

УДК 532.546

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ ЗАДАЧ
ФИЛЬТРАЦИИ ГАЗА ПРИ КВАДРАТИЧНОМ ЗАКОНЕ
СОПРОТИВЛЕНИЯ**

КОЛОБАШКИН В. М., КУДРЯШОВ Н. А., МУРЗЕНКО В. В.

Рассматриваются одномерные (плоская, осесимметричная) задачи изотермической фильтрации газа через пористую среду при квадратичном законе сопротивления. Приведены автомодельные уравнения для скорости и давления газа в пористой среде. Получены аналитические выражения для давления и скорости газа при постоянном начальном давлении в среде.

Для описания движения газа в пористой среде при больших числах Рейнольдса ($Re > 10$) используется квадратичная зависимость силы сопротивления от скорости [1, 2].

Рассмотрим одномерное (плоское, осесимметричное, сферически-симметричное) движение газа в пористой среде при квадратичном законе сопротивления, которое описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial r} (\rho u r^\nu) = 0; \quad -\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\rho}{l} u^2; \quad P = c^2 \rho \quad (1)$$

Здесь ρ — плотность, P — давление, u — скорость движения газа, b — коэффициент сопротивления при фильтрации газа, c — изотермическая скорость звука в газе, $\nu = 0; 1; 2$ для плоского, осесимметричного и центрально-симметричного движения газа.

Исследование автомодельных решений системы уравнений (1) проводилось в работах [3–7]. В [3, 4] проведен асимптотический анализ интегральных кривых при нулевом начальном давлении газа в среде. Численное решение автомодельной задачи получено в [5]. В [6, 7] представлены аналитические решения плоского и осесимметричного движений газа в пористой среде при отсутствии фонового давления.

В данной работе получены аналитические решения системы уравнений (1) с учетом влияния противодействия газа в среде.

Пусть в начальный момент времени ($t=0$) в пористой среде находится газ при давлении P_0

$$P(r; t=0) = P_0 \quad (2)$$

Граничное условие для плоского ($\nu=0$) и осесимметричного ($\nu=1$) движений газа запишем в виде

$$P(r=0; t) = P_1; \quad \lim_{r \rightarrow 0} (P u r) = A t^{1/2} \quad (3)$$

Задача (1), (2) с одним из условий (3) может быть записана в автомодельных переменных

$$\frac{d(\varphi f \theta^\nu)}{d\theta} \frac{1}{\theta^\nu} = \theta \frac{df}{d\theta}; \quad \frac{df}{d\theta} = -f \varphi^2; \quad \theta = r \sqrt[3]{\frac{4}{9bc^2 t^2}} \quad (4)$$

$$f(\theta \rightarrow \infty) = N = P_0 / P_1^* \quad (5)$$

$$f(\theta=0) = 1 \quad (\nu=0); \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} (f \varphi \theta) = 1 \quad (\nu=1) \quad (6)$$

В (4)–(6) θ – автомодельная переменная, f и φ – безразмерные аналоги давления и скорости газа, которые связаны с P и u следующими зависимостями:

$$P = P_1 * f(\theta); \quad u = \sqrt[3]{2bc^2/3t\varphi}(\theta)$$

$$P_1^* = P_1 \quad (\nu=0); \quad P_1^* = A\sqrt[3]{2/3b^2c^4} \quad (\nu=1)$$

Из системы уравнений (4) получаем уравнение для φ

$$\frac{d\varphi}{d\theta} - \varphi^3 + \theta\varphi^2 + \frac{\nu\varphi}{\theta} = 0 \quad (7)$$

При $\nu=0$ в (7) сделаем замену

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{2^{1/3}}{\varphi} = 2^{-1/3}\theta^2 - 2^{2/3}z, \quad \varphi = (0,5\theta^2 - 2^{1/3}z)^{-1}$$

в результате которой получаем уравнение Эйри

$$\theta = -2^{2/3}y^{-1}dy/dz, \quad y'' - zy = 0 \quad (8)$$

общее решение которого есть функции Эйри [8]

$$y(z) = C \text{Ai}(z) + D \text{Bi}(z) \quad (9)$$

При $\nu=1$ в (7) сделаем замену

$$\varphi = (\theta^2 - 2^{2/3}\theta\psi)^{-1}, \quad \theta = 2^{1/3}(\psi^2 - z)^{-1}$$

$$\frac{d\psi}{dz} = \frac{2^{1/3}}{\theta} = \psi^2 - z$$

откуда при $\psi = -y^{-1}dy/dz$ приходим также к уравнению (8).

Давление газа в пористой среде определяется по формуле [6]

$$f = y^2/\varphi\theta^{2\nu} \quad (10)$$

Из формулы (10) видно, что $y^2(z)$ при $\nu=0$ совпадает с выражением для потока газа в пористой среде.

Решение $y(z)$ определено на интервале $[z_0, z_1]$, где z_0 и z_1 соответствуют $\theta=0$ и $\theta \rightarrow \infty$. При этом из асимптотического поведения φ при $\theta \gg 1$ и $\theta \ll 1$ в случае $\nu=0$ следует $y(z_1) = 0$ и $y'(z_0) = 0$.

Отсюда с учетом (5), (6) получаем систему алгебраических уравнений для определения постоянных C, D, z_0 и z_1 , из которой находим для случая $\nu=0$

$$\text{Ai}'(z_0)\text{Bi}(z_1) - \text{Ai}(z_1)\text{Bi}'(z_0) = 0 \quad (11)$$

$$\text{Ai}(z_0)\text{Bi}(z_1) - \text{Ai}(z_1)\text{Bi}(z_0) = (\pi^2|z_0|N)^{-1/2} \quad (12)$$

$$C = -\pi 2^{-1/6}\sqrt{N}\text{Bi}(z_1); \quad D = \pi 2^{-1/6}\sqrt{N}\text{Ai}(z_1) \quad (13)$$

Выражение (11), вообще говоря, можно рассматривать как зависимость $z_0(z_1)$. Подставив z_0 в (12), определим z_1 для каждого фиксированного N и постоянные C и D по формулам (13) [9].

В случае $\nu=1$ уравнения, определяющие z_0 и z_1 , имеют вид $y(z_0) = 0$ и $\psi^2(z_1) = z_1$. Используя условия (5), (6), получаем систему алгебраических уравнений для определения постоянных C, D, z_0 и z_1 в случае $\nu=1$, решение которой дает

$$[\text{Ai}'(z_1)\text{Bi}(z_0) - \text{Bi}'(z_1)\text{Ai}(z_0)]^2 =$$

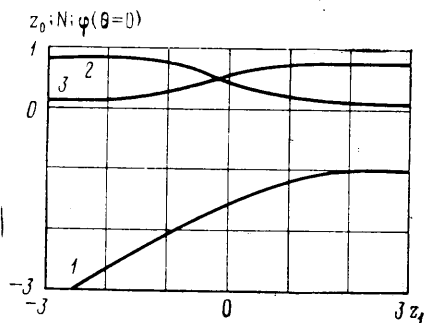
$$= z_1[\text{Ai}(z_1)\text{Bi}(z_0) - \text{Bi}(z_1)\text{Ai}(z_0)]^2 \quad (14)$$

$$[\text{Ai}'(z_1)\text{Bi}(z_0) - \text{Bi}'(z_1)\text{Ai}(z_0)]^2 = z_1 N 2^{-1/6} \pi^{-2} \quad (15)$$

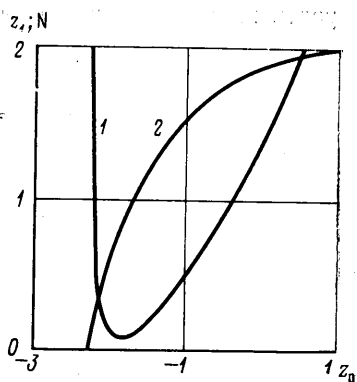
$$C = 2^{1/6}\pi \text{Bi}(z_0); \quad D = -2^{1/6}\pi \text{Ai}(z_0) \quad (16)$$

Из (14) можно определить $z_1(z_0)$. Используя зависимость $z_1(z_0)$, из выражения (15) находим z_0 при каждом фиксированном N и постоянные C и D по формулам (16).

На фиг. 1 представлены зависимости $z_0(z_1)$ (кривая 1), $N(z_1)$ (кривая 2) и величина $\varphi(\theta=0)$ как функция z_1 (кривая 3) для плоского движения газа в пористой среде. Для любого $N \in [0, 1]$ находится соответствующее значение z_1 , поэтому решение системы уравнений (4), а следовательно, и (1) при $\nu=0$ получено для всех N .



Фиг. 1



Фиг. 2

Для случая осесимметричного движения газа на фиг. 2 представлены зависимости $z_1(z_0)$ (кривая 1) и $N(z_0)$ (кривая 2). При любом $N > 0$ существует соответствующее z_0 , поэтому решение (1) для $\nu=1$ также получено.

Используя (9), (10), (13) и выражение для φ при $\nu=0$, давление и скорость газа в пористой среде в случае квадратичного закона фильтрации в зависимости от θ можно представить в виде

$$f(z) = 2^{1/2} [y'(z)^2 - zy(z)^2]; \quad \varphi(z) = 2^{-1/2} y^2(z) f^{-1}(z)$$

$$\theta = -2^{3/2} \frac{\text{Bi}(z_1) \text{Ai}'(z) - \text{Ai}(z_1) \text{Bi}'(z)}{\text{Bi}(z_1) \text{Ai}(z) - \text{Ai}(z_1) \text{Bi}(z)}$$

$$y(z) = 2^{-1/2} \pi N^{1/2} (\text{Ai}(z) \text{Bi}(z_1) - \text{Bi}(z) \text{Ai}(z_1))$$

Фигура 3 иллюстрирует зависимости скорости φ от автомодельной переменной при $N=0; 5 \cdot 10^{-4}; 0,22; 0,55; 0,75$ (кривые 1-5). Давление газа при плоском движении показано на фиг. 4 для тех же N (кривые 1-5).

На фиг. 3 видно, что в поведении зависимостей скоростей движения газа в пористой среде при $N=0$ и при $N \neq 0$ имеются качественные различия. В случае фильтрации газа в вакуум скорость движения увеличивается с расстоянием $\varphi \rightarrow \infty$ при $\theta \rightarrow \infty$ по закону $\varphi \approx \theta + \theta^{-2}$. Для ненулевого начального давления газа у скорости движения имеется максимум, поскольку при $\theta \ll 1$ из уравнения (7) получаем $d\varphi/d\theta > 0$ и $d\varphi/d\theta < 0$ при $\theta \gg 1$.

Покажем, что точка экстремума скорости движения газа $\varphi(\theta)$ соответствует поверхности между газом, втекающим в пористую среду, и вытесняемым. Закон сохранения массы для вытесняемого газа, который первоначально заполнял пористую среду, можно записать в виде

$$N\theta_0 = \int_{\theta_0}^{\infty} (f - N) d\theta \quad (17)$$

Здесь θ_0 — автомодельная координата поверхности между газами. Интегрируя (17) по частям и используя уравнение (4), получаем

$$f(\theta_0)\theta_0 = - \int_{\theta_0}^{\infty} f'\theta d\theta = f(\theta_0)\varphi(\theta_0)$$

откуда $\varphi(\theta_0) = \theta_0$, и поэтому из (7) следует $d\varphi/d\theta = 0$ при $\theta = \theta_0$.

В случае осесимметричного движения газа выражения для давления и скорости газа представляются в виде

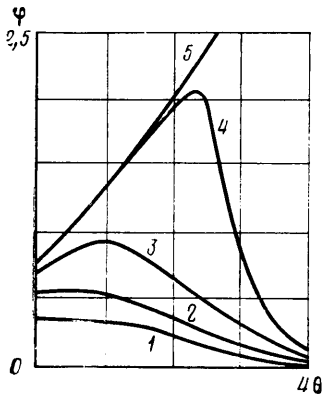
$$f(z) = y^2(z) + 2^{1/2} y'(z) ([y'(z)]^2 - zy^2(z)) / y(z)$$

$$\varphi(z) = y^2(z) \theta^{-2}(z) f^{-1}(z)$$

$$\theta(z) = 2^{1/2} ([y'(z)]^2 - zy^2(z)) / y^2(z)$$

$$y(z) = 2^{1/2} \pi [Ai(z) Bi(z_0) - Ai(z_0) Bi(z)]$$

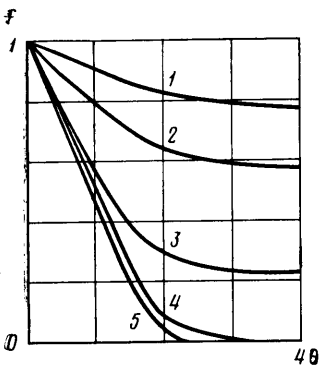
На фиг. 5 представлена зависимость $\varphi(\theta)$ (сплошные линии) для $N=0$ (кривая 1); 10^{-5} (кривая 2); $0,05$ (кривая 3); $1,0$ (кривая 4) и давление газа $f(\theta)$ (штриховые линии) для $N=0$ (кривая 1); $1,0$ (кривая 2); $1,62$ (кривая 3).



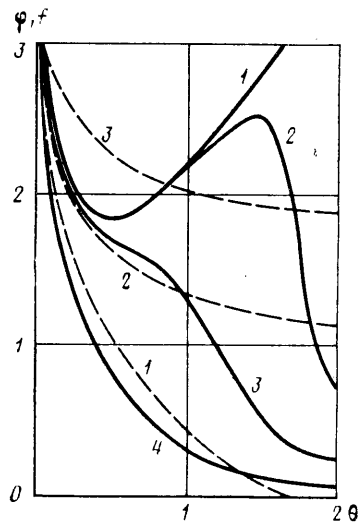
Фиг. 3

При $z_1 \rightarrow +\infty$ решение в пределе описывает движение газа в пористой среде с нулевым фоновым давлением $N=0$ [6]. Так же как и в плоском случае, имеются качественные различия в поведении скорости при $N=0$ и $N \neq 0$. В первом случае скорость увеличивается с расстоянием $\varphi \rightarrow \infty$ при $\theta \rightarrow \infty$ (по закону $\varphi = \theta + 2\theta^{-2}$), во втором — уменьшается до нуля.

Анализ уравнения (7) и его решений показывает, что при $N=0$ скорость φ имеет минимум, при $0 < N < N_0$, где $N_0 \approx 0,05$, — минимум и максимум, при $N > N_0$ скорость φ с ростом θ монотонно уменьшается до нуля.



Фиг. 4



Фиг. 5

Как и в случае $\nu=0$, для осесимметричного движения газа, границе между втекающим и вытесняемым газами соответствует точка θ_0 , где $\varphi(\theta_0)=\theta_0$.

По максимуму скорости фильтрации газа можно оценить время движения газа через фиксированный слой пористой среды.

Полученные аналитические зависимости динамических характеристик газа, фильтрующего в пористой среде с большой скоростью, могут быть использованы для проверки численных решений при математическом моделировании движения газа с учетом квадратичного закона сопротивления.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
2. *Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунова А. Т., Зотов Г. А.* Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра, 1970. 335 с.
3. *Баренблатт Г. И.* О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде.— ПММ, 1952, т. 16, вып. 1, с. 67–78.
4. *Баренблатт Г. И.* Об автомодельных движениях сжимаемой жидкости в пористой среде.— ПММ, 1952, т. 16, вып. 6, с. 679–698.
5. *Колобашкин В. М., Кудряшов Н. А., Мурзенко В. В.* Численные решения одномерных автомодельных задач движения газа в пористой среде при квадратичном законе сопротивления.— Инж.-физ. журн., 1983, т. 45, № 4, с. 616–621.
6. *Бондаренко А. Г., Колобашкин В. М., Кудряшов Н. А.* Автомодельное решение задачи о течении газа через пористую среду в режиме турбулентной фильтрации.— ПММ, 1930, т. 44, вып. 3, с. 573–577.
7. *Кудряшов Н. А., Мурзенко В. В.* Автомодельное решение задачи осесимметричного движения газа через пористую среду при квадратичном законе сопротивления.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1982, № 4, с. 168–171.
8. *Арсенин В. Я.* Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974. 431 с.
9. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979. 830 с.
10. *Годунов С. К., Рябенский В. С.* Разностные схемы. М.: Наука, 1977. 439 с.

Московский инженерно-физический институт

Поступила в редакцию
21.III.1984