

УДК 532.516

## ПЕРИСТАЛЬТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ПРИ КОНЕЧНЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

ЛЕВИНА Г. В.

Перистальтический транспорт жидкости, распространенный в живых организмах, все более широко используется современной техникой в тех случаях, когда необходимо предотвратить контакт прокачиваемой среды с механическими частями насоса.

Анализ работ, посвященных изучению перистальтического прокачивания (многие из них подробно рассмотрены в обзоре [1] и дополнении к его русскому переводу), показывает, что нестационарная деформация стенок канала существенно влияет на характер движения жидкости. Большинство известных теоретических исследований проведено методом возмущений и относится в основном к изучению течения в приближении Стокса и бесконечно большой длины волны. Область применимости результатов этого приближения оказалась достаточно широкой, поскольку они с хорошей точностью описывают режимы перистальтического движения («захват», «обратный ток»), наблюдаемые в некоторых конкретных системах.

Использование численных методов для исследования перистальтического транспорта позволяет одновременно учесть влияние на течение сил инерции и конечной кривизны стенки канала (конечная амплитуда и длина перистальтической волны). Так, в работах [2–4] с помощью конечно-разностных расчетов подтверждено существование режимов прокачивания, предсказанных на основе асимптотических разложений в [1]. В [5] при больших волновых числах и амплитудах волны деформации обнаружен новый режим течения — неосевой захват, существующий уже в случае ползущего течения.

В данной статье обсуждаются результаты численного исследования перистальтического течения при конечных числах Рейнольдса, конечных волновых числах и амплитудах бегущей волны на стенках канала. Определены рамки применимости данного асимптотического анализа, проведенного в [6] с помощью двух отдельных разложений по степеням числа Рейнольдса и волнового числа. Показано, что с увеличением числа Рейнольдса сохраняется возможность перехода при определенных условиях к структуре течения, соответствующей неосевому захвату.

1. Рассматривается плоское течение вязкой несжимаемой жидкости в бесконечном канале, стенки которого деформируются в противофазе по закону бегущей волны, распространяющейся вдоль оси  $X$  с фазовой скоростью  $C$ .

$$Y_T = \pm \left[ d + b \sin \frac{2\pi}{\lambda} (X - Ct) \right]$$

где  $d$  — невозмущенная полуширина канала,  $b$  — амплитуда перистальтической волны,  $\lambda$  — длина волны,  $t$  — время.

Исследование проводится в движущейся вместе с волной системе отсчета, в которой форма границ стационарна. Координаты и скорости в лабораторной  $(X, Y)$  и волновой системе  $(x, y)$  связаны соотношениями

$$x = X - Ct, \quad y = Y; \quad v_x = V_x - C, \quad v_y = V_y$$

где  $V_x, V_y$  и  $v_x, v_y$  — компоненты скорости в соответствующей системе координат.

Вводя преобразование координат [5], спрямляющее границы области  $\xi = x, \eta = y / (1 + \zeta \sin \alpha x)$  и переходя к безразмерным переменным, полные нелинейные уравнения Навье — Стокса и граничные условия, записанные

через функцию тока  $\psi$  и завихренность  $\varphi$ , можно представить в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{Re } a_2 \left( \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + 2a_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} + a_3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + a_4 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + 2a_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + a_3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + a_4 \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = -\varphi \quad (1.2)$$

$$\psi=0, \quad \varphi=0(\eta=0); \quad \psi=q-1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = -(1+\xi \sin \alpha \xi) \quad (\eta=1) \quad (1.3)$$

$$\psi(\xi, \eta, t) = \psi\left(\xi + \frac{2\pi}{\alpha}, \eta, t\right), \quad \varphi(\xi, \eta, t) = \varphi\left(\xi + \frac{2\pi}{\alpha}, \eta, t\right)$$

$$\text{Re} = \frac{Cd}{\nu}, \quad \xi = \frac{b}{d}, \quad \alpha = \frac{2\pi d}{\lambda}$$

$$a_1 = \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad a_2 = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad a_3 = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2, \quad a_4 = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

Здесь  $a_i$  — коэффициенты, обусловленные переходом к криволинейным координатам  $\xi, \eta$ . В качестве единиц измерения длины, времени, скорости и функции тока выбраны соответственно  $d, d^2/\nu, C$  и  $Cd$ . Рассматриваемое течение предполагается пространственно-периодическим с периодом  $2\pi/\alpha$  и симметричным относительно оси канала.

В общем случае поставленная задача содержит четыре безразмерных параметра: относительную амплитуду деформации  $\xi$ , волновое число  $\alpha$ , число Рейнольдса  $\text{Re}$  и средний по времени расход жидкости в лабораторной системе отсчета  $q$ .

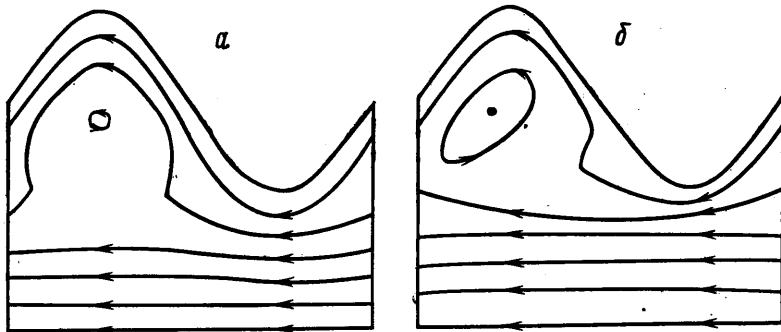
Характер течения жидкости в канале зависит как от параметров перистальтической волны, так и от гидравлического сопротивления внешнего контура. При заданных параметрах волны в качестве характеристики, связанной с гидравлическим сопротивлением контура, может рассматриваться средний по времени расход жидкости вдоль слоя. При выборе параметра  $q$  в качестве независимого разность давления на концах канала является функцией характеристик перистальтической волны и расхода.

Краевая задача (1.1)–(1.3) решалась численно методом сеток. Выбор вычислительной процедуры в значительной степени определялся тем, насколько точно и эффективно она позволяет рассчитывать поле давления, необходимое для снятия расходо-напорных характеристик перистальтического насоса. Подробное описание используемого численного подхода, в основе которого лежит совместимость схемы расчета давления с конечно-разностной аппроксимацией уравнения для вихря скорости, и его тестовых испытаний приведено в [7].

2. Проведенное в [8] сравнение численных и аналитических результатов для ползущего течения ( $\text{Re}=0$ ) с малым волновым числом показало хорошее согласование с линейной теорией при  $\text{Re}=\alpha=0$  [1] и послужило дополнительной проверкой метода.

Сопоставим расчетные результаты при конечных значениях числа Рейнольдса  $\text{Re}$  и волнового числа  $\alpha$  с данными асимптотического анализа работы [6], в которой изучалось влияние на перистальтическое прокачивание сил инерции и конечной длины волны с помощью двух отдельных асимптотических разложений: по степеням  $\text{Re}$  при  $\alpha=0$  и по степеням  $\alpha^2$  при  $\text{Re}=0$ . Хотя эти аналитические результаты справедливы, строго говоря, только для значений  $\text{Re}$  и  $\alpha$ , много меньших единицы, в [6] приводятся количественные данные для достаточно широких интервалов изменения  $\text{Re}$  и  $\alpha$ . Сравнение проведем по двум характеристикам: величине расхода  $q_0$ , которая достигается при перепаде давления  $\Delta p=0$ , и значению  $q_*$ , определяющему границу возникновения осевого захвата частиц (расцепление центральной линии тока).

Результаты, полученные разложением по  $Re$  при  $\alpha=0$ , предсказывают достаточно слабую зависимость величины  $q_0$  от числа Рейнольдса. Так, в интервале  $Re_a$  от 0 до 10 величина  $q_0$  меняется всего на 1,5% (используемое в [1, 6] число Рейнольдса  $Re_a$  связано с введенным в данной работе числом Рейнольдса  $Re$  соотношением  $Re_a=Re\alpha$ ). Численные расчеты при  $\alpha=0,1$  в соответствующем интервале  $0 \leq Re \leq 100$  подтверждают этот результат; отличие от данных [6] не превышает 1% при  $\zeta \leq 0,8$ .



Фиг. 1

Иначе обстоит дело с зависимостью  $q_0$  от волнового числа  $\alpha$  при  $Re=0$ . Здесь уже при умеренных  $\alpha$  значение расхода  $q_0$ , определенное конечно-разностным методом, существенно отличается от предсказанного асимптотическим анализом. Например, при  $\alpha=2$  и  $\zeta=0,4$  это отличие составляет более 20%.

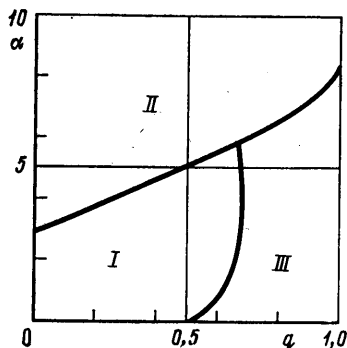
В аналитических и численных данных, относящихся к определению границы захвата  $q_*$  при конечных  $Re$  и  $\alpha$ , наблюдается общая тенденция — сдвиг границы захвата при варьировании параметров происходит в одну и ту же сторону, причем снова наибольшее отличие отмечается при изменении  $\alpha$ . Количественное сравнение результатов затруднено тем, что графики в [6] приведены лишь для больших амплитуд волны. Границу захвата для  $Re=100$ ,  $\alpha=0$  по этим графикам удается определить только при  $\zeta \geq 0,8$ ; в этом случае различие между аналитическими и численными значениями составляет около 20%. Различие в расходе, соответствующем границе захвата при  $\alpha=2$ ,  $Re=0$  составляет для  $\zeta=0,5$  приблизительно 10%, а для  $\zeta=0,8$  достигает 60%. Таким образом, проведенное сравнение указывает, по-видимому, на ограниченную применимость результатов для конечных  $\alpha$ , полученных с помощью асимптотических разложений.

3. Применяемый численный метод в принципе не имеет ограничений на величину амплитуды, длины волны и числа Рейнольдса. Это позволило обнаружить при достаточно больших волновых числах и амплитудах волны новый механизм захвата частиц волной [5, 8], когда расщепляется неосевая линия тока.

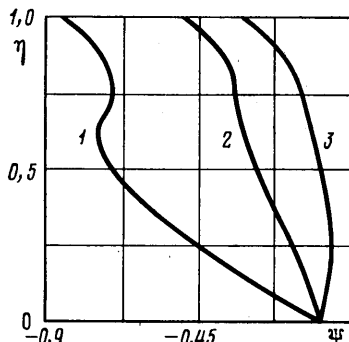
Структура течения при неосевом захвате в движущейся системе отсчета показана на фиг. 1 для  $\zeta=0,4$ ,  $\alpha=10$ ,  $q=0,4$ ,  $Re=0$ ; 100. Как и в случае осевого захвата, здесь образуется зона вихревого течения, перемещающаяся вместе с гребнем волны. Однако если при осевом захвате расщепляется центральная линия тока, и ядро из жидких частиц, описывающих в волновой системе отсчета замкнутые траектории, располагается в центре канала, то при неосевом захвате области с замкнутыми линиями тока расположены вблизи стенок канала. Кроме того, для неосевого захвата характерно существование встречных потоков. Под влиянием сил инерции картина движения приобретает асимметрию, связанную с основным течением (фиг. 1, б).

Зафиксировав амплитуду волны  $\zeta=0,4$  и число Рейнольдса  $Re=100$ , проследим, как происходит смена режимов течения в зависимости от значений среднего расхода  $q$  и волнового числа  $\alpha$ .

На диаграмме режимов (фиг. 2) цифрами I и III обозначены области, в которых реализуются движения, качественно схожие с наблюдающимися при бесконечно большой длине волны. В области I при малых расходах осуществляется движение с незамкнутыми линиями тока, форма которых подобна стенке, а кривизна уменьшается по мере удаления от границы



Фиг. 2



Фиг. 3

канала. Линия, разделяющая области I и III, определяет граничные значения расхода, начиная с которых появляется режим осевого захвата. Несмотря на сходство картин течения с построенными в линейной теории для  $Re=\alpha=0$ , профили продольной составляющей скорости уже при малых  $\alpha$  не являются параболическими. Это означает, что линейная теория [1], оперирующая при  $Re=\alpha=0$  с локально-пуазейлевским распределением скорости, неприменима для описания структуры течений при конечных волновых числах и числах Рейнольдса.

При волновых числах  $\alpha > 3$  в области II формируется структура течения, соответствующая неосевому захвату. Этот режим движения в отличие от осевого захвата реализуется при сколь угодно малых расходах, если волновое число выше порогового (фиг. 2).

Типичные зависимости функции тока от поперечной координаты под гребнем волны для трех описанных выше режимов движения показаны на фиг. 3 при  $Re=100$ ,  $\zeta=0,4$ ,  $\alpha=4$ ,  $q=0,15$ ;  $0,55$ ;  $0,75$ . Течение в области I (на фиг. 2) характеризуется монотонной зависимостью  $\psi(\eta)$  (линия 2), неосевому захвату соответствует кривая с минимумом и максимумом (линия 1), осевому захвату — кривая только с максимумом, расположенным в области  $\psi > 0$  (линия 3).

Приведенные выше результаты относятся к значению амплитуды волны  $\zeta=0,4$  и числа Рейнольдса  $Re=100$ . Численные расчеты проводились в диапазоне  $\zeta \leq 0,8$ ,  $Re \leq 100$ . При уменьшении или увеличении амплитуды граница области II на плоскости  $(q, \alpha)$  соответственно удаляется или приближается к горизонтальной оси  $\alpha=0$ ; определенные изменения в положении границ наблюдаются и при варьировании числа Рейнольдса. Тем не менее вид диаграммы режимов при этом качественно сохраняется.

Автор выражает признательность Е. М. Жуховицкому за внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Jaffrin M. Y., Shapiro A. H. Peristaltic pumping.— Ann. Rev. Fluid Mech., 1971, в. 3, р. 13–36 (Рус. перев.: Джеффрин М., Шапиро А. Перистальтическое прокачивание.— Механика, Период. сб. перев. иностр. ст., 1972, № 5, с. 88–108.)
2. Brown T. D., Hung T.-K. Computational and experimental investigations of two-

- dimensional nonlinear peristaltic flows.— J. Fluid Mech., 1977, v. 83, № 2, p. 249–272.
3. *Заико В. М., Старобин И. М., Уткин А. В.* Численное моделирование движения вязкой жидкости (крови) в трубке с активно деформирующейся стенкой.— Механика композитных материалов, 1979, № 3, с. 515–523.
  4. *Takabatake S., Ayukawa K.* Numerical study of two-dimensional peristaltic flows.— J. Fluid Mech., 1982, v. 122, p. 439–465.
  5. *Левина Г. В., Поздеев А. А.* О течении вязкой жидкости в канале с волнообразно движущимися границами.— Докл. АН СССР, 1983, т. 273, № 6, с. 1333–1336.
  6. *Jaffrin M. Y.* Inertia and streamline curvature effects on peristaltic pumping.— Int. J. Engng. Sci., 1973, v. 11, № 6, p. 681–699.
  7. *Levina G. V.* Numerical analysis of finite-amplitude peristaltic flow at small wavelength.— Proc. Fifth GAMM-Conf. on Num. Meth. Fluid Mech., Roma, 1983.
  8. *Левина Г. В.* О некоторых режимах перистальтического прокачивания.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1983, № 5, с. 31–35.

Пермь

Поступила в редакцию  
29.V.1984