

УДК 532.526

## О ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМИСЯ КОНУСАМИ

ДОЛЖАНСКИЙ Ф. В.

Исследуется стационарное осесимметричное течение вязкой жидкости между двумя конусами, вращающимися вокруг общей оси в противоположные стороны.

Показано, что аналогично случаю течения жидкости, закручиваемой вращающимися с различными скоростями плоскими дисками [1], в системе могут иметь место два режима движения: режим Бэтчелора с квазитвердым вращением жидкости вне погранслоев [2] и режим Стюартсона, в котором азимутальное течение сосредоточивается лишь в погранслоях [3]. В режиме Стюартсона в окрестности каждого конуса, удаленной от вершины конусов, формируется погранслоем, аналогичный погранслою в однодисковой задаче (см., например, [4-6]). Для течений вне погранслоев найдены простые формулы, позволяющие получить представление о циркуляции жидкости в целом. Результаты с незначительными изменениями переносятся на случай вращения других кривых поверхностей.

**1. Постановка задачи.** Жидкость заполняет пространство между двумя конусами, имеющими общую вершину и вращающимися вокруг общей оси симметрии в противоположных направлениях с одинаковой по величине угловой скоростью  $\omega$  (фиг. 1). Поверхности конусов в сферической системе координат  $(r, \theta, \varphi)$  описываются уравнениями  $\theta = \theta_0$  и  $\theta = \pi - \theta_0$ .

Уравнения стационарного осесимметричного течения в безразмерных переменных имеют вид

$$\frac{dv_r}{dt} - \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \left( \Delta - \frac{2}{r^2} \right) v_r - \frac{2}{r^2} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + \text{ctg } \theta \right) v_\theta \quad (1.1)$$

$$\frac{dv_\theta}{dt} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\varphi^2 \text{ctg } \theta}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \left( \Delta - \frac{2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \quad (1.2)$$

$$\frac{dv_\varphi}{dt} + \frac{v_r v_\varphi}{r} + \frac{v_\theta v_r \text{ctg } \theta}{r} = \left( \Delta - \frac{2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) v_\varphi \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r} v_r + \frac{\text{ctg } \theta}{r} v_\theta = 0 \quad (1.4)$$

$$\frac{d}{dt} = v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}$$

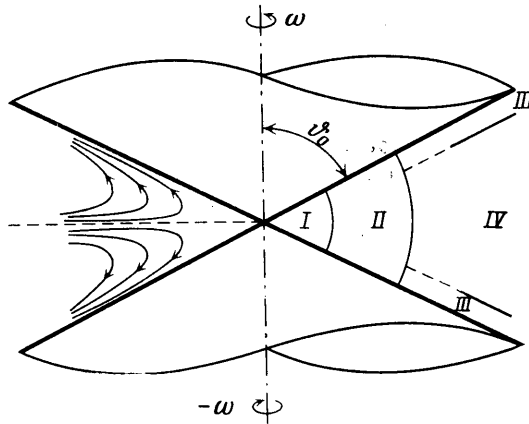
Здесь  $v_r, v_\theta, v_\varphi$  — радиальная, меридиональная и азимутальная составляющие безразмерной скорости течения;  $\nu$  и  $\rho$  — кинематическая вязкость и плотность жидкости. При записи уравнений (1.1)–(1.4) в качестве характерных масштабов длины, скорости и давления выбирались величины  $(\nu/\omega)^{1/2}$ ,  $(\nu\omega)^{1/2}$  и  $\rho\nu\omega$ .

На поверхностях конусов выполняются граничные условия прилипания жидкости

$$v_r|_{\theta=\theta_0, \pi-\theta_0} = v_\theta|_{\theta=\theta_0, \pi-\theta_0} = 0, \quad v_\varphi|_{\theta=\theta_0, \pi-\theta_0} = \pm r \sin \theta_0 \quad (1.5)$$

Рассматриваемое течение симметрично относительно плоскости  $\theta=\pi/2$ , поэтому  $v_\varphi$  и  $v_\theta$  — нечетные, а  $v_r$  — четная функция аргумента  $\alpha=\pi/2-\theta$ .

В отличие от упомянутой задачи о дисках, в которой осесимметричные течения описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями во всей области, занятой жидкостью, движение данной системы не обладает свойством глобальной автомодельности. Поэтому общий подход здесь состоит в выделении областей асимптотической автомодельности, в каждой из которых течение управляется «своими» уравнениями, и в формулировке условий сшивки, позволяющих решить задачу в целом.



Фиг. 1

Параметр  $r^2=\omega r_*^2/\nu$  ( $r_*$  — расстояние до начала координат) — квадрат безразмерной радиальной координаты можно интерпретировать как локальное число Рейнольдса. С этой точки зрения все пространство, заполненное жидкостью, уместно разделить на области малых и больших чисел Рейнольдса, как показано на фиг. 1. В области I, где  $r^2\ll 1$ , определяющими должны быть эффекты вязкости, а там, где  $r^2\gg 1$ , влияние вязкости должно быть пренебрежимо мало (область IV), за исключением тонких погранслоев (области III) вблизи конических поверхностей. Естественно поэтому для отыскания асимптотически автомодельных решений применить в указанных областях метод разложения по малому параметру  $\varepsilon=r$  или  $r^{-1}$ . Область II промежуточных значений  $r$  требует специального исследования.

**2. Движение в окрестности вершины конусов.** Учитывая, что в начале координат все составляющие скорости равны нулю, разложение по степеням  $r$  в области I должно иметь вид

$$v_r = \sum_{k=1}^{\infty} r^k g_k(\theta), \quad v_\theta = \sum_{k=1}^{\infty} r^k h_k(\theta) \quad (2.1)$$

$$v_\varphi = r \sin \theta f_1(\theta) + \sum_{k=2}^{\infty} r^k f_k(\theta), \quad p = p_0(\theta) + \sum_{k=1}^{\infty} r^k p_k(\theta)$$

После подстановки рядов (2.1) в (1.1)–(1.5) и приравнивания членов одинакового порядка получаются следующие краевые задачи для определения коэффициентов первых членов разложения:

$$g_1'' + \text{ctg } \theta g_1' - 2(h_1' + \text{ctg } \theta h_1) = 0, \quad g_1|_{\theta=0, \pi-\theta_0} = 0$$

$$3g_1 + h_1' + \text{ctg } \theta h_1 = 0, \quad h_1|_{\theta=0, \pi-\theta_0} = 0 \quad (2.2)$$

$$f_1'' + 3 \text{ctg } \theta f_1' = 0, \quad f_1|_{\theta=0, \pi-\theta_0} = \pm 1 \quad (2.3)$$

Здесь и далее, где в этом нет необходимости, уравнение для вычисления давления опускается.

В силу нулевых краевых условий имеем  $g_1(\theta) = h_1(\theta) = 0$ . Решение задачи (2.3) записывается в виде

$$f = \frac{\sin \alpha \cos^{-2} \alpha + \ln \operatorname{tg}(\alpha/2 + \pi/4)}{\sin \alpha_0 \cos^{-2} \alpha_0 + \ln \operatorname{tg}(\alpha_0/2 + \pi/4)}$$

$$\alpha = \pi/2 - \theta, \quad \alpha_0 = \pi/2 - \theta_0, \quad f_1(-\alpha) = -f_1(\alpha)$$

Нетрудно показать, что  $g_2(\theta) = h_2(\theta) = f_2(\theta) = 0$ . Поэтому в области I справедливы следующие выражения:

$$v_r = O(r^3), \quad v_\theta = O(r^3), \quad v_\varphi = r \sin \theta f_1(\theta) + O(r^3)$$

т. е. в окрестности начала координат поперечная циркуляция практически отсутствует, а профиль азимутальной составляющей при малых углах между конусами близок к линейному.

**3. Пограничные условия в окрестности конусов при  $r \gg 1$ .** Область III в окрестности каждого конуса, удаленная от начала координат, выделяется слоем конечной безразмерной толщины  $z$ . Предполагается, что  $1 \ll z \ll r$ . В размерных величинах это означает, что толщина слоя много больше характерного внутреннего масштаба  $(\nu/\omega)^{1/2}$  и много меньше расстояния до вершины конусов. В слое удобно ввести «быструю» координату  $\xi = r(\theta - \theta_0)$ ,  $0 \leq \xi \leq z$ . Решения гидродинамических уравнений в области III ищутся в виде

$$v_r = r g_1(\xi) + O(1), \quad v_\theta = h_0(\xi) + O(r^{-1}) \quad (3.1)$$

$$v_\varphi = r \sin \theta_0 f_1(\xi) + O(1), \quad p = \frac{1}{2} \lambda^2 r^2 + O(r)$$

где  $\lambda^2 = \text{const}$  также подлежит определению.

Равенство нулю члена порядка  $r$  в разложении для  $v_\theta$  следует из условия сохранения массы, примененного к элементу объема, ограниченного поверхностями  $r = r_1 = \text{const}$ ,  $r = r_2 = \text{const}$  и  $\xi = z$ . Отметим, что в разложениях (2.1), (3.1) и далее для обозначения коэффициентов при степенях  $r$  используются одни и те же буквы  $g$ ,  $h$ ,  $f$  и  $p$ . Функции, им соответствующие, в каждой области разные. В случаях, когда это может вызвать недоразумение, указанные обозначения будут снабжаться индексом, указывающим на номер области.

В результате подстановки (3.1) в (1.1)–(1.5) получается замкнутая система уравнений относительно коэффициентов при первых членах разложения (при выводе учитывалось, что параметр  $\xi/r \ll 1$ )

$$-\lambda^2 + g_1'' = g_1''(h_0 + \xi g_1) + g_1^2 - \sin^2 \theta_0 f_1^2 \quad (3.2)$$

$$f_1'' = f_1'(h_0 + \xi g_1) + 2f_1 g_1, \quad 2g_1 + (h_0 + \xi g_1)' = 0$$

с граничными условиями на поверхности конуса

$$g_1(0) = h_0(0) = 0, \quad f_1(0) = 1 \quad (3.3)$$

Недостающие краевые условия на границе  $\xi = z$  будут найдены из условий сшивки решений в областях III и IV. Отметим, что заменой переменных

$$\zeta = \xi \sqrt{\sin \theta_0}, \quad G = g_1 / \sin \theta_0, \quad F = f_1 \quad (3.4)$$

$$\lambda_0 = \lambda / \sin \theta_0, \quad H = (h_0 + \xi g_1) / \sqrt{\sin \theta_0}$$

система (3.2) приводится к уравнениям движения жидкости между вращающимися плоскими дисками [2, 3]

$$-\lambda_0^2 + G'' = H G' + G^2 - F^2, \quad F'' = H F' + 2G F \quad (3.5)$$

$$H' = -2G, \quad G(0) = H(0) = 0, \quad F(0) = 1$$

**4. Течение вне погранслоев, режим Стюартсона.** Наводящие соображения о виде разложений динамических переменных по параметру  $r^{-1}$  в области IV можно получить из условия сохранения массы в интегральной форме

$$I = \int_{\theta_0}^{\theta_0+\varepsilon} r^2 v_r \sin \theta d\theta + \int_{\theta_0+\varepsilon}^{\pi/2} r^2 v_r \theta d\theta = 0, \quad \varepsilon = \frac{z}{r} \quad (4.1)$$

Поток массы  $I$  через участок поверхности сферы, ограниченной конусами, разделен на две части, соответствующие областям III и IV. Интегрирование проводится по верхнему полупространству, поскольку решения предполагаются симметричными относительно плоскости  $\theta = \pi/2$ . Переходя в первом интеграле к переменной  $\xi$  и учитывая, что  $1 \ll z \ll r$ , равенство (4.1) можно переписать в виде

$$\int_0^{\infty} r v_r(r, \xi) \sin \theta_0 d\xi + \int_{\theta_0}^{\pi/2} r^2 v_r(r, \theta) \sin \theta d\theta = 0 \quad (4.2)$$

Из сопоставления обоих интегралов с учетом, что в области III  $v_r = O(r)$ , следует два возможных варианта: а) в области IV всюду  $v_r = O(1)$ , т. е. разложение для  $v_r$  не содержит членов порядка  $r$ ; б) в области IV существуют отдельные слои конечной толщины (транзитные слои [2]), в которых  $v_r = O(r)$ , что также позволяет скомпенсировать слагаемые в (4.2). Случай а) соответствует режиму Стюартсона, случай б) при наличии одного транзитного слоя в окрестности плоскости симметрии — режиму У. Бэтчелора. Принимая во внимание указанные соображения, решения вне погранслоев следует искать в виде

$$\begin{aligned} v_r &= \sum_{k=0}^{\infty} r^{-k} g_{-k}(\theta), & v_\theta &= \sum_{k=0}^{\infty} r^{-k} h_{-k}(\theta) \\ v_\varphi &= r \sin \theta f_1(\theta) + \sum_{k=0}^{\infty} r^{-k} f_{-k}(\theta) \\ p &= \frac{1}{2} \lambda^2(\theta) r^2 + r p_1(\theta) + \sum_{k=0}^{\infty} r^{-k} p_{-k}(\theta) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Для коэффициентов первых членов разложения получается система

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta f_1^2 &= \lambda^2, & \sin \theta \cos \theta f_1^2 &= \frac{1}{2} (\lambda^2)' \\ h_0 f_1' + 2f_1 (g_0 + \operatorname{ctg} \theta h_0) &= 0, & h_0' + 2g_0 + \operatorname{ctg} \theta h_0 &= 0 \end{aligned}$$

Из первых двух уравнений следует, что  $\lambda = C_0 \sin \theta$ ,  $f_1 = C_0$ ,  $C_0$  — константа интегрирования. Вновь приходим к двум вариантам вне погранслоев: а)  $C_0 = 0$ ,  $\lambda(\theta) \equiv 0$ ,  $f_1 \equiv 0$  (режим Стюартсона), б)  $f_1 = C_0 \neq 0$  — квазитвердое вращение вне погранслоев (режим Бэтчелора). Тогда  $g_0 = -\operatorname{ctg} \theta h_0$  и

$$h_0 = C_1 \sin \theta, \quad g_0 = C_1 \cos \theta \quad (4.4)$$

где постоянные  $C_0$  и  $C_1$  должны определяться из условий шивки на границах погранслоев.

Заметим, что в случае б) выражения для  $f_1$ ,  $h_0$  и  $g_0$  не удовлетворяют нужным условиям четности относительно плоскости  $\theta = \pi/2$ . Если такой режим вообще существует, это означает, что в окрестности плоскости симметрии обязательно находится транзитный слой, в котором указанные выражения не справедливы. Подробнее об этом см. п. 5.

В режиме Стюартсона  $v_{\varphi} \leq O(1)$ . Можно показать, что в этом случае и  $p \leq O(1)$ . С учетом этого подстановка (4.3) в (1.1)–(1.4) приводит к уравнениям

$$h_0 g_0' - h_0^2 - f_0^2 = 0 \quad (4.5)$$

$$h_0 f_0' + g_0 f_0 + \text{ctg } \theta h_0 f_0 = 0 \quad (4.6)$$

$$h_0' + 2g_0 + \text{ctg } \theta h_0 = 0 \quad (4.7)$$

Путем исключения  $g_0$  из (4.6) и (4.7) находится первый интеграл системы ( $A = \text{const}$ )

$$f_0^2 = \frac{A}{\cos \alpha} |h_0| \quad \left( \alpha = \frac{\pi}{2} - \theta \right)$$

Из требования гладкости функции  $f_0$  при  $\alpha = 0$  следует, что  $A = 0$ . Тогда, согласно (4.5), с учетом замены  $\theta$  на  $\alpha$  имеем  $h_0(\alpha) = -g_0'(\alpha)$ . В результате подстановки этого соотношения в (4.7) находим уравнение для радиальной компоненты

$$g_0'' - \text{tg } \alpha g_0' + 2g_0 = 0 \quad (4.8)$$

которое совместно с равенствами

$$h_0 = -g_0'(\alpha), \quad f_0(\alpha) = 0 \quad (4.9)$$

описывает режим Стюартсона вне погранслоев.

Остается сформулировать условия сшивки на границе областей III и IV. Из сопоставления разложений (4.3) в области IV для режима Стюартсона, в котором  $f_1(\theta) = f_0(\theta) = 0$  и  $\lambda^2(\theta) = 0$ , с разложениями (3.1) в области III следует

$$g_1^{\text{III}}(\infty) = -f_1^{\text{III}}(\infty) = 0, \quad \lambda^{\text{III}} = \lambda^{\text{IV}}(\theta_0) = 0, \quad h_0^{\text{IV}}(\theta_0) = h_0^{\text{III}}(\infty) \quad (4.10)$$

Первые два равенства доставляют недостающие граничные условия для системы (3.2) и значение постоянной  $\lambda$  в области III. Тогда для системы (3.5)

$$\lambda_0 = 0, \quad G(\infty) = F(\infty) = 0 \quad (4.11)$$

Краевая задача (3.5), (4.11) это однодисковая задача Кармана, решение которой хорошо известно (см., например [4–6]). В частности,  $H(\infty) = -0,866$  и, согласно последним равенствам (3.4) и (4.10)

$$h_0^{\text{IV}}(\theta) = \sqrt{\sin \theta_0} H(\infty) = -0,866 \sqrt{\sin \theta_0} \quad (4.12)$$

Условия четности  $g_0(\alpha) = g_0(-\alpha)$  и (4.12) можно использовать для решения системы (4.8), (4.9). Заменой переменных  $g_0(\alpha) = w(x)$ ,  $x = \sin \alpha$  уравнение (4.8) приводится к уравнению Лежандра

$$(1-x^2) \frac{d^2 w}{dx^2} - 2x \frac{dw}{dx} + \nu(\nu+1)w = 0 \quad (\nu=1)$$

общее решение которого записывается в виде [7]

$$w = C_1 x + C_2 \left( \frac{1}{2} x \ln \frac{1+x}{1-x} - 1 \right), \quad |x| < 1$$

В силу четности  $g_0(\alpha)$  постоянная  $C_1 = 0$ . Поэтому

$$g_0(\alpha) = C \left( \frac{1}{2} \sin \alpha \ln \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} - 1 \right) \quad (4.13)$$

Подстановка (4.13) в (4.9) дает выражение

$$h_0(\alpha) = -C \left( \text{tg } \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha \ln \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} \right) \quad (4.14)$$

С помощью (4.12) находим постоянную интегрирования

$$C = 0,866 \sqrt{\cos \alpha_0} \operatorname{tg} \alpha_0 + \frac{1}{2} \cos \alpha_0 \ln \frac{1 + \sin \alpha_0}{1 - \sin \alpha_0} \quad (4.15)$$

Графики универсальных функций  $g_0(\alpha)/C$  (сплошная кривая) и  $h_0(\alpha)/C$  (пунктир) показаны на фиг. 2. Отметим, что в окрестности плоскости симметрии ( $\alpha=0$ )

$$g_0(\alpha) = -C(1-\alpha^2), \quad h_0 = -C\alpha \quad (C > 0)$$

т. е. радиальное движение происходит от периферии к центру. Кроме того, при больших углах между конусами  $v_r$  меняет знак за пределами пограничных слоев.

Известное решение однодисковой задачи, формулы (4.13)–(4.15) и равенства  $\lambda^{IV}(\theta) \equiv 0$ ,  $f_0^{IV}(\theta) \equiv 0$  в первом приближении полностью описывают режим Стюартсона в области  $r \gg 1$ . Ситуация аналогична той, которая имеет место в двухдисковой задаче при больших числах Рейнольдса [8].

**5. Замечание о режиме Бэтчелора.** С учетом разложений и формул, полученных в п. 4 для режима Бэтчелора, условия сшивки на границе областей III и IV записываются в виде

$$f_1^{III}(\infty) = f_1^{IV}(\theta_0) = C_0, \quad \lambda^{III} = \lambda^{IV}(\theta_0) = \quad (5.1)$$

$$= C_0 \sin \theta_0, \quad g_1^{III}(\infty) = 0, \quad h_0^{III}(\infty) = h_0^{IV}(\theta_0)$$

В результате перехода к новым переменным (3.4) получается следующая краевая задача на собственные значения для режима Бэтчелора в области III:

$$-\lambda_0^2 + G'' = HG' + G^2 - F^2, \quad F'' = HF' + 2GF, \quad H' = -2G \quad (5.2)$$

$$G(0) = H(0) = 0, \quad F(0) = 1, \quad G(\infty) = 0, \quad F(\infty) = \lambda_0 \quad (5.3)$$

Постоянная  $C_0$  заменяется на  $\lambda_0$ , так как, согласно (5.1) и (3.4),  $\lambda^{III} = C_0 \sin \theta_0 = \lambda_0 \sin \theta_0$ .

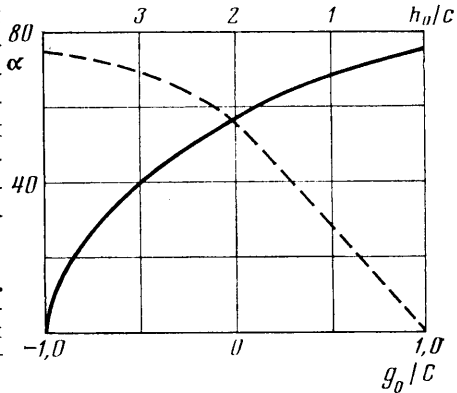
Уместно заметить, что спектр собственных значений указанной задачи не пуст, поскольку значению  $\lambda_0 = 1$  соответствует решение  $G(\xi) = H(\xi) = 0$ ,  $F(\xi) \equiv 1$  – твердое вращение, а  $\lambda_0 = 0$  – решение однодисковой задачи. В режиме Бэтчелора  $0 < \lambda_0^2 < 1$ . Транзитный слой в окрестности плоскости симметрии, о котором говорилось выше, с помощью разложений (3.1) вводится точно так же, как пограничный в окрестности конусов. В результате получается система (3.2) с той лишь разницей, что  $\theta_0$  следует положить равной  $\pi/2$ . Быстрая переменная  $\xi = r(\theta - \pi/2)$  изменится теперь в пределах  $(-\infty, +\infty)$ . Заменой переменных (3.4) при  $\theta_0 = \pi/2$  уравнения транзитного слоя также приводятся к системе (5.2) с тем же значением  $\lambda_0$  из-за условий сшивки.

Решение задачи (5.2), (5.3) определяет величину  $H^{III}(\infty) = H_*(\lambda_0)$  как функцию параметра  $\lambda_0$ . Поэтому краевая задача для транзитного слоя с учетом формул (4.4) и условий сшивки задается системой (5.2) с условиями на границах

$$F(\mp\infty) = \pm \lambda_0, \quad G(\mp\infty) = 0, \quad H(\mp\infty) = \pm H_*(\lambda_0) / \sqrt{\sin \theta_0} \quad (5.4)$$

Следовательно, для существования режима Бэтчелора требуется, чтобы пересечение спектров собственных значений краевых задач (5.2), (5.3) и (5.2), (5.4) было не пусто. Этот вопрос требует специального исследования. Уместно заметить, что для двухдисковой задачи доказана лишь теорема существования режима Стюартсона [9], тогда как вопрос о существовании режима Бэтчелора до сих пор остается открытым. Численные исследования [10–12] указывают на возможность реализации обоих режимов. Проблема существования и неединственности решений двухдисковой задачи подробно обсуждается в [13].

**6. Некоторые замечания.** Развитый выше метод исследования течения жидкости между вращающимися конусами переносится на случай движения жидкости между двумя вращающимися поверхностями  $z = \pm \beta(x^2 + y^2)^{1/2}$ , где  $\beta = \text{const}$ ,  $0 \leq s \leq 1$  (значе-



Фиг. 2

ния  $s=0$  и  $s=1$  соответствуют изученным случаям вращающихся плоскостей и конусов). Нетрудно показать, что при любом  $0 < s < 1$  в удаленной от начала координат окрестности каждой поверхности движение жидкости описывается уравнениями Кармана (3.5). Для этого следует выделить в такой окрестности слой конечной толщины, много большей внутреннего геометрического масштаба  $\delta = (\nu/\omega)^{1/2}$  и много меньшей расстояния  $D(r)$  между поверхностями и применить метод разложения по малому параметру  $\epsilon = \delta/D(r)$ , как это делалось выше. Таким образом, указанное обстоятельство универсально для всего рассматриваемого класса задач. Влияние геометрии поверхностей будет сказываться лишь на конкретном виде уравнений движения вне пограничных слоев. Но в целом вся процедура нахождения решений остается неизменной. В частности, в режиме Стюартсона течения в пограничных слоях будут такими же, как в окрестности одиночного вращающегося диска. Следует также отметить, что условия равенства по величине угловых скоростей вращения поверхностей не существенно.

Автор благодарит А. М. Обухова за предложенную тему и внимание к работе, А. В. Данилова и С. В. Нестерова за полезные дискуссии.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Karman T.* Von Über laminare und turbulente Reibung.— *Z. Angev. Math. und Mech.*, 1921, В. 1, № 4, p. 233–252.
2. *Batchelor G. K.* Note on a class of solutions of the Navier-Stokes equations representing steady rotationally-symmetric flow.— *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 1951, v. 41, № 1, p. 29–41.
3. *Stewartson K.* On the flow between two rotating coaxial disks.— *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1953, v. 49, № 2, p. 333–341.
4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1954. 795 с.
5. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
6. *Гринспен Х.* Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеиздат, 1975. 304 с.
7. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 830 с.
8. *Matkowsky B. J., Siegmund W. L.* The flow between counter-rotating disks at high Reynolds number.— *SIAM J. Appl. Math.*, 1976, v. 30, № 4, p. 720–727.
9. *McLeod J. B., Parter S. V.* On the flow between two counter-rotating infinite plane disks.— *Arch. Rat. Mech. and Anal.*, 1974, v. 54, № 4, p. 301–327.
10. *Lance G. N., Rogers M. H.* The axially symmetric flow of a viscous fluid between two infinite rotating disks.— *Proc. Roy. Soc. Ser. A*, 1962, v. 266, № 1324, p. 109–121.
11. *Pearson C. E.* Numerical solutions for the time-dependent viscous flow between two rotating coaxial disks.— *J. Fluid. Mech.*, 1965, v. 21, № 4, p. 623–633.
12. *Greenspan D.* Numerical studies of flow between rotating coaxial disks.— *J. Inst. Math. Appl.*, 1972, v. 9, № 3, p. 370–377.
13. *Kreiss H. O., Parter S. V.* On the swirling flow between rotating coaxial disks: existence and nonuniqueness.— *Commun. Pure and Appl. Math.*, 1983, v. 36, № 1, p. 55–84.

Москва

Поступила в редакцию  
12.XII.1983