

УДК 532.546

О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

ПАНЬКО С. В.

Точные решения задач фильтрации с предельным градиентом в случае, когда область течения в плоскости годографа есть полуполоса с продольным разрезом [1], известны лишь для двух моделей закона сопротивления [2-6].

В работе указано однопараметрическое семейство законов фильтрации и обоснована возможность эффективного нахождения точных и приближенно-аналитических решений на основе последовательного сведения к краевым задачам для уравнения Лапласа либо для уравнения, детально исследованного в [1]. Следует отметить, что характеристики течения определяются без дополнительных квадратур.

1. Уравнения движения плоского установившегося течения несжимаемой жидкости, подчиняющегося нелинейному закону фильтрации

$$\text{grad } H = - \frac{\Phi(w)}{w} \mathbf{w}, \quad \text{div } \mathbf{w} = 0$$

$$\Phi(w) \geq 0, \quad \Phi'(w) \geq 0 \tag{1.1}$$

преобразованием годографа приводятся к линейной системе для приведенного напора $H(w, \theta)$ и функции тока $\psi(w, \theta)$ [7]

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = - \frac{\Phi^2(w)}{w\Phi'(w)} \frac{\partial \psi}{\partial w}, \quad \frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{\Phi(w)}{w^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \tag{1.2}$$

По известному решению (1.2) возвращение на плоскость течения осуществляется при помощи формул перехода

$$dz = e^{i\theta} \left[- \frac{dH}{\Phi(w)} + i \frac{d\psi}{w} \right], \quad z = x + iy \tag{1.3}$$

Здесь x, y — координаты области течения, w, θ — модуль и угол наклона скорости к оси x .

Другим способом линеаризации системы (1.1) является преобразование Лежандра [1], которое в данном случае представляется следующими соотношениями и формулами, связывающими сопряженные по Лежандру функции:

$$ze^{-i\theta} = \frac{1}{w} \frac{\partial S}{\partial \theta} - i \frac{\partial S}{\partial w} = \frac{1}{\Phi'(w)} \frac{\partial T}{\partial w} + \frac{i}{\Phi(w)} \frac{\partial T}{\partial \theta} \tag{1.4}$$

$$\psi = S - w \frac{\partial S}{\partial w}, \quad H = T - \frac{\Phi(w)}{\Phi'(w)} \frac{\partial T}{\partial w} \tag{1.5}$$

Согласно (1.4), $S(w, \theta)$ и $T(w, \theta)$ удовлетворяют системе

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = -\Phi(w) \frac{\partial S}{\partial w}, \quad \frac{\partial T}{\partial w} = \frac{\Phi'(w)}{w} \frac{\partial S}{\partial \theta} \tag{1.6}$$

Как следует из (1.4), переход на плоскость течения осуществляется без дополнительных квадратур.

Эффективность использования преобразования Чаплыгина и Лежандра при решении конкретных задач зависит как от вида области плоскости годографа, так и от характера граничных условий. В ряде случаев преобразование Лежандра оказывается более предпочтительным [1, с. 39].

Преобразование годографа сводит исходные задачи к соответствующим краевым задачам для линейных систем (1.2), (1.6) с переменными коэффициентами в полуполосе (вообще говоря, неоднolistной) [1, 8] с одним или несколькими продольными разрезами. Так как существующие методы интегрирования таких систем позволяют решать краевые задачи для узкого класса областей и граничных условий, то в общем случае применяют приближенные методы.

Можно указать класс законов сопротивления $\Phi(w)$, для которого возникающие краевые задачи сводятся к аналогичным задачам для системы Коши — Римана и, следовательно, могут быть решены точно.

2. Рассмотрим следующий класс законов фильтрации [1, 9]:

$$\Phi(w) = (w^{2/n} + \lambda^{2/n})^{n/2}, \quad \Phi(w) = \lambda \operatorname{ch}^n \sigma, \quad w = \lambda \operatorname{sh}^n \sigma \quad (2.1)$$

В переменных σ , $n\varphi = \theta$ для $n = 2k + 1$, k — целое, системы (1.2) и (1.6) обращаются в канонические

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \varphi} &= -\operatorname{cth}^{2k+2} \sigma \frac{\partial \psi}{\partial \sigma}, & \frac{\partial H}{\partial \sigma} &= \operatorname{cth}^{2k+2} \sigma \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= -\operatorname{cth}^{2k} \sigma \frac{\partial S}{\partial \sigma}, & \frac{\partial T}{\partial \sigma} &= \operatorname{cth}^{2k} \sigma \frac{\partial S}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Принимая во внимание (1.5), (2.1) и (2.2), приходим к следующему рекуррентному представлению решения систем (2.2):

$$\begin{aligned} \psi_k &= S_{k+1} = S_k - \frac{1}{2k+1} \operatorname{th} \sigma \frac{\partial S_k}{\partial \sigma} \\ H_k &= T_{k+1} = T_k - \frac{1}{2k+1} \operatorname{cth} \sigma \frac{\partial T_k}{\partial \sigma} \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $S_0(\sigma, \varphi)$ и $T_0(\sigma, \varphi)$ — сопряженные гармонические функции [10]. Иной способ построения решения (2.2) приведен в [11].

Таким образом, при $n = 2k + 1$, $W = -H + i\psi$ представляется в виде конечного дифференциального оператора порядка $k + 1$

$$\begin{aligned} -H + i\psi &= \sum_{m=0}^{k+1} -\alpha_m(\sigma) \frac{\partial^m T_0}{\partial \sigma^m} + i\beta_m(\sigma) \frac{\partial^m S_0}{\partial \sigma^m} \\ -\alpha_0(0) &= \beta_0(0) = 1, \quad \beta_m(0) = 0, \quad m \geq 1 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Установим теперь формулы для характеристик течения (форма границы застойной зоны, ее расположение относительно источников и т. д.). Параметрическое представление уравнения границы застойной зоны легко находится из (1.4) и (2.3)

$$\lambda[z(\varphi) - z_0] = \frac{e^{i n \varphi}}{n!} \left[\frac{\partial M}{\partial \varphi}(0, \varphi) - iM(0, \varphi) \right] \quad (2.5)$$

Расстояние от источника A до острия застойной зоны B найдется в виде

$$\lambda(z_B - z_A) = \frac{e^{i n \varphi_0}}{n!} \frac{\partial M(\sigma, \varphi_0)}{\partial \varphi} \Big|_{\infty}^0, \quad M(\sigma, \varphi) = \frac{\partial^n S_0(\sigma, \varphi)}{n \partial \sigma^n} \quad (2.6)$$

Используя (2.5), нетрудно вычислить площадь застойной зоны

$$\frac{2\theta_0\lambda^2}{\pi} s = \frac{1}{(n!)^2} \int_0^{2n\pi} \left\{ \left[\frac{\partial M}{\partial \varphi}(0, \varphi) \right]^2 - M^2(0, \varphi) \right\} d\varphi \quad (2.7)$$

3. Как видно из (2.4)–(2.7), функция тока ψ и искомые характеристики течения выражаются через гармоническую функцию $S_0(\sigma, \varphi)$. Попытаемся по известным краевым значениям $\psi(\sigma, \varphi)$ установить соответствующие значения $S_0(\sigma, \varphi)$. Обратимся к (2.4). Вдоль границы застойной зоны, где $\sigma=0$, $\varphi=0$, имеем $\psi(0, \varphi)=S_0(0, \varphi)=0$, так как $\beta_0(0)=1$, $\beta_m(0)=0$, $m \geq 1$. На вертикальных границах полуполосы и берегах разреза $\theta=\theta_i=\text{const}$ ($\varphi_i=\text{const}$) и представление (2.4) — обыкновенное дифференциальное уравнение порядка $k+1$ для определения значений $S_0(\sigma, \varphi_i)$. Характерной особенностью этого уравнения является его интегрируемость в квадратурах независимо от порядка, так как его интегрирование сводится к интегрированию конечной последовательности линейных уравнений первого порядка. Этот факт непосредственно следует из представления (2.3). Произвольные постоянные интегрирования в случае отсутствия разрезов определяются из условий симметрии и непрерывности $S_0(\sigma, \varphi_i)$ и ее производных порядка k . Если же имеются разрезы, то постоянные, связанные с положением их концов, отыскиваются в ходе решения конкретной задачи.

Таким образом, в рассматриваемом случае исходные краевые задачи для системы (2.2) сводятся к задачам того же типа для системы Коши — Римана, что существенно упрощает нахождение точных решений.

Если $n=1$ ($k=0$), то приходим к результатам [3].

Использованный в [12] закон фильтрации [13] также сводит исходные задачи к краевым задачам для уравнения Лапласа, однако возвращение на плоскость течения осуществляется при помощи дополнительных квадратур.

При $n < 0$ закон фильтрации (2.1) уже не принадлежит к классу законов фильтрации с предельным градиентом, так как $\Phi(0)=0$, но представление (2.4) имеет место, лишь H и ψ меняются ролями с T и S .

Пусть теперь $n=2k$, тогда системы (2.2) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \varphi} &= -\text{cth}^{2k+1}\sigma \frac{\partial \psi}{\partial \sigma}, & \frac{\partial H}{\partial \sigma} &= \text{cth}^{2k+1}\sigma \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= -\text{cth}^{2k-1}\sigma \frac{\partial S}{\partial \sigma}, & \frac{\partial T}{\partial \sigma} &= \text{cth}^{2k-1}\sigma \frac{\partial S}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Так как при $k=1$ решение первой системы (3.1) известно (система детально изучена в [1]), то, используя (1.5), (2.1) и (3.1), приходим к следующему представлению:

$$-H + i\psi = \sum_{m=0}^{k+1} a_m(\sigma) \frac{\partial^m H_1}{\partial \sigma^m} + i b_m(\sigma) \frac{\partial^m \psi_1}{\partial \sigma^m}, \quad (3.2)$$

$$-a_0(0) = b_0(0) = 1, \quad b_m(0) = 0, \quad m \geq 1$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial \varphi} = -\text{cth}^3\sigma \frac{\partial \psi_1}{\partial \sigma}, \quad \frac{\partial H_1}{\partial \sigma} = \text{cth}^3\sigma \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi}$$

т. е. и в данном случае $H(\sigma, \varphi)$ и $\psi(\sigma, \varphi)$ выражаются через решение системы (3.2) или эквивалентного ей уравнения, записанного в переменных w, θ

$$w(w+\lambda) \frac{\partial^2 \psi}{\partial w^2} + (w-\lambda) \frac{\partial \psi}{\partial w} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0$$

для которого разработаны эффективные приближенно-аналитические методы решения возникающих задач [1].

Формулы для определения характеристик течения получаются из (2.5)–(2.7) заменой $S_0(\sigma, \varphi)$ на $\psi_1(\sigma, \varphi)$.

Если в (2.1) знак плюс изменить на противоположный, то w и $\Phi(w)$, H и ψ , T и S меняются ролями. Но представления (2.4) и (3.2) будут справедливы и в этом случае. Устремляя $n \rightarrow \infty$, приходим к разрывному закону фильтрации [2].

В силу аналогии между уравнениями нелинейной фильтрации и продольного сдвига, установленной в [14], приведенные выше результаты переносятся на задачи продольного сдвига нелинейно-упругих и пластических тел с законом нагружения

$$\tau(\gamma) = (\gamma^{2/n} \pm a^{2/n})^{n/2}$$

Если считать σ расстоянием от скважины, то система (2.2) описывает фильтрационные течения в неоднородных пластах, проницаемость которых аппроксимируется функцией

$$K(x) = A \operatorname{cth}^{2m}(cx+d)$$

Эта зависимость качественно верно описывает поведение проницаемости как вблизи скважины, так и при удалении от нее.

4. В качестве примера рассмотрим задачу о течении в системе источник – сток [1] (фиг. 1), полагая в (2.1) $n=1$ [15].

Для $\psi(\sigma, \theta)$ имеем краевую задачу в полуполосе

$$\begin{aligned} \psi(0, \sigma) = \psi(\theta, 0) = 0, \quad \psi(\pi, \sigma) = Q, \quad \sigma \geq 2\sigma_1 \\ \frac{\partial \psi}{\partial \theta}(\pi, \sigma) = 0, \quad 0 < \sigma < 2\sigma_1 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Используя (2.3), находим краевые значения $S(\theta, \sigma)$; они получаются из (4.1), где последнее условие заменено на следующее:

$$\frac{\partial S}{\partial \theta}(\pi, \sigma) = R \operatorname{sh} \sigma, \quad 0 < \sigma < 2\sigma_1$$

с произвольной пока постоянной R .

Решение данной краевой задачи имеет вид

$$\begin{aligned} S(\theta, \sigma) = \frac{Ra \sin \beta}{\rho} + \frac{Q}{\pi} \left[\frac{\pi}{a} - \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{ch} \sigma_1 + \operatorname{ch} \sigma \cos \theta}{\operatorname{sh} \sigma \sin \theta} \right] + \\ + \frac{Q}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \zeta}{1 - \cos \zeta} \ln \left| \frac{\rho^2 - 2\rho \sin(\xi - \beta) + 1}{\rho^2 - 2\rho \sin(\xi + \beta) + 1} \right| d\xi \\ - \frac{a}{2} \left(\rho e^{i\beta} + \frac{e^{-i\beta}}{\rho} \right) = 1 + a + \cos(\theta + i\sigma), \quad a = \operatorname{sh}^2 \sigma_1 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Так как характеристики течения выражаются через производную $S_\sigma(\theta, 0)$, то из (4.2) получим ($2\alpha = \theta$)

$$\frac{\partial S}{\partial \sigma}(\theta, 0) = \frac{\sin \alpha}{N(\alpha)} \left[\frac{Q}{\pi} + R(\cos \alpha - N(\alpha))^2 \right], \quad N(\alpha) = \sqrt{a + \cos^2 \alpha} \quad (4.3)$$

Из условия ограниченности координаты точки D определяем $R = Q/(\pi a)$.

Принимая во внимание (2.5) и (4.3), находим форму границы застойной зоны и расстояние от источника до острия застойной зоны

$$\frac{z}{L} = \frac{\cos \alpha (1+a+2a \sin^2 \alpha) + i2a \sin^3 \alpha}{N(\alpha)} + \cos^2 \alpha, \quad L = \frac{Q}{\pi a}$$

$$\lambda(x_B - L) = L(k-1), \quad k^2 = a+1 = \text{ch}^2 \sigma,$$

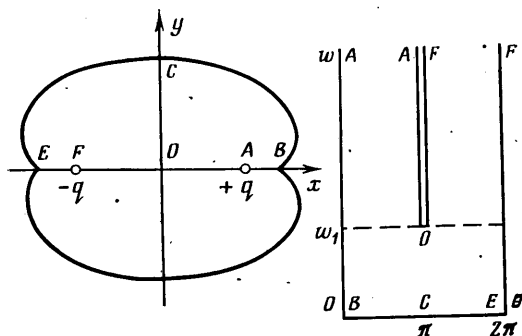
Кроме геометрических характеристик для данной задачи важно знать перепад напора между точками границы застойной зоны и точками линии тока $\psi=0$, $\theta=0$. Используя (2.3) и (4.2), приходим к формуле, которая определяет перепад напора между точками B и C

$$\Delta H = \frac{Q}{\pi} \ln \frac{k+1}{k-1}$$

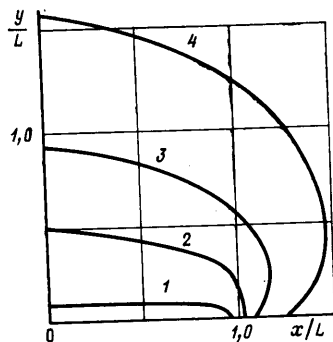
Аналогичным образом находим перепад напора между точками линии тока $\psi=0$, $\theta=0$

$$\Delta H = \frac{4Q}{\pi} \ln g + \frac{2Q}{\pi} (g-1)(k-1), \quad g = \frac{\sqrt{2k^2-1}-k}{k-1}$$

Вид границы застойной зоны, рассчитанный для значений параметра $a=0,1; 0,5; 1; 2$, приведен на фиг. 2 (кривые 1-4).



Фиг. 1



Фиг. 2

По известному решению (4.2) при помощи рекуррентных соотношений (2.3) сразу строится решение данной задачи для закона фильтрации $\Phi(w) = (w^{3/2} + \lambda^{3/2})^{3/2}$, который является выпуклым в отличие от закона, предложенного в [3]. Функция $\psi_1(\sigma, \theta)$, дающая решение краевой задачи (4.1), в данном случае следующим образом выражается через $S_0(\sigma, \theta)$:

$$\psi_1 = S_0 - \frac{1}{3} \text{th}^3 \sigma \frac{\partial S_0}{\partial \sigma} + \frac{1}{3} \text{th}^2 \sigma \frac{\partial^2 S_0}{\partial \sigma^2}$$

Иначе говоря, для перехода к более высоким значениям n требуется лишь операция дифференцирования производящего решения.

5. Рассмотрим задачу определения целиков остаточной вязкопластичной нефти, образующихся при вытеснении ее водой из неоднородного пласта мощности H , проницаемость которого $k(z)$, $k'(z) \leq 0$ (ось z направлена вниз). Будем считать, что предельный градиент для нефти $G(z)$ и проницаемость $k(z)$ связаны соотношением $G^2(z) : k(z) = \text{const}$. На границе раздела нефть - вода $z=h(x, y)$, $0 \leq h(x, y) \leq H$, выполняются условия непротекания и предельного равновесия

$$\frac{\partial P}{\partial n} = 0, \quad |\nabla P| = G(h), \quad z = h(x, y)$$

и условие непротекания на кровле $z=0$ и подошве $z=H$.

В работе [16] показано, что осреднением по эффективной мощности $h(x, y)$ сформулированная задача сводится к плоской задаче нелинейной фильтрации с предельным градиентом для однородной жидкости

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u} = - \frac{K(|\nabla P|)}{\mu} \nabla P$$

$$\mathbf{u} = \frac{1}{H} \int_0^h w(x, y, z) dz, \quad K(|\nabla P|) = \frac{1}{H} \int_0^h k(z) dz$$

$$|\nabla P| = G(h), \quad z = h(x, y)$$

В частности, если в формуле (2.4) работы [16] положить $\alpha = n$, то приходим к закону фильтрации (2.1), которому отвечает однопараметрическое семейство распределения проницаемости $k(z)$. Это обстоятельство позволяет на основе полученных выше результатов находить оценки объемов целиков в пластах с переменной по вертикали проницаемости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бернадинер М. Г., Енгов В. М.* Гидродинамическая теория фильтрации апомальных жидкостей. М.: Наука, 1975. 200 с.
2. *Алишаев М. Г., Вахитов Г. Г., Гехтман М. М., Глумов И. Ф.* О некоторых особенностях фильтрации пластовой девонской нефти при пониженных температурах. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, № 3, с. 166–169.
3. *Панько С. В.* О некоторых задачах фильтрации с предельным градиентом. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1973, № 4, с. 177–181.
4. *Енгов В. М., Одишария М. Г.* О некоторых задачах определения размеров предельно равновесных целиков при вытеснении вязкопластической нефти водой. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 3, с. 88–93.
5. *Одишария М. Г.* Применение теории аналитических функций к решению задач нелинейной фильтрации. — Сообщения АН ГССР, 1975, т. 80, № 2, с. 309–312.
6. *Котляр Л. М., Скворцов Э. В.* Плоские стационарные задачи фильтрации жидкости с начальным градиентом. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1978. 142 с.
7. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР. М.: Наука, 1969. 545 с.
8. *Ильинский Н. Б., Шешуков Е. Г.* Задача нелинейной фильтрации с неоднородной областью годографа скорости. — Изв. вузов. Математика, 1972, № 10, с. 34–40.
9. *Мифтазугудинов Б. А., Молокович Ю. М., Скворцов Э. В.* Некоторые вопросы плоской нелинейной фильтрации. — В сб.: Проблемы гидродинамики и рациональной разработки нефтяных месторождений. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1971, с. 51–70.
10. *Панков В. Н., Панько С. В., Подгайный В. П.* О построении точных решений краевых задач фильтрации с предельным градиентом. — В сб.: Краевые задачи теории фильтрации: Тез. докл. Всесоюз. совещ.-семинара. Ужгород, 1976, с. 34–35.
11. *Домбровский Г. А.* О некоторых системах уравнений первого порядка и соответствующих обобщенных уравнениях Эйлера – Пуассона – Дарбу. — Дифференциальные уравнения, 1978, т. 14, № 1, с. 174–176.
12. *Басак Н. К., Домбровский Г. А.* Об одном законе фильтрации с предельным градиентом. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1983, № 3, с. 83–85.
13. *Ильинский Н. Б., Фомин В. М., Шешуков Е. Г.* О решении одной обратной краевой задачи нелинейной теории фильтрации. — Тр. семинара по краевым задачам. Вып. 8. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1971, с. 86–98.
14. *Енгов В. М.* Об аналогии уравнений плоской фильтрации и продольного сдвига нелинейно-упругих и пластических тел. — ПММ, 1970, т. 34, № 1, с. 162–171.
15. *Домбровский Г. А., Басак Н. К.* О решении задач фильтрации с предельным градиентом. — ПММ, 1983, т. 47, вып. 6, с. 940–946.
16. *Енгов В. М., Панков В. Н., Панько С. В.* К расчету целиков остаточной вязкопластической нефти. — ПММ, 1980, т. 44, вып. 5, с. 847–856.

Томск

Поступила в редакцию
15.III.1984