МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 · 1985

УДК 532.597:519.6+612.13

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДАВЛЕНИЯ В ТРУБКАХ ИЗ АКТИВНОГО МАТЕРИАЛА

СКОБЕЛЕВА И. М.

Рассматривается в квазиодномерном безынерционном приближении осесимметричное течение ньютоновской жидкости в трубке конечной длины из нелинейного активного материала, обладающего способностью уменьшать деформации в ответ на увеличение растягивающих напряжений [1, 2]. Изучается влияние частоты и амплитуды вынуждающих колебаний давления на входе трубки на ее расходную характеристику и на поведение трубки в зависимости от ее длины и некоторых реологических параметров.

Первые попытки изучения в рамках указанной модели течения при нестационарных условиях на концах трубки и в окружающей ее среде содержатся в [3, 4]. В работе [5] построено общее решение такой задачи при внешних периодических воздействиях малой амплитуды. В настоящей заметке анализируются некоторые результаты численного решения аналогичной задачи для широкого диапазона изменений частоты и амплитуды колебаний давления на входе трубки.

1. Рассмотрим неустановившееся течение несжимаемой жидкости с постоянной вязкостью μ в трубке переменного радиуса $R^\circ(x^\circ, t^\circ)$ и конечной длины L. Радиус трубки $R^\circ(x^\circ, t^\circ)$ и трансмуральное давление $p^\circ(x^\circ, t^\circ)$ (равное разности среднего по сечению давления в жидкости и принятого постоянным давления вне трубки) связаны соотношениями, которые в безразмерном виде принимают форму [6]

$$R\frac{\partial R}{\partial t}=\frac{F}{4}\frac{\partial}{\partial x}\left(R^4\frac{\partial p}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t}=\beta\frac{\partial p}{\partial t}-\frac{1}{\gamma}[R-P_3(p)] \tag{1.1}$$

$$F=\frac{r_0^2 p_*^\circ t_*}{4\mu L^2},\qquad \beta=\frac{p_*^\circ}{K},\qquad \gamma=\frac{t_r}{t_*}$$

Здесь сохранены обозначения статьи [6], лишь радиус трубки и время ретардации материала стенки обозначены соответственно через R и t_r. Полином 3-й степени $P_3(p^\circ)$ соответствует S-образной статической характеристике трубки [6]. Пусть входное давление периодически меняется со временем с частотой ω, а выходное сохраняется постоянным, что в безразмерном виде представляется как

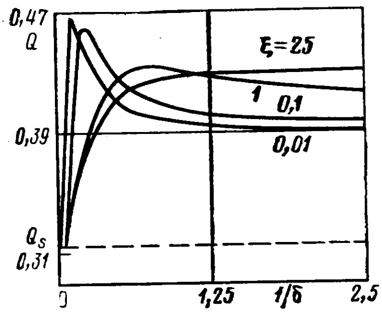
$$p(0,t)=p_+(1+h\sin 2\pi\Omega t),\quad p(1,t)=p_- \tag{1.2}$$

В качестве начальных условий взяты [6]

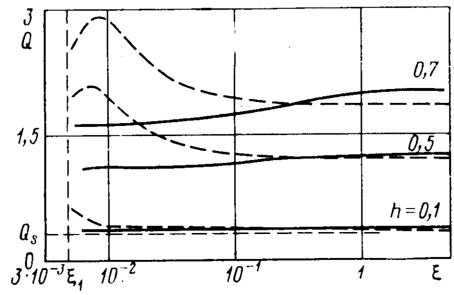
$$R(x,0)=R_0=\text{const},\quad p(x,0)=p_+-x \tag{1.3}$$

За p_*° принято $p_+^\circ-p_-^\circ$. В задаче имеется кроме характерного гидродинамического времени t_g и времени ретардации материала стенки t_r еще период вынуждающих колебаний входного давления $t_h=1/\omega$. Следовательно, Ω в (1.2) имеет вид $\Omega=t_*/t_h$. За t_* имеет смысл принимать $\min\{t_g, t_r, t_h\}$. Если ввести наряду с отношением времени ретардации к гидродинамическому времени $\xi=t_r/t_g$ еще параметр δ, представляющий собой $\delta=t_h/t_r$, то при $t_*=t_r$ получим в (1.1) $F=\xi$, $\gamma=1$. Если $t_*=t_g$, то $F=1$, $\gamma=\xi$, а при $t_*=t_h$ имеем $F=\xi\delta$, $\gamma=1/\delta$.

Решение системы (1.1)—(1.3) зависит кроме указанных в [6] девяти безразмерных параметров еще от h и δ. Система решалась численно на ЭВМ БЭСМ-6 методом прогонки с итерациями. Было принято, как и в [6], $r_0=2\cdot10^{-3}$ см, $\mu=0{,}03$ г/см с, $p_+{}^\circ=80$ мм рт. ст., $p_-{}^\circ=75$ мм рт. ст. Расчеты проводились при β и ξ, обеспечивающих при $h=0$ стационарный ре-



Фиг. 1



Фиг. 2

жим течения [6], т. е, при $\beta=0{,}5$ и $\xi>\xi_1=0{,}0044$, а именно при $\xi=0{,}01$; 0,1; 1; 25 (что соответствует, например, при $t_r=5$ с значениям $L=10$; 3,3; 1; 0,2 см). Было найдено, что при $h\neq0$ система (1.1)—(1.3) имеет периодические (при $t\to\infty$) решения с периодом, равным периоду вынуждающих колебаний. В качестве расходной характеристики рассматривался средний за период расход Q. Решение при $t\to\infty$, как и в [6], оказалось не зависящим от начальных условий.

2. Целью первой серии расчетов было определение влияния частоты вынуждающих колебаний давления на расходную характеристику трубки Q и на поведение трубки в зависимости от ее длины. Значения δ менялись от 200 до 0,02, что соответствует изменению частоты ω от 0,001 до 10 с$^{-1}$. Полагалось $h=0{,}05$, что в любой момент времени обеспечивало сохранение условия $p(0,t)>p(1,t)$.

На фиг. 1 видно, что расход Q — немонотонная функция частоты ω для всех исследованных длин трубки. Было обнаружено существование малого $\omega_1(\xi)$, такого, что при $\omega<\omega_1$ расход снижается по отношению к своему стационарному значению Q_s при $h=0$ на величину порядка 0,1%, затем при $\omega=\omega_1$ становится равным Q_s и далее с ростом ω увеличивается до $Q=Q_{\max}(\xi)$ при $\omega=\omega_2$, причем ω_2 уменьшается, а $Q_{\max}$ растет с увеличением длины трубки. Эффект снижения расхода при малых частотах получен аналитически в [5]. Можно показать, что $\omega_1(\xi)$, как и в [5], по порядку величины совпадает с частотой колебаний в консервативной волне [2]. С помощью фиг. 1 можно оценить для любой частоты влияние вязкоупругих свойств стенки на расход в зависимости от длины трубки.

При малых частотах давление в трубке колеблется синхронно с входным давлением, но имеет сдвиг по фазе φ относительно колебаний радиуса (например, при $\xi=0{,}1$ и $\omega=0{,}01$ с$^{-1}$ он составляет около $3\pi/2$). С ростом ω величина φ уменьшается (так, при $\xi=25$ и $\omega=0{,}5$ с$^{-1}$ радиус и давление колеблются почти синхронно), но в колебаниях давления внутри трубки возникает запаздывание относительно входного давления (при $\xi=25$ и $\omega=10$ с$^{-1}$ оно доходит до $2\pi/5$). В течение цикла трубка непрерывно меняет свою форму от расширяющейся при $p(0,t)_{\min}$ к сужающейся при $p(0,t)_{\max}$. Волн, распространяющихся вдоль трубки, не наблюдалось.

При всех исследованных ξ, начиная с некоторой частоты $\omega_*(\xi)$, в окрестности выходного сечения формируется стационарная зона, нечувствительная к колебаниям давления на входе. С ростом ω граница этой зоны смещается вверх по потоку (за границу зоны принято сечение, в котором величины давления и радиуса отличаются от стационарных больше чем на 0,1%). Более подробный анализ результатов, отражающих этот факт, приводит к выводу, что длина L_* участка, чувствительного к колебаниям входного давления, обратно пропорциональна числу Струхаля Sh, равному $L\omega/V$, где V — характерная скорость жидкости ($V=L/t_g$ и, следовательно, $\mathrm{Sh}=t_g/t_h$)

$$\frac{L_*}{L}=\frac{\mathrm{Sh}_*}{\mathrm{Sh}} \tag{2.1}$$

где Sh_* — значение Sh, при котором в малой окрестности выходного сечения возникает зона стационарного течения. Значит, при $\mathrm{Sh}\leqslant\mathrm{Sh}_*$ вся трубка чувствительна к колебаниям входного давления, а при $\mathrm{Sh}>\mathrm{Sh}_*$ справедлива формула (2.1) и $L_*/L<1$. Вообще говоря, обнаружив путем численного эксперимента наличие L_*, можно получить (2.1) из соображений теории размерности. В общем случае, по-видимому, $\mathrm{Sh}=\mathrm{Sh}_*(p_+, p_-, \beta, h)$, однако оценка степени влияния каждого из этих параметров возможна лишь после дополнительного исследования.

3. Для выяснения влияния амплитуды колебаний входного давления на расходную характеристику трубки в зависимости от ее длины L и времени ретардации материала ее стенки t_r была проведена вторая серия расчетов, в которой было принято $\beta=1$ и $\omega=1$ с$^{-1}$. Параметр ξ менялся в диапазоне значений, обеспечивающих при $h=0$ стационарный режим течения при $t\to\infty$ (т. е. $\xi>\xi_1$), а амплитуда колебаний давления h варьировалась в пределах от 0 до 0,95.

На фиг. 2 представлена зависимость расходной характеристики от параметра ξ для некоторых h. Сплошные кривые соответствуют трубкам из одного и того же материала, но разной длины. На штриховых кривых выполняется условие $\xi\delta=t_h/t_g=\mathrm{const}$, что описывает трубки одинаковой длины из разного материала, причем меньшему ξ соответствует меньшее t_r. В точках пересечения каждой пары кривых для одного и того же h значения L и t_r одинаковы ($L=2$ см, $t_r=5$ с).

Из фиг. 2 видно, в частности, что в трубках, длина которых близка к критическому значению, соответствующему ξ_1, чувствительность расходной характеристики к колебаниям входного давления снижается по сравнению с более короткими трубками, причем при умеренных h этот эффект заметнее. Аналогичный вывод можно сделать на основе расчетов п. 2 для $h=0{,}05$ при $\omega\geqslant1$ с$^{-1}$ (при меньших ω функция $Q(\xi)$ немонотонна).

Анализ результатов обеих серий расчетов приводит к заключению, что периодические колебания давления (даже с малой частотой) на входе трубки из нелинейного активного материала могут существенно влиять на расходную характеристику трубки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Регирер С. А., Руткевич И. М., Усик П. И.* Модель сосудистого тонуса.— Механика полимеров, 1975, № 4, с. 585–589.
2. *Регирер С. А., Руткевич И. М.* Волновые движения жидкости в трубках из вязкоупругого материала. Волны малой амплитуды.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 1, с. 45–53.
3. *Киреева Е. Е.* Вынужденные колебания малой амплитуды в трубке с миогенно активной стенкой.— В кн.: Тез. докл. 3-й Всесоюз. конф. по проблемам биомеханики. Рига, 1983, т. 1, с. 218–219.
4. *Скобелева И. М.* О следствиях пульсовых колебаний давления в малом кровеносном сосуде.— В кн.: Тез. докл. 3-й Всесоюз. конф. по проблемам биомеханики. Рига, 1983, т. 1, с. 234–235.
5. *Киреева Е. Е., Регирер С. А.* Волновые движения жидкости в трубках из вязкоупругого материала. Вынужденные колебания.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1984, № 4, с. 94–99.
6. *Скобелева И. М.* О некоторых режимах течения жидкости в трубках из вязкоупругого материала.— Докл. АН СССР, 1983, т. 272, № 3, с. 564–566.

Москва

Поступила в редакцию
21.V.1984