frac{\partial}{\partial y}(z_\zeta a_z)+\frac{\partial b_x}{\partial\zeta}\right]\iint\limits_{C^*}dy\,d\zeta+\left[\frac{\partial b_y}{\partial\zeta}-\frac{\partial}{\partial x}(z_\zeta a_z)\right]\iint\limits_{C^*}d\zeta\,dx \tag{1.13}$$

Воспользовавшись известными свойствами дифференциальных форм, получаем

$$\iint\limits_{C^*}dy\,d\zeta=\iint\limits_{C}\frac{\partial\zeta}{\partial x}dy\,dx+\frac{\partial\zeta}{\partial y}dy\,dz=S\left[\frac{z_x}{z_\zeta}\cos bz+\frac{1}{z_\zeta}\cos bx\right]+o(S)$$

$$\iint\limits_{C^*}dx\,d\zeta=S\left[\frac{z_y}{z_r}\cos bz+\frac{1}{z_r}\cos by\right]+o(S)$$

Подставляя эти выражения в (1.13) и переходя к пределу, получаем выражение для $(\operatorname{rot}\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Подставляя затем это выражение в уравнение (1.11), получаем, опуская подробности вычислений, уравнение (1.5).

2. Качественное обсуждение граничной задачи и пример. Если подставить выражения (1.6)—(1.7) в уравнения (1.4), (1.5), то получим систему трех квазилинейных относительно z, a_x, a_y уравнений в полосе $0\leqslant\zeta\leqslant 1$, которую нужно решать при граничных условиях (1.8)—(1.10). Если ввести функцию тока для первого из уравнений (1.4) $\psi(x, y, \zeta)$ и подставить выражения для a_x и a_y через функцию тока, то получим систему двух квазилинейных уравнений второго порядка относительно функции тока $\psi(x, y, \zeta)$ и функции $z(x, y, \zeta)$. Заметим, что исходная система содержала пять уравнений. Но основное преимущество граничной задачи (1.4)—(1.10) в том, что граничные условия заданы на известных границах и что $\rho(\zeta)$ и $H(\zeta)$ — известные функции независимой переменной ζ. Это должно существенно уменьшить теоретические и вычислительные трудности при решении нелинейных задач. Нет необходимости использовать приближение Буссинеска, в котором существенно упрощается исследование задач в переменных x, y, z [1—4].

Покажем это на примере линеаризированной системы. Полагая

$$a_x=A(\zeta)+u, \quad a_y=v, \quad z=\zeta+w \tag{2.1}$$

подставляя (2.1) в уравнения (1.4)—(1.9), линеаризируя полученные уравнения, приходим к линейной граничной задаче, которую после исключения u и v можно записать в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(A^2\frac{\partial w}{\partial\zeta}\right)+A^2\Delta w\right]-\nu\rho'(\zeta)w=0 \tag{2.2}$$

$$\left[A^2\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial\zeta}-\nu\rho w\right]_k=0, \quad k=1,2,\dots,N, \quad w(x,y,0)=z_0(x,y)$$

$$[w]_k=0, \quad k=1,\ 2,\dots,N-1, \quad \Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$$

Если нет сдвигового потока, то $A^2=\rho$, вводя частоту Брента — Вяйсяля $N^2(\zeta)=-p'(\zeta)/\rho(\zeta)$, можно дифференциальное уравнение (2.2) записать в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial\zeta^2}-N^2(\zeta)\frac{\partial w}{\partial\zeta}\right]+\nu N^2(\zeta)\Delta w=0 \tag{2.3}$$

Если в квадратных скобках отбросить слагаемое $-N^2 w_\zeta$, то для функции w получаем классическое линейное уравнение Буссинеска, которое в принципе не проще более точного уравнения (2.3).

При теоретических и численных исследованиях различных задач может быть полезной замена уравнения (1.5) и граничных условий (1.8) одним эквивалентным интегродифференциальным уравнением

$$\frac{a^2}{2}+\nu z\rho(\zeta)-H(\zeta)=\int\limits_1^{\zeta}\left[a_y\frac{\partial a_z}{\partial y}+a_x\frac{\partial a_z}{\partial x}+\nu\rho\right]z_\zeta\,d\zeta \tag{2.4}$$

В качестве достаточно простого примера рассмотрим задачу о свободных длинных волнах над плоским дном. Длинные волны характеризуются тем, что производные по x и y имеют более высокий порядок малости, чем производные по ζ. Сделаем в уравнениях растяжения $\xi=x\sqrt{\varepsilon}$, $\eta=\varepsilon y$, $\varepsilon>0$ и будем искать решение в виде рядов по степеням малого параметра

$$\begin{gathered} u=\varepsilon u_1+\varepsilon^2 u_2+\dots, \quad \nu=\nu_0(1+\varepsilon) \\ v=\sqrt{\varepsilon}(\varepsilon v_1+\varepsilon^2 v_2+\dots), \quad w=\varepsilon w_1+\dots \end{gathered} \tag{2.5}$$

Прежде чем подставлять разложения (2.5) в уравнения (1.4)–(1.9), преобразуем эти уравнения, выписывая только члены первых двух порядков. После несложных преобразований (см., например, [5]) получаем систему уравнений

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\nu\int_0^1 G(\zeta,\zeta')\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}d\mu(\zeta')+\Phi(u,v),\qquad u=-A\frac{\partial w}{\partial\zeta}+\ldots \tag{2.6}$$

$$\Phi(u,v)=\int_0^1 G(\zeta,\zeta')\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}d\mu(\zeta')+\int_0^1 A^2(\zeta')G(\zeta,\zeta')\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}d\zeta'+$$

$$+\int_0^\zeta A^2(\zeta')\frac{\partial}{\partial x}\left[u\frac{\partial u}{\partial x}-A\left(u-A\frac{\partial w}{\partial\zeta}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial\zeta}\right]d\zeta'+\ldots$$

$$G(\zeta,\zeta')=\begin{cases}g(\zeta), & \zeta\leqslant\zeta'\\ g(\zeta'), & \zeta'\leqslant\zeta\end{cases},\qquad g(\zeta)=\int_0^\zeta A^{-2}(t)\,dt$$

Здесь $d\mu=-d\rho$ – мера, порожденная монотонной функцией $\rho(\zeta)$. Подставляя разложения (2.5) в (2.6), получаем интегральное уравнение Фредгольма с симметричным ядром

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial\xi^2}=\nu_0\int_0^1 G(\zeta,\zeta')\frac{\partial^2 w_1}{\partial\xi^2}d\mu(\zeta'),\qquad u_1=-A\frac{\partial w_1}{\partial\zeta} \tag{2.7}$$

Уравнение (2.7) имеет не более чем счетное множество простых положительных собственных значений, которым соответствуют критические скорости распространения длинных волн [5]. Пусть ν_0 – собственное значение, а $\varphi(\zeta)$ – соответствующая ему собственная функция. Тогда w_1 и u_1 выражаются через произвольную функцию $C(\xi,\eta)$

$$w_1=C(\xi,\eta)\varphi(\zeta),\quad u_1=-C(\xi,\eta)A(\zeta)\varphi'(\zeta)$$

Для определения функции w_2 опять получится уравнение (2.7), но уже неоднородное, с правой частью, зависящей от неизвестной функции $C(\xi,\eta)$. Для разрешимости неоднородного уравнения необходимо и достаточно, чтобы его правая часть была ортогональна собственной функции $\varphi(\zeta)$. Это условие дает нелинейное дифференциальное уравнение для определения неизвестной функции $C(\xi,\eta)$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial\eta^2}=\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\alpha C^2+\beta\frac{\partial^2 C}{\partial\xi^2}-C\right),\qquad \int_0^1\varphi^2(\zeta)\,d\mu(\zeta)=1 \tag{2.8}$$

$$\alpha=-\frac{3}{2\nu_0}\int_0^1 A^2(\zeta)\varphi'(\zeta)^3\,d\zeta,\qquad \beta=\int_0^1 A^2(\zeta)\varphi^2(\zeta)\,d\zeta$$

Заменой $C'=\alpha C$, $\xi'=\sqrt{\beta}\xi$, $\eta'=\sqrt{\beta}\eta$ уравнение (2.8) приводится к такому же уравнению, но с $\alpha=\beta=1$, т. е. к стационарному случаю уравнения Кадомцева – Петвиашвили. Для этого уравнения эффективны те же методы разыскания точных решений, что и для уравнения Кортевега – де Вриза [6]. В частности, существуют решения типа солитонов и систем солитонов.

Приближенное решение для функции $z(x,y,\zeta)$ имеет следующий вид:

$$z=\zeta+\varepsilon\varphi(\zeta)C(x\sqrt{\varepsilon},\,y\varepsilon)+o(\varepsilon) \tag{2.9}$$

Доказательство того, что решение типа (2.9) с равномерной оценкой $o(\varepsilon)$ действительно существует, по-видимому, должно быть весьма сложным. В плоском случае оно проведено в [6]. В [8] уравнение Кадомцева — Петвиашвили для описания внутренних волн выведено в нестационарном случае для непрерывно дифференцируемой стратификации и при отсутствии сдвиговых потоков при помощи применения аналогичной асимптотической техники к исходным уравнениям гидродинамики.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дородницын А. А.* Некоторые задачи обтекания неровностей поверхности земли воздушным потоком.— Тр. Главн. геофиз. обсерватории, 1940, вып. 31, с. 3—41.
2. *Лайтхил Д.* Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 598 с.
3. *Букатов А. Е., Черкесов Л. В.* Волны в неоднородном море. Киев: Наук. думка, 1983. 221 с.
4. *Миропольский Ю. З.* Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеоиздат, 1981. 300 с.
5. *Бежанов К. А., Тер-Крикоров А. М.* Многослойные установившиеся течения идеальной несжимаемой жидкости над неровным дном.— ПММ, 1984, т. 48, № 5, с. 750—760.
6. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов. М.: Наука, 1980, с. 285—316.
7. *Ter-Krikorov A. M.* Théorie exacte des ondes longues stationnaires dans un liquide hétérogène.— J. Mec., 1963, v. 2, № 3, p. 351—376.
8. *Леонов А. И.* О двумерных уравнениях Кортевега-де Вриза в нелинейной теории поверхностных и внутренних волн.— Докл. АН СССР, 1976, т. 229, № 4, с. 820—824.

Москва

Поступила в редакцию
24.II.1984