МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 1985

УДК 532.546+622.276

АНАЛИЗ ПЕРЕХОДА ОТ ПОСТОЯННОГО ДЕБИТА НА ФИКСИРОВАННОЕ ЗАБОЙНОЕ ДАВЛЕНИЕ ПРИ УПРУГОМ РЕЖИМЕ ДОБЫЧИ НЕФТИ

АЛИШАЕВ М. Г.

Упругий режим фильтрации пластовых жидкостей хорошо изучен в литературе [1, 2] и результаты исследований нашли широкое применение в практике разработки нефтяных месторождений [3, 4]. Ниже рассматривается новая задача о снижении дебита скважины при фиксированном забойном давлении после того, как она проработает некоторое время с постоянным дебитом. Такого рода задачи имеют практический смысл. Например, в процессе эксплуатации нежелательным явлением считается разгазирование призабойной зоны пласта. Если начнется разгазирование, фильтрационное сопротивление резко возрастает и дебиты скважин значительно падают. После снижения давления на забое до значения давления насыщения уже нельзя допустить его дальнейшего понижения во избежание выделения газа в призабойной зоне пласта, забойное давление желательно удерживать выше давления насыщения.

1. Для бесконечного по простиранию однородного пласта математическая формулировка упомянутой выше задачи в физических переменных имеет вид

$$\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right),\qquad r>r_c,\qquad t>0$$

$$p(r,\,0)=p(\infty,\,t)=p_0,\qquad p(r_c,\,t)=p_c(t)\tag{1.1}$$

$$-\frac{kh}{\mu}\left(2\pi r\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{r=r_c}=Q(t)<0$$

Обозначения здесь общепринятые, из двух функций $p_c(t)$ и $Q(t)$ одна задана, другая ищется. Будем считать, что в интервале $0<t<t_*$ задана $Q(t)$, значение которой постоянно и равно $-Q_0$, причем момент времени t_* определяется из условия равенства забойного давления критическому значению p_* (например, давлению насыщения). Для интервала $0<t<t_*$ ищется функция $p_c(t)$, а при $t>t_*$ искомой является функция $Q(t)$.

Для сокращения письма перейдем к безразмерным переменным, приняв за характерный линейный размер радиус скважины r_c, а за характерный перепад давления — разность между начальным пластовым давлением p_0 и фиксируемым на забое критическим значением p_*. Сохраним те же обозначения и для безразмерных переменных

$$\frac{r}{r_c}\to r,\qquad \frac{\varkappa t}{r_c^2}\to t,\qquad \frac{p_0-p}{p_0-p_*}\to p,\qquad \frac{\mu Q}{kh(p_0-p_*)}\to q\tag{1.2}$$

Новые переменные теперь удовлетворяют условиям $r>1$, $t>0$, $0\leqslant p\leqslant 1$, $q<0$.

Точное решение этой задачи находится с помощью преобразования Лапласа. В интервале $0<t<t_*$ при заданном $q(t)=-q_0$ решение совпадает со случаем, когда для всех $t>0$ берется $q(t)=-q_0$. Для изображения по

Лапласу безразмерного давления ограниченное на бесконечности решение представляется через функции Макдональда [6]

$$P(r,s)=\int_0^\infty e^{-st}p(r,t)\,dt=\frac{q_0}{2\pi s\sqrt{s}}\frac{K_0(r\sqrt{s})}{K_1(\sqrt{s})} \qquad (1.3)$$

В начале координат изображение имеет особенность вида $\ln(\sqrt{s})/s$. Непосредственно применить общую формулу обращения [7] к (3) не удается. Но делению на параметр преобразования s соответствует интегрирование оригинала по переменной t. Можно сначала в знаменателе (1.3) отбросить целую степень s, найти оригинал, затем его проинтегрировать по времени столько раз, каков показатель отброшенной степени. Опуская выкладки, приводим лишь конечный результат для давления

$$p(r,t)=\frac{q_0}{\pi^2}\int_0^\infty\frac{N_0(\omega r)J_1(\omega)-N_1(\omega)J_0(\omega r)}{J_1^2(\omega)+N_1^2(\omega)}\frac{1-e^{-\omega^2 t}}{\omega^2}\,d\omega \qquad (1.4)$$

Здесь J_ν, N_ν — функции Бесселя и Неймана.

Будем интересоваться лишь поведением давления на забое. При $r=1$ числитель первой дроби в (1.4) значительно упрощается и составляет $2/\pi\omega$. Для безразмерного забойного давления получается

$$p(1,t)=\frac{2q_0}{\pi^3}\int_0^\infty\frac{1-e^{-\omega^2 t}}{J_1^2(\omega)+N_1^2(\omega)}\frac{d\omega}{\omega^3} \qquad (1.5)$$

Несобственный интеграл (1.5) не имеет особенности в нуле, подынтегральная функция при $\omega\to 0$ обращается в нуль. На бесконечности интеграл является медленно сходящимся, для больших ω сходимость такого же порядка, что и для интеграла от $1/\omega^2$. Верхний предел при непосредственном счете приходится брать довольно большим для обеспечения заданной точности. Такова же сходимость и общего решения (1.4). Вычисление этих интегралов требует специальных методов, ускоряющих их сходимость.

Можно получить приближенное представление решения (1.4) в виде быстро сходящихся интегралов, если изображение (1.3) заменить его приближением или несколько изменить постановку задачи.

Для малых s, которым соответствуют большие времена, можно $K_1(\sqrt{s})$ заменить на $1/\sqrt{s}$. Тогда обращение находится по таблицам и представляется формулой, широко применяемой в теории упругого режима [2]

$$p(r,t)=-\frac{q_0}{4\pi}Ei\left(-\frac{r^2}{4t}\right)=\frac{q_0}{4\pi}\int_0^t\exp\left(-\frac{r^2}{4\tau}\right)\frac{d\tau}{\tau} \qquad (1.6)$$

Это же решение (1.6) получается, если несколько изменить постановку задачи — пренебречь радиусом скважины и считать, что в начале координат помещен точечный сток интенсивности q_0. Остается, однако, погрешность, вносимая заменой (1.5) на (1.6), а также неудовлетворенность тем, что значения забойного давления расположены вблизи особенности, где погрешности могут быть заметными.

Изменим несколько постановку задачи, с тем чтобы получить хорошо сходящееся решение типа (1.6) с учетом конечности радиуса скважины. Присоединим к рассматриваемой области и внутренность круга радиуса r_c, а точечные стоки будем считать распределенными равномерно по его окружности. Этим самым к упругому запасу нефти всего пласта прибавляется еще упругий запас нефти цилиндрика радиуса r_c. С инженерной точки зрения такая постановка задачи является уже вполне приемлемой и надежной.

Пользуясь известным решением для кольцевого линейного источника [8], для давления имеем

$$p(r,t)=\frac{q_0}{4\pi}\int_0^t \exp\left(-\frac{1+r^2}{4\tau}\right) I_0\left(\frac{r}{2\tau}\right)\frac{d\tau}{\tau} \tag{1.7}$$

Здесь I_0 — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка, все величины безразмерные.

Для забойного давления при $r=1$ по формулам (1.6) и (1.7) имеем два различных приближения точного решения (1.5)

$$p_{c1}(t)=\frac{q_0}{4\pi}\int_0^t \exp\left(-\frac{1}{4\tau}\right)\frac{d\tau}{\tau}, \quad p_{c2}(t)=\frac{q_0}{4\pi}\int_0^t \exp\left(-\frac{1}{2\tau}\right) I_0\left(\frac{1}{2\tau}\right)\frac{d\tau}{\tau} \tag{1.8}$$

При больших значениях τ подынтегральная функция в обеих приближениях может быть принята равной $1/\tau$, так что приращения интегралов с ростом t будут совпадать с приращениями $\ln t$. И для небольших времен формулы (1.8) дают также не сильно отличающиеся друг от друга значения. В табл. 1 приведены значения функции $\Phi(t)=(4\pi/q_0)p_c(t)$, вычисленные соответственно по формулам (1.8) и (1.5) методом Гаусса с автоматическим выбором шага, обеспечивающим точность в четыре десятичных знака.

Таблица 1

$\ln t$	Φ	Φ_1	Φ_2	$\ln t$	Φ	Φ_1	Φ_2
0,0	1,480	1,044	1,228	5,0	5,707	5,811	5,810
0,5	1,791	1,455	1,579	5,5	6,200	6,310	6,309
1,0	2,136	1,899	1,979	6,0	6,694	6,810	6,808
1,5	2,514	2,364	2,414	6,5	7,191	7,309	7,308
2,0	2,920	2,843	2,873	7,0	7,689	7,809	7,307
2,5	3,350	3,330	3,347	7,5	8,187	8,309	8,307
3,0	3,798	3,821	3,832	8,0	8,686	8,809	8,807
3,5	4,262	4,317	4,322	8,5	9,186	9,309	9,307
4,0	4,737	4,814	4,816	9,0	9,685	9,809	9,807
4,5	5,219	5,312	5,312	9,5	10,185	10,309	10,307

При проведении численных расчетов медленно сходящийся интеграл (1.5) был представлен в виде суммы трех слагаемых соответственно по промежуткам $(0;\ 4/\sqrt{t})$; $(4/\sqrt{t};\ 4)$; $(4,\ \infty)$. В первых двух промежутках функции Бесселя и Неймана считались по аппроксимациям степенными рядами, а в третьем промежутке были использованы асимптотические разложения [9]. Подпрограммы обеспечивали точность 10^{-9} при вычислении этих функций. В первом промежутке $(0;\ 4/\sqrt{t})$ вводилась вспомогательная переменная интегрирования $\xi=\omega\sqrt{t}$. Чтобы ускорить сходимость интеграла в третьем промежутке, из подынтегральной функции вычиталась главная часть асимптотики, для которой интеграл вычисляется аналитически, а квадратурные формулы выписывались с учетом наличия весового множителя ω^{-4}.

Из таблиц видно, что разница в значениях всех трех решений для больших времен невелика (практически нужными являются времена с $\ln t=10-15$). Более того, для больших времен вполне приемлемо приближенное представление безразмерного давления на забое

$$p_c(t)=\frac{q_0}{4\pi}(\ln t+A) \tag{1.9}$$

т. е. изменение забойного давления будет происходить пропорционально логарифму времени (попутно отметим, что для конечного пласта результат будет другим — забойное давление падает пропорционально времени). Постоянная A для классического приближения равна 0,809; для приближения с помощью кольцевого источника — 0,807; для точного решения — 0,685.

2. На втором этапе, когда забойное давление поддерживается постоянным, решение будем отыскивать с помощью метода потенциалов. Представим контур скважины $r=1$ как линейный сток неизвестной интенсивности $q(t)<0$, присоединяя к области $r>1$ еще и внутренность скважины $r<1$. Безразмерное давление в любой точке выразится интегралом

$$p(r,t)=-\frac{1}{4\pi}\int_0^t q(t-\tau)\exp\left(-\frac{1+r^2}{4\tau}\right)I_0\left(\frac{r}{2\tau}\right)\frac{d\tau}{\tau} \qquad (2.1)$$

До перехода на фиксированное забойное давление при $t\leqslant t_*$ дебит $q(t)=-q_0$ и формула (2.1) совпадает с ранее полученной (1.7). При $t>t_*$ забойное давление поддерживается фиксированным и равным значению $p_*=1$.

Представим формулу (2.1) для $t>t_*$ в виде суммы двух слагаемых от $\tau=t$ до $\tau=t-t_*$ и от $\tau=t-t_*$ до $\tau=0$ и вместо давления в левой части подставим p_*. Для отношения $\psi=q(t)/(-q_0)$ получаем интегральное уравнение

$$\int_0^{t-t_*}\psi(t-\tau)f(\tau)d\tau=\Phi(t_*)-\Phi(t)+\Phi(t-t_*)$$
$$f(\tau)=\frac{1}{\tau}\exp\left(-\frac{1}{2\tau}\right)I_0\left(\frac{1}{2\tau}\right),\qquad \Phi(t)=\int_0^t f(\tau)d\tau \qquad (2.2)$$

Заменим теперь ядро на $\Phi'(\tau)$ и преобразуем левую часть интегрированием по частям. Поменяем еще переменную интегрирования на $\xi=t-\tau$ и учтем условия $\psi(t_*)=1$, $\Phi(0)=0$. Тогда получаем компактный и удобный для численной реализации вид

$$\int_{t_*}^t \psi'(\xi)\Phi(t-\xi)d\xi=\Phi(t_*)-\Phi(t) \qquad (2.3)$$

Это интегральное уравнение Вольтерра первого рода. Ядро уравнения зависит лишь от разности аргументов.

Для малых значений $t-t_*$ аргумент $t-\xi$ тоже мал и ядро ведет себя как $2\sqrt{(t-\xi)/\pi}$. Если ограничиваться первым приближением, решение находится в классе степенных функций

$$\psi(t)=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}f(t_*)\sqrt{t-t_*} \qquad (2.4)$$

Построим алгоритм для вычисления значений $\psi(t)$ по уравнению (2.3). Задача эта некорректна, обычно решение находят методом регуляризации. В специальных случаях в ограниченном классе функций удается найти устойчивый к ошибкам округления алгоритм вычисления решения и без введения тихоновского стабилизатора [5], за счет подбора увеличивающегося по закону геометрической прогрессии временного шага.

Разобьем интервал времени от t_* до t на n частей: $t_*=t_0<t_1<\ldots<t_n=t$, причем временные шаги возьмем растущими во времени

$$\ln(t+\Delta t)-\ln t=\alpha=\text{const} \qquad (2.5)$$

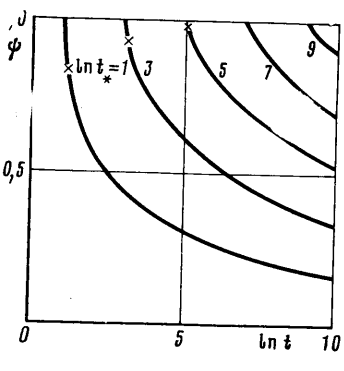
$\ln t$	$\ln t_* = 8$	9	10	11	12	13	14	15
9	0,8847	1	1	1	1	1	1	1
10	0,8029	0,8965	1	1	1	1	1	1
11	0,7360	0,8204	0,9061	1	1	1	1	1
12	0,6796	0,7571	0,8351	0,9141	1	1	1	1
13	0,6312	0,7031	0,7752	0,8476	0,9209	1	1	1
14	0,5892	0,6563	0,7235	0,7908	0,8583	0,9266	1	1
15	0,5524	0,6153	0,6783	0,7413	0,8043	0,8676	0,9316	1
16	0,5199	0,5792	0,6384	0,6976	0,7569	0,8163	0,8758	0,9360
17	0,4910	0,5470	0,6029	0,6588	0,7148	0,7708	0,8268	0,8830
18	0,4652	0,5181	0,5711	0,6241	0,6771	0,7301	0,7832	0,8362
19	0,4419	0,4922	0,5425	0,5929	0,6432	0,6935	0,7439	0,7943
20	0,4208	0,4687	0,5166	0,5646	0,6125	0,6604	0,7084	0,7563

Будем отыскивать значения ψ и ψ' лишь в выбранных указанным образом узлах и полуузлах $t_j = t_0 e^{j\alpha}$, $t_{j+1/2} = 0{,}5(t_j + t_{j+1})$.

Напишем левую часть уравнения (2.3) в виде суммы интегралов по каждому временно́му интервалу (t_{j-1}, t_j). С ростом $j=1, 2, \ldots$ интервал интегрирования становится весьма большим. Но несмотря на это, примем в пределах шага ψ' постоянным и равным его значению в середине интервала. Уравнение (2.3) представится в разрешимом виде

$$\sum_{j=1}^{n} \psi'_{j-1/2} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \Phi(t_n - \xi)\, d\xi = \Phi(t_*) - \Phi(t) \tag{2.6}$$

Полагая здесь поочередно $n=1, 2, 3, \ldots$, получаем треугольную систему линейных уравнений для производных ψ' в полуузлах, которая последовательно решается для всех n. При этом с ростом n каждый раз сначала вычисляются коэффициенты численным интегрированием Φ в указанных интервалах, а затем находится очередное $\psi'_{n-1/2}$. Устойчивость их значений к малым ошибкам обеспечивается большим отрезком интегрирования для искомых диагональных элементов $\psi'_{n-1/2}$, коэффициенты при них получаются превосходящими суммы всех предшествующих коэффициентов при $\alpha \geqslant 0{,}3$ (диагональное преобладание). Даже для $\alpha = 0{,}1$ треугольная система оказалась устойчивой (считалось 200 шагов).



Для контроля точности расчет производился дважды: при $\alpha=0{,}1$ и 0,2. Разница отмечалась лишь в четвертом десятичном знаке.

В табл. 2 приведены значения ψ для практически важных больших времен через целые значения $\ln t$, причем $\ln t_* \geqslant 8$. Погрешность вычислений составляет не более двух единиц четвертого десятичного знака.

На фигуре показана качественная картина снижения $\psi(t)$ для небольших значений времен и некоторых значений $\ln t_*$, указанных на кривых. Точкам *1* соответствуют значения, вычисленные по формуле (2.4) для начального участка. Совпадение очень хорошее, что подтверждает надежность результатов численных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Van Everdingen A. E., Hurst W.* The application of the Laplace transformation to flow problems in reservoirs.— J. Petrol. Techn., 1949, v. 1, № 12, p. 305–326.
2. *Щелкачев В. Н.* Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме. М.: Гостоптехиздат, 1959. 468 с.
3. *Бузинов С. Н., Умрихин И. Д.* Гидродинамические методы исследования скважин и пластов. М.: Недра, 1973. 246 с.

4. *Майдебор В. Н.* Особенности разработки нефтяных месторождений с трещиноватыми коллектогами. М.: Недра, 1980. 288 с.
5. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
6. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.
7. *Дёч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М.: Наука, 1965. 287 с.
8. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
9. *Дымарский Я. С., Лозинский Н. Н., Макушкин А. Т., Розенберг В. Я., Эрглис В. Р.* Справочник программиста. Т. 1. Л.: Судпромгиз, 1963. 628 с.

Махачкала

Поступила в редакцию
2.I.1984