

УДК 533.6.01.+536.24

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ОБГАРА

ЛУНЕВ В. В., ПОЛЯКОВ И. Н.

В ряде работ, посвященных проблемам разрушения тел при их аэродинамическом нагреве, исследуются свойства так называемых тел стационарной формы (например, [1-4]), т. е. формы, неизменяемой в процессе разрушения. Интерес к таким задачам помимо внутренней потребности теории вызван главным образом распространенным мнением, что произвольное тело при обгаре стремится к некоторому стационарному, не зависящему от первоначальной формы. В общем случае это неверно хотя бы потому, что для заданных условий обтекания и свойств материала существует однопараметрическое семейство тел стационарной формы [4] с зависимостью продольной скорости разрушения $V \sim L^{-n}$ от характерного размера тела, где n — показатель степени в законе теплообмена: $n=0,5$ для ламинарного и $0,2$ для турбулентного. В экспериментах или численных расчетах, лежащих в основе представлений, величина L , как правило, фиксировалась тем или иным образом, например практически отсутствием теплообмена на боковой цилиндрической части притупленной модели [1-3].

Не решая эту проблему в полном объеме, ограничимся рассмотрением более частной задачи: вернется ли со временем форма тела к стационарной при малом начальном его возмущении. В общем случае на этот вопрос возможен лишь отрицательный ответ, так как два стационарных тела с близкими размерами L_1 и $L_2=L_1+\epsilon$, $\epsilon \ll 1$, будут гореть с близкими скоростями V_1 и V_2 и никогда не совпадут между собой. Поэтому, формулируя задачу об устойчивости тел стационарной формы, сразу предположим, что начальные ее возмущения или ограничены конечным передним участком поверхности, или затухают (с пужной скоростью) на большом удалении от носка.

В такой постановке задача сводится к решению линеаризованного уравнения обгара. Оказывается, что задача Коши для этого уравнения (с заданными возмущениями в начальный момент времени $t=0$) в плоском случае ($v=0$) имеет множество решений, зависящих от произвольного распределения искомой функции вдоль оси. Но физически разумное регулярное решение — единственно, и отыскание его сводится в итоге к решению интегрального уравнения. В этом случае рассмотрены симметричные и несимметричные возмущения и показано затухание возмущений, локализованных первоначально на передней части тела.

Осесимметричная задача ($v=1$) имеет единственное решение.

1. Пусть $x(r, t)$ — форма тела в цилиндрической системе координат $\{x, r\}$, где ось симметрии x совпадает с вектором скорости набегающего потока. Тогда с рядом упрощений, обычных для подобной теории (малая толщина прогрета, метод эффективной длины для закона теплообмена, зависимость давления $p=p(\alpha)$ лишь от местного угла наклона тела α , постоянная эффективная энтальпия материала), уравнение обгара примет безразмерный (с помощью характерных размера тела и скорости обгара V) вид [4-5]

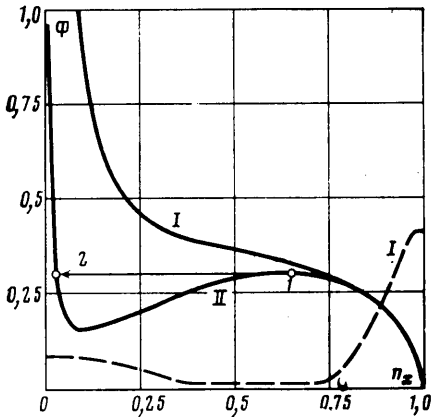
$$x_t = V = \frac{D}{n_x} = \frac{\Phi(x_r)}{\xi^n}, \quad n_x = \frac{1}{\sqrt{1+x_r^2}} > 0 \quad (1.1)$$

$$\xi = r^{-v/(1-n)} \int_{(1-v)r_0}^r \Phi(x_r) r^{v/(1-n)} dr, \quad x_r = \left(\frac{\partial x}{\partial r} \right)_t = \text{ctg } \alpha > 0$$

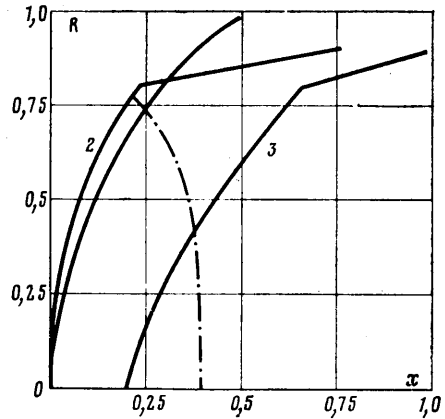
где D — нормальная к поверхности тела, а V — продольная скорости разрушения. Скорость D зависит от закона теплообмена, теплофизических

свойств материала и формы тела, но не зависит от времени t (в случае $D=h(t)D_1$, где D_1 не зависит от t , получим (1.1), заменив D на D_1 и t на τ , где $d\tau/dt=h(t)$).

Функционал ξ в (1.1) учитывает влияние предыстории развития пограничного слоя. В случае несимметричной плоской задачи начало развития пограничного слоя поместим в подвижную (в общем случае) крити-



Фиг. 1



Фиг. 2

ческую точку тупого тела с координатой $r=r_0(t)$, что и учтено в формуле для ξ .

Уравнение (1.1) имеет семейство характеристик, определяющихся в пространстве (t, r, x) уравнениями [5]

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} = \kappa &= -\frac{\partial D}{\partial x_r} \frac{D}{n_x} = -x_r \frac{\Phi'(x_r)}{\Phi(x_r)} \\ \frac{dx}{dt} = \chi &= \frac{D}{n_x} + \kappa x_r, \quad \Phi'(x_r) = \frac{d\Phi}{dx_r} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Очевидно, $\chi > 0$ всегда, а знак κ определяется видом функции $\Phi(x_r)$, свойства которой описаны в [4, 5], а примерный вид показан на фиг. 1 (сплошные линии — сами функции $\Phi(x_r)$, штриховые — их производная $\Phi'(x_r)$).

Стационарным телам отвечает семейство стационарных решений типа

$$x(r, t) = x(r) + Vt, \quad V = D\sqrt{1+x_r^2} = \text{const} \quad (1.3)$$

Контуры таких тел $x=x(r)$ удовлетворяют уже обыкновенному дифференциальному уравнению и для ламинарного или чисто турбулентного (на всем теле) теплообмена показаны на фиг. 2 (кривые 2 и 3 соответственно). Для монотонной кривой $\Phi(x_r)$ эти контуры гладкие (кривая I на фиг. 1), а для не монотонной имеют одну (с переходом $1 \rightarrow 2$ в ней на кривой II, фиг. 1) угловую точку [4, 5].

2. Пусть $x = Vt + x^{(0)}(r)$ — форма исходного стационарного тела, а $x = Vt + x^{(0)}(r) + f(r, t)$ ($|f| \ll 1$) — близкое к нему. Линеаризуя уравнение обгара (1.1), получим для возмущений $f(r, t)$ (пока осесимметричных всюду, кроме п. 5) линейное интегродифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} f_t + \kappa f_r &= -m \frac{\xi^{(1)}}{\xi} \\ m &= -\xi \frac{\partial D}{\partial x} \frac{D}{n} = nV > 0, \quad \xi^{(1)} = r^{-\nu/(1-n)} \int_0^r \Phi' f r^{\nu/(1-n)} dr \end{aligned} \quad (2.1)$$

Все коэффициенты здесь вычисляются по форме исходного тела $x^{(0)}(r)$ и зависят лишь от r . Уравнение (2.1) имеет, естественно, то же семейство характеристик (1.2), что и исходное.

Перейдя от переменных (r, t) к характеристическим переменным (η, t) (где η остается постоянной вдоль характеристик семейства (1.2)), приведем (2.1) к виду

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_\eta = -m \frac{\xi^{(1)}}{\xi} \quad (2.2)$$

В окрестности начальной кривой исходного тела при малых t имеем решение

$$f = f_0(\eta) - \left(m \frac{\xi_1^{(1)}}{\xi}\right)_0 t, \quad r = r_0(\eta) + \kappa_0(\eta)t \quad (2.3)$$

где индексом 0 помечены начальные величины при $t=0$. Это решение наглядно иллюстрирует процесс развития возмущений: они просто сносятся вдоль характеристик (при $\kappa < 0$ вниз, в сторону уменьшения r , при $\kappa > 0$ вверх), деформируясь в зависимости от знака $\xi^{(1)}$. В сходящемся пучке возмущения будут коммулироваться, а в расходящемся пучке — наоборот (причем в первом случае возможно возникновение решений со столь большими производными f_r , что проведенная линеаризация уравнения (1.1) может стать незаконной).

Телу стационарной формы [4, 5] соответствуют лишь восходящие ветви кривой $\Phi(x_r)$, на которых $\kappa < 0$, поэтому все возмущения в этом случае перемещаются к оси симметрии (характеристики показаны на фиг. 2 штрихпунктиром).

На все эти моменты указано еще в работе [5], однако главные трудности решения задач о распространении возмущений состоят в следующем: если малые возмущения поверхности заданы лишь на передней части тела, при $x \leq x_*$, $r \leq r_*$, то, казалось бы, они исчезнут полностью за время прохода на ось $r=0$ характеристики, выходящей из точки (x_*, r_*) , но в действительности за счет влияния функционала $\xi^{(1)}$ возмущения, заданные и отличные от нуля лишь при $x \leq x_*$, будут генерировать возмущения и при $x > x_*$. Выяснению некоторых свойств таких задач и посвящена данная работа.

3. От переменных (t, r) перейдем к $\tau = Vt$ и $\xi = \xi(r)$. Тогда уравнение (2.1) примет вид

$$\frac{df}{d\tau} = f_r - \frac{\Phi'}{1+\nu} f_\xi = - \frac{n}{\xi^{1+\nu}} \int_0^\xi \xi^\nu \Phi' f_\xi d\xi \quad (3.1)$$

Семейство характеристик уравнения (3.1) в плоскости (τ, ξ) подчиняется уравнению

$$\frac{d\xi}{d\tau} = - \frac{\Phi'}{1+\nu}, \quad \Phi' = \Phi'(x_r^{(0)}(r)) \quad (3.2)$$

Поведение решений уравнения (3.1) зависит от вида функции Φ' , по крайней мере от ее знака. Очевидно, $x_r^{(0)} \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$, что дает конечную производную $\Phi' \rightarrow \Phi'(0) \equiv \Phi_*'$ при $r \rightarrow 0$, причем Φ_*' является максимальным значением функции $\Phi'(x_r)$ при изменении $x_r^{(0)}$ вдоль тела (см. пункт на фиг. 1, соответствующий кривой I). Поэтому в этой окрестности, хотя бы для регулярных при $r \rightarrow 0$ ламинарных решений, уравнение (3.1) можно привести к виду

$$f_r - f_\xi = - \frac{n(1+\nu)}{\xi^{1+\nu}} \int_0^\xi \xi^\nu f_\xi d\xi, \quad \xi = (1+\nu) \frac{\tau}{\Phi_*'} \quad (3.3)$$

с прямыми характеристиками $\tau = \xi_0 - \xi$, где ξ_0 — значение ξ на рассматриваемой характеристике при $\tau=0$.

Для более широкой области уравнение (3.3) будем рассматривать как модельное по отношению к (3.1), что, во-первых, оправдано для получения некоторых обзримых результатов хотя бы качественного характера вследствие очевидных трудностей аналитического исследования полного уравнения (3.1), а, во-вторых, правая часть (3.3) является оценкой сверху правой части уравнения (3.1) или скорости $df/d\tau$ изменения возмущений вдоль характеристики.

В плоском случае $\nu=0$ это уравнение утрачивает, казалось бы, свой интегродифференциальный характер и сводится к виду (3.4) или вдоль характеристик — к (3.5)

$$f_{\tau} - f_{\xi} = -\frac{n}{\xi}(f - f_*), \quad f_* = f_*(\tau) = f(\tau, 0) \quad (3.4)$$

$$\frac{df}{d\xi} = n \frac{f - f_*}{\xi}, \quad \frac{d\xi}{d\tau} = -1, \quad \tau + \xi = \xi_0 = \text{const} \quad (3.5)$$

Здесь $f_*(\tau)$ — неизвестное заранее распределение решения на оси $r = \xi = 0$, которое должно в принципе определяться из решения задачи с начальными данными при $\tau=0$ (поскольку других просто нет). Однако это оказывается невозможным, так как уравнение (3.4) — релаксационного типа и независимо от начальных данных при $\tau=0$ его решение $f \rightarrow f_*(\tau)$, если $\xi \rightarrow 0$, при произвольной заданной функции $f_*(\tau)$, неопределяемой в рамках уравнений (3.4). Например, при постоянной f_* имеем

$$f - f_* = (f_0 - f_*)\xi^n, \quad f_0 = f(0, \xi_0) \quad (3.6)$$

Такая неединственность решения задачи Коши для уравнения (3.3) носит принципиальный характер и подтверждается наличием решений типа

$$f(\tau, \xi) = C \left\{ \tau + \frac{1}{1-n} [\xi - \xi^n(\tau + \xi)]^{1-n} \right\} \quad (3.7)$$

удовлетворяющих тривиальным данным $f_0=0$, равных на оси $f(\tau, 0) = f_*(\tau) = C\tau$ с произвольной постоянной C .

Заметим, однако, что в приведенных примерах решения вблизи оси имеют при $n < 1$ особенность типа $f_{\xi} \sim C\xi^{n-1}$ и разложение (2.1) уже не будет на них удовлетворять исходному линейному уравнению, решение которого при гладких начальных данных вследствие конечности скорости уноса V всегда имеет $x_r \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$. Поэтому, накладывая требование ограниченности производных, необходимо в решениях (3.6) положить $f_0 = f_*$, а в (3.7) — $C=0$.

В общем случае при произвольном начальном возмущении f_0 и произвольной функции $f_*(\tau)$, проводя интегрирование (3.3) вдоль характеристик, получим общее решение этого уравнения при $\nu=0$ в виде

$$f(\tau, \xi) = f_*(\tau) + [f_0(\tau + \xi) - f_0(0)] \left(\frac{\xi}{\tau + \xi} \right)^n + \xi^n \int_{\tau + \xi}^{\xi} \xi_1^{-n} f_*'(\tau + \xi - \xi_1) d\xi_1 \quad (3.8)$$

Заметим, что сумма $\tau + \xi = \xi_0$ постоянна вдоль характеристики. Поскольку здесь функция $f_*(\tau)$ произвольна, для отыскания ее наложим, как и выше, требование: $x_r \rightarrow 0$ или $f_{\xi} \sim f/r \sim \text{const}$ при $r \rightarrow 0$.

Дифференцируя (3.8) по τ и ξ , получим

$$f_{\tau} = f_*'(\tau) + f_0'(\tau + \xi) \frac{\xi^n}{(\tau + \xi)^n} - n[f_0(\tau + \xi) - f_0(0)] \frac{\xi^n}{(\tau + \xi)^{n+1}} - f_*'(0) \frac{\xi^n}{(\tau + \xi)^n} + \xi^n \int_{\tau + \xi}^{\xi} \xi_1^{-n} f_*''(\tau + \xi - \xi_1) d\xi_1 \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned}
f_{\tau} = f_{*}'(\tau) + \frac{n}{\xi^{1-n}} \left[\frac{f_0(\tau+\xi) - f_0(0)}{(\tau+\xi)^n} + \int_{\tau+\xi}^{\xi} \xi_1^{-n} f_{*}'(\tau+\xi-\xi_1) d\xi_1 \right] + \\
+ \xi^n \int_{\tau+\xi}^{\xi} \xi_1^{-n} f_{*}''(\tau+\xi-\xi_1) d\xi_1 - f_{*}'(0) \frac{\xi^n}{(\tau+\xi)^n} + \\
+ f_0'(\tau+\xi) \frac{\xi^n}{(\tau+\xi)^n} - n [f_0(\tau+\xi) - f_0(0)] \frac{\xi^n}{(\tau+\xi)^{n+1}} \quad (3.10)
\end{aligned}$$

Производная f_{τ} конечна при $\xi \rightarrow 0$, но f_{τ} будет ограничена лишь при обращении в нуль коэффициента при ξ^{n-1} , что приводит к следующему интегральному уравнению для функции f_{τ} :

$$\frac{f_0(\tau) - f_0(0)}{\tau^n} = \int_0^{\tau} f_{*}'(\eta) \frac{d\eta}{(\tau-\eta)^n} \quad (3.11)$$

Используя (3.11), решение (3.8) можно привести к более компактному виду

$$f(\tau, \xi) = f_*(\tau) + \xi^n \int_0^{\xi} \xi_1^{-n} f_{*}'(\tau+\xi-\xi_1) d\xi_1 \quad (3.12)$$

Уравнение (3.11) — частный случай общего интегрального уравнения Вольтерра 1-го рода, имеющее при $n < 1$ решение, общий вид которого приведен в [6]. Если функция $f_0(\eta)$ удовлетворяет в области определения условию Гельдера степени $n + \alpha$ ($\alpha > 0$), то решение (3.11) представимо в виде

$$f_{*}'(\tau) = \frac{(1-n) \sin(\pi n)}{\pi} \int_0^{\tau} \frac{f_0(\tau) + f_0(\eta)}{\eta^n (\tau-\eta)^{2-n}} d\eta \quad (3.13)$$

Формулы (3.12) и (3.13) в совокупности представляют собой решение задачи Коши для уравнения (3.3) с ограниченными производными, и это решение единственно.

4. Оценим теперь скорость затухания со временем решения уравнения (3.3), отвечающего начальной функции $f_0(\xi)$, ограниченной вместе с производной и убывающей вдали по степенному закону

$$\begin{aligned}
|f_0(\xi)| < M, \quad 0 \leq \xi \leq \xi_*, \quad |f_0(\xi)| < M \left(\frac{\xi_*}{\xi} \right)^m, \quad \xi > \xi_* \\
|f_0'(\xi)| < \frac{M}{\xi_*}, \quad M = \text{const}, \quad m > 0 \quad (4.1)
\end{aligned}$$

Для этого при $\tau > \tau_*$, где τ_* — время сгорания передней части тела размера ξ_* , разобьем область интегрирования $[0, \tau]$ в (3.13) на две, $[0, \tau_*]$ и $[\tau_*, \tau]$, и оценим оба слагаемых интеграла $f_{*}'(\tau) = J_1 + J_2$ по отдельности. В результате получим

$$|J_1| < \frac{2M(1-n)}{\pi \tau} \int_0^{\tau_*} \frac{dz}{z^n (1-z)^{2-n}} < \text{const} \cdot M \left(\frac{\tau_*}{\tau} \right)^{1-n} \frac{1}{\tau}, \quad z_* = \frac{\tau_*}{\tau} \quad (4.2)$$

$$|J_2| \leq \frac{1-n}{\pi} \left| \int_{\tau_*}^{\tau} \frac{f_0(\tau) - f_0(\eta)}{\eta^n (\tau-\eta)^{2-n}} d\eta \right| < \frac{2M(1-n) z_*^m}{\pi \tau} \int_{z_*}^1 \frac{(1-z)^m dz}{z^{m+n} (1-z)^{2-n}}$$

Последний интеграл в (4.2) сходится при $\tau \rightarrow \infty$ ($z_* \rightarrow 0$), если $m < 1-n$, и тогда $|J_2| \sim \tau_*^m \tau^{-(m+1)}$, определяя тем самым порядок убывания производной $f_*'(\tau)$. При $m \geq 1-n$ этот интеграл расходится, если $z_* \rightarrow 0$, но умножение его на z_*^m дает при $z_* \rightarrow 0$ $|J_2| \sim \tau_*^{1-n} \tau^{n-2} \sim |J_1|$.

Следовательно, в целом

$$|f_*'(\tau)| < \text{const } M \left(\frac{\tau_*}{\tau} \right)^\omega \frac{1}{\tau} \quad (4.3)$$

$$\omega = m \quad (m \leq 1-n) \quad \omega = 1-n \quad (m > 1-n).$$

Поскольку производная $f_*'(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$, функция $f_*(\tau)$ стремится к некоторой постоянной $f_{*\infty}$ по закону

$$|f_*(\tau) - f_{*\infty}| < \text{const } M \left(\frac{\tau_*}{\tau} \right)^\omega \quad (4.4)$$

В то же время, с помощью (4.3), из (3.10) будем иметь

$$|f(\tau, \xi) - f_*(\tau)| < \text{const } M \left(\frac{\tau_*}{\tau} \right)^\omega \frac{\xi}{\tau} \quad (4.5)$$

Из оценок (4.4), (4.5) следует, что с возрастанием времени (точнее, величины обгара $\tau = Vt$) передняя часть тела возрастающего размера $\xi \sim \tau$, получившего начальное возмущение поверхности, стремится, как $\tau^{-\omega}$, к стационарной форме, отличающейся от исходной лишь возможным постоянным продольным сдвигом $f_{*\infty}$. Форма же передней части этого тела $\xi \leq \xi_* = \tau_*$ устанавливается в силу (4.5) на порядок быстрее, чем постоянство сдвига, что является важным свойством процесса обгара тела.

5. Для плоской задачи в аналогичном приближении рассмотрим случай несимметричных начальных возмущений: $f_0^+(\xi)$ на верхней, $f_0^-(\xi)$ на нижней полуплоскости и $f_0^+(0) = f_0^-(0)$. Очевидно, что учет развития этих возмущений независимо для каждой полуплоскости в общем случае приведет к недопустимому разрыву решения на оси, поэтому для устранения этого разрыва следует учесть поперечный дрейф точки торможения возмущенного тела.

Введем систему координат $\{t, z, x\}$, ось x которой проходит через подвижную точку торможения. Если $r_0(t)$ — траектория последней, то $z = r - r_0(t)$ для верхней полуплоскости и $z = r + r_0(t)$ — для нижней. В подвижной системе координат представим форму тела в виде $x = Vt + x^{(0)}(z) + f(t, z)$. Предполагая малость возмущений f и r_0 , их производных, линейаризуем уравнение обгара (1.1): вместо (2.1) получим

$$f_t + \kappa f_r = -m \frac{\xi^{(1)}}{\xi} \pm x_r^{(0)}(r) r_0'(t) \quad (5.1)$$

Знак плюс соответствует верхней полуплоскости, минус — нижней; обозначения совпадают с (2.1).

Вместо (3.3) в том же приближении получим уравнение

$$f_\tau - f_t = -\frac{n}{r} \int_0^\xi f_t d\xi \pm \alpha \xi^n r_0'(\tau), \quad \alpha = \frac{V}{(\Phi_*')^{1-n}} \quad (5.2)$$

При написании (5.2) учтено, что из предположения $\Phi'(x_r^{(0)}) = \Phi_*' = \text{const}$ следует $V \xi^n = \Phi(x_r^{(0)}) = \Phi_*' x_r^{(0)}$.

Общее решение полученного уравнения получается из (3.8) с учетом дополнительного члена в правой части (5.2) и несимметричных начальных условий

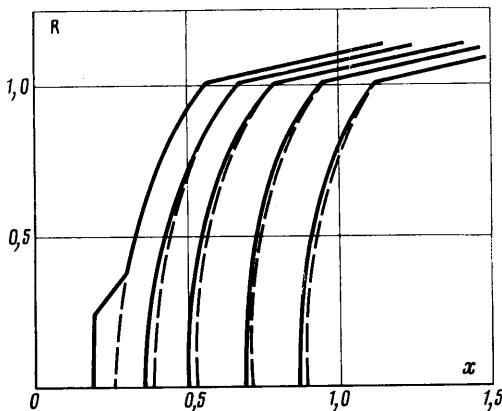
$$f^\pm(\tau, \xi) = f_*(\tau) + [f_0^\pm(\tau + \xi) - f_0^*] \frac{r^n}{(\tau + \xi)^n} + \xi^n \int_{\tau + \xi}^\tau \Psi_\pm(\tau, \xi, \eta) \frac{d\eta}{\eta^n} \\ \Psi_\pm(\tau, \xi, \eta) = f_*'(\tau + \xi - \eta) \mp \alpha \eta^n r_0'(\tau + \xi - \eta) \quad (5.3)$$

Требование ограниченности решений $f^{\pm}(\tau, \xi)$ и их первых производных при $\xi \rightarrow 0$ приводит в данном случае как к уравнению, определяющему $f_*(\tau)$ (5.4), так и к уравнению траектории движения точки торможения возмущенного тела (5.5)

$$\frac{f_0^+(\tau) + f_0^-(\tau) - 2f_{0*}}{2\tau^n} = \int_0^1 f_{*'}(\eta) \frac{d\eta}{(\tau - \eta)^n} \quad (5.4)$$

$$r_0(\tau) = \frac{f_0^-(\tau) - f_0^+(\tau)}{2\alpha\tau^n} \quad (5.5)$$

Уравнение (5.4) заменой $(f_0^+(\tau) + f_0^-(\tau))/2$ на $f_0(\tau)$ сводится к уравнению (3.11), поэтому выводы, полученные при исследовании затухания возмущений, полностью переносятся на этот случай. Кроме того, из (5.5) следует, что смещение точки торможения исчезает в процессе обгара.



Фиг. 3

6. Отмеченная неединственность решения присуща только плоским телениям; в осесимметричном случае решение единственно. Рассмотрим уравнение (3.1): используя значение переменной ξ при $\tau=0$ в качестве характеристической переменной, проинтегрируем его правую часть

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \tau} \right)_{\xi_0} + n \frac{\Phi'}{\xi} f = \frac{n}{\xi^2} \int_0^{\xi} f d(\xi \Phi') \quad (6.1)$$

Преобразованное уравнение (6.1) можно свести к интегральному, учитывая при этом начальное условие $f=f_0(\xi_0)$ при $\tau=0$

$$f(\tau, \xi) = f_0(\xi_0) \left(\frac{\xi}{\xi_0} \right)^{2n} + 2n\xi^{2n} \int_{\xi}^{\xi_0} \xi^{-2(n+1)} \int_0^{\xi} f d(\xi \Phi') \frac{d\xi}{\Phi'} \quad (6.2)$$

Отметим, что внутренний интеграл в (6.2) вычисляется вдоль мгновенной формы тела, а внешний — вдоль рассматриваемой характеристики ξ_0 .

Интегральное уравнение (6.2) позволяет оценить амплитуду малых возмущений

$$|f(\tau, \xi)| \leq \max_G |f| + (|f_0(\xi_0)| - \max_G |f|) \left(\frac{\xi}{\xi_0} \right)^{2n} \quad (6.3)$$

Область G — область, ограниченная характеристикой ξ_0 и мгновенными формами стационарного решения, соответствующими начальному и текущему моментам времени. Неравенство (6.3) выполняется, в частности, для

точки (τ_m, ξ_m) области G : $|f(\tau_m, \xi_m)| = \max_G |f|$, что позволяет сделать

вывод

$$\max |f(\tau, \xi)| \leq \max |f_0(\xi)| \quad (6.4)$$

Согласно (6.4), амплитуда малых возмущений $f(\tau, \xi)$ стационарного решения уравнения (1.1) в осесимметричном случае достигает максимума на начальной форме. Из этого следует единственность решения уравнения (6.1): нулевым начальным данным $f_0 = 0$ соответствует тривиальное решение $f(\tau, \xi) = 0$.

Результаты численного анализа, выполненные согласно методу, предложенному в работе [8], показывают, что и в осесимметричном случае малые возмущения стационарного решения затухают. На фиг. 3 приведена эволюция малых возмущений стационарного решения, соответствующего чисто ламинарному теплообмену.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Simpkins P. J.* On the stable shape of subliming bodies in a high-enthalpy gas stream. — *J. Fluid Mech.*, 1963, v. 15, № 1, p. 119–132.
2. *Мурзинов И. Н.* О форме тел, разрушающихся под действием интенсивного нагревания при движении в атмосфере. — *Изв. АН СССР. Механика*, 1965, № 4, с. 36–40
3. *Чудецкий Ю. В., Широков Н. Н., Экономов А. П.* Экспериментальное исследование взаимодействия высокотемпературного потока с материалами. — В кн.: *Аэромеханика и газовая динамика*. М.: Наука, 1976, с. 137–149.
4. *Воронкин В. Г., Лунев В. В., Никулин А. Н.* О стационарной форме тел при их разрушении за счет аэродинамического нагрева. — *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1978, № 2, с. 138–146.
5. *Лунев В. В.* Некоторые свойства и решения уравнения абляции. — *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1977, № 3, с. 95–102.
6. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 2. М.—Л.: Гостехиздат, 1951. 544 с.
7. *Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике*. М.: Машиностроение, 1975. 623 с.

Москва

Поступила в редакцию
20.VI.1984