МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 1985

УДК 532.516

О ДИССИПАТИВНОМ РАЗОГРЕВЕ ПРИ СДВИГОВОМ ТЕЧЕНИИ АСТЕНОСФЕРЫ

МАРОН В. И., НИКОЛАЕВСКИЙ В. Н.

Рассматривается задача о диссипативном разогреве жидкости под твердой пластиной, движущейся с постоянной скоростью. Диссипативный разогрев связан с вязким трением слоев жидкости, скорость которой вне области возмущений равна нулю. При этом вязкость жидкости считается зависящей от температуры по экспоненциальному закону. Температура пластины принимается постоянной.

Результаты решения этой задачи используются для объяснения понижения вязкости астеносферного слоя под литосферными плитами. Согласно принятым сейчас геодинамическим представлениям, внешняя оболочка твердой Земли, называемая литосферой, состоит из шести крупных и нескольких мелких плит. Эти плиты, имеющие толщину ~100 км, медленно, со скоростью ~1 см в год, перемещаются относительно друг друга [1]. Движение плит объясняется рядом причин, которые обсуждаются в работах [2, 3]. Под литосферными плитами располагаются астеносферные зоны толщиной порядка 50–100 км, в которых вещество на временных интервалах в миллионы лет ведет себя подобно жидкости с вязкостью порядка 10^{18}–10^{19} Пас. Ряд исследователей на основе геофизических данных о распространении сейсмических волн отмечают неоднородность изменения электрического сопротивления и вязкости по толщине астеносферных слоев [4, 5]. Можно предположить, что подобная неоднородность свойств астеносферы и само ее существование обусловлено эффектами теплового размягчения и уменьшения вязкости из-за диссипативного разогрева. Подобно тому, как это сделано в работах [6, 7], предполагаем, что чувствительное к температуре сдвиговое течение астеносферы связано с движением литосферных плит. В отличие от этих работ здесь не вводится неподвижная поверхность мезосферы, ограничивающая астеносферный слой снизу. Поэтому мезосферу можно рассматривать как область верхней мантии Земли, где размягчение из-за диссипации существенно меньше, чем в верхних слоях астеносферы.

1. Пусть жидкость занимает нижнее полупространство и движется в горизонтальном направлении, увлекаемая пластиной, лежащей на поверхности.

Уравнение движения жидкости имеет вид

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right),\qquad u=u(t,y) \tag{1.1}$$

$$t>0,\qquad 0<y<\infty$$

Здесь u — скорость жидкости; μ — вязкость, зависящая от температуры; ρ — плотность жидкости; t — время; ось y направлена вниз.

Зависимость вязкости от температуры принимаем в виде [6]

$$\mu(T)=\frac{T}{2B}\exp\left(\frac{H}{RT}\right)\approx\frac{T_0}{2B}\exp\left[\frac{H}{RT_0}-\frac{H(T-T_0)}{RT_0^2}\right]=\mu_0\exp[-a(T-T_0)] \tag{1.2}$$

$$a=\frac{H}{RT_0^2},\qquad \mu_0=\frac{T_0}{2B}\exp\frac{H}{RT_0}$$

Здесь T — температура разогретой жидкости; T_0 — начальная температура среды, совпадающая с температурой пластины; B, H и R — постоянные величины.

Преобразование (1.2), получившее название преобразования Франк-Каменецкого [8], справедливо при условии $|T-T_0| \ll T_0$. В рассматриваемом случае это условие выполняется с большой точностью, так как температура астеносферы из-за процесса переноса тепла в верхней мантии Земли порядка нескольких сотен градусов, а диссипативный разогрев добавляет к этой температуре еще порядка десяти градусов. Однако даже незначительный разогрев жидкости приводит к заметному уменьшению вязкости в силу ее экспоненциальной зависимости от температуры. При этом показатель вязкограммы a имеет величину порядка $aT_0^2 \sim 6 \cdot 10^4$ K.

Распределение температуры в жидкости описывается уравнением притока тепла

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu(T) \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \tag{1.3}$$

$$T = T(t, y), \quad t>0, \quad y>0$$

Здесь ρc_p — теплоемкость единицы объема жидкости; λ — коэффициент теплопроводности $\lambda \sim 8 \cdot 10^{-3}$ кал/см·с·град. Второе слагаемое в правой части этого уравнения учитывает диссипативный разогрев жидкости при сдвиговом течении.

Начальные и краевые условия рассматриваемой задачи сформулируем следующим образом:

$$\begin{gathered} u(0, y) = 0, \quad u(t, 0) = U, \quad u(t, \infty) = 0 \\ T(0, y) = T_0, \quad T(t, 0) = T_0, \quad T(t, \infty) = T_0 \end{gathered} \tag{1.4}$$

Здесь U — скорость движения пластины. Введем безразмерные величины

$$v = \frac{u}{U}, \quad \theta = a(T - T_0), \quad \tau = \frac{U^2 t}{\varkappa}, \quad \eta = \frac{yU}{\varkappa}, \quad \varkappa = \frac{\lambda}{\rho c_p} \tag{1.5}$$

Здесь $\varkappa$ — коэффициент температуропроводности, который в рассматриваемом случае имеет величину порядка 10^{-4}—10^{-2} см^2/с. Уравнение движения (1.1) и притока тепла с учетом (1.5) перепишем в виде

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \Pr \frac{\partial}{\partial \eta}\left(e^{-\theta} \frac{\partial v}{\partial \eta}\right), \quad v = v(\tau, \eta), \quad \tau>0, \quad \eta>0 \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \mathrm{Br}\, e^{-\theta} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)^2, \quad \theta = \theta(\tau, \eta), \quad \tau>0, \quad \eta>0 \tag{1.7}$$

$$\Pr = \nu_0/\varkappa, \quad \mathrm{Br} = \beta \Pr, \quad \beta = aU^2/c_p, \quad \nu_0 = \mu_0/\rho$$

Здесь Pr — число Прандтля; ν_0 — коэффициент кинематической вязкости; Br — число Брюна.

Числа Прандтля и Брюна имеют величины порядка $\Pr \sim 10^{23}$; $\mathrm{Br} \sim 1$. Величина удельной теплоемкости принята равной $c_p = 1{,}2 \cdot 10^7$ эрг/г·град. Начальные и краевые условия для решений уравнений (1.6) и (1.7) имеют вид

$$\begin{gathered} v(0, \eta) = 0, \quad v(\tau, 0) = 1, \quad v(\tau, \infty) = 0 \\ \theta(0, \eta) = 0, \quad \theta(\tau, 0) = 0, \quad \theta(\tau, \infty) = 0 \end{gathered} \tag{1.8}$$

При постоянной величине напряжения сдвига уравнение (1.7) является аналогом уравнения классической теории теплового взрыва [8]. Система (1.6), (1.7) при предельных условиях (1.8) имеет автомодельные решения для скорости и температуры, зависящие только от одной переменной Больцмана $z = \eta / 2\sqrt{\tau}$.

Автомодельные решения, зависящие от такой переменной, удовлетворяют системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\Pr\frac{d}{dz}\left(e^{-\theta}\frac{dv}{dz}\right)+2z\frac{dv}{dz}=0,\quad v=v(z),\quad z>0 \tag{1.9}$$

$$\frac{d^2\theta}{dz^2}+2z\frac{d\theta}{dz}+\mathrm{Br}\,e^{-\theta}\left(\frac{dv}{dz}\right)^2=0,\quad \theta=\theta(z),\quad z>0 \tag{1.10}$$

Соответствующие краевые условия имеют вид

$$v(0)=1,\quad v(\infty)=0,\quad \theta(0)=0,\quad \theta(\infty)=0 \tag{1.11}$$

Решение уравнения (1.9), удовлетворяющее указанным краевым условиям, может быть представлено в виде

$$v=1-\varphi(z)/\varphi(\infty) \tag{1.12}$$

Здесь функция $\varphi(z)$ удовлетворяет тому же уравнению (1.9) и следующим условиям Коши:

$$\varphi(0)=0,\quad \frac{d\varphi(0)}{dz}=1 \tag{1.13}$$

Умножим слагаемые в левой и правой частях уравнения (1.9) на $e^{-\theta}$ и проинтегрируем получившееся уравнение. Имеем

$$\frac{dv}{dz}=-\frac{1}{\varphi(\infty)}\exp\left[-\frac{2}{\Pr}\int_0^z z'e^{\theta}\,dz'\right] \tag{1.14}$$

Подставим это выражение во второе слагаемое в правой части уравнения (1.10)

$$\frac{d^2\theta}{dz^2}+2z\frac{d\theta}{dz}+\frac{\mathrm{Br}}{\varphi^2(\infty)}e^{\theta}\exp\left[-\frac{4}{\Pr}\int_0^z z'e^{\theta}dz'\right]=0 \tag{1.15}$$

При указанных числах Прандтля и для значений $z\sim1$, соответствующих области наибольшего разогрева, уравнение (1.15) можно существенно упростить, полагая показатель экспоненты равным нулю. Имеем

$$\frac{d^2\theta}{dz^2}+2z\frac{d\theta}{dz}+\frac{\mathrm{Br}}{\varphi^2(\infty)}e^{\theta}=0 \tag{1.16}$$

2. Для решения этого уравнения при краевых условиях в полубесконечной области (1.11) воспользуемся следующим приемом [9]. Введем функцию $g=\partial\theta/\partial\,\mathrm{Br}$. Из уравнения (1.16) для функции $g(z,\,\mathrm{Br})$ получаем следующее уравнение:

$$\frac{d^2g}{dz^2}+2z\frac{dg}{dz}+\frac{\mathrm{Br}}{\varphi^2(\infty)}e^{\theta}g+\frac{1}{\varphi^2(\infty)}e^{\theta}=0 \tag{2.1}$$

$$g=g(z,\,\mathrm{Br}),\quad z>0$$

Ищем решение $\theta(z,\,\mathrm{Br})$, непрерывно зависящее от числа Брюна. В этом случае имеем

$$\theta(\mathrm{Br}_0+\Delta\mathrm{Br})\approx\theta(\mathrm{Br}_0)+g\Delta\mathrm{Br} \tag{2.2}$$

Здесь Br_0 — число Брюна, при котором известно решение уравнения (1.16). Функцию $g(z,\,\mathrm{Br})$ можно рассматривать в качестве второго приближения для решения $\theta(z,\,\mathrm{Br})$ при разложении по малому параметру $\Delta\mathrm{Br}$. Нетрудно найти первое приближение. При числе $\mathrm{Br}_0=0$ имеем $\theta\equiv0$.

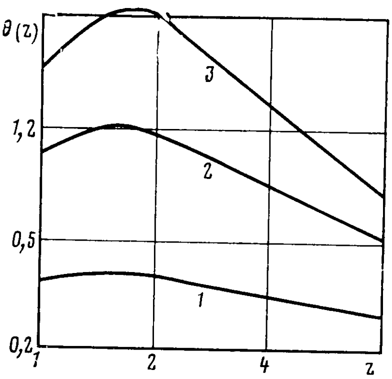
Это приближение подставляем в (2.1). Имеем $(\varphi(\infty)=\sqrt{\pi}/2)$

$$\frac{d^2g}{dz^2}+2z\frac{dg}{dz}+\frac{4}{\pi}\mathrm{Br}\,g+\frac{4}{\pi}=0, \quad g=g(z, \mathrm{Br}) \tag{2.3}$$

Краевые условия для функции $g(z, \mathrm{Br})$ имеют вид

$$g(0)=0, \quad g(\infty)=0 \tag{2.4}$$

Будем искать $g(z, \mathrm{Br})$ в виде суммы двух функций: $F(z, \mathrm{Br})$ и $G(z, \mathrm{Br})$



$$g(z, \mathrm{Br})=F(z, \mathrm{Br})+\gamma G(z, \mathrm{Br}) \tag{2.5}$$

Эти функции находим из решения следующих задач Коши:

$$\frac{d^2F}{dz^2}+2z\frac{dF}{dz}+\frac{4}{\pi}\mathrm{Br}\,F+\frac{4}{\pi}=0$$

$$F(0)=0, \quad F'(0)=0 \tag{2.6}$$

$$\frac{d^2G}{dz^2}+2z\frac{dG}{dz}+\frac{4}{\pi}\mathrm{Br}\,G=0$$

$$G(0)=0, \quad G'(0)=1 \tag{2.7}$$

Величина γ в (2.5) выбирается так, чтобы выполнялись условия на бесконечности $\gamma=-F(\infty)/G(\infty)$.

Задачи (2.6) и (2.7) решались численными методами. Результаты расчетов величины безразмерной температуры $\theta=\mathrm{Br}\,g$ представлены графически на фигуре. Заметим, что можно найти точное решение уравнения (2.3) [10]. Однако аналитическая форма представления решения имеет громоздкий вид и сложна для расчетов. Кроме того, использованный метод сведения задачи (2.3), (2.4) к задачам Коши (2.6), (2.7) позволяет находить последующие приближения для величины безразмерной температуры при числах $\mathrm{Br}\neq 0$. Результаты расчетов показывают, что максимальное значение температуры разогрева соответствует автомодельной переменной $z_*\approx 1{,}5$. Однако зона заметного прогрева может быть принята в пределах $1\leqslant z\leqslant 3$. В этой зоне, которая расширяется и смещается со временем вниз, имеет место понижение вязкости $\mu=\mu_0\exp(-\theta)$. При числе $\mathrm{Br}=0{,}1$ в зоне прогрева $\theta\approx 0{,}36$ и вязкость уменьшается в 1,43 раза. При числе $\mathrm{Br}=0{,}3$, $\theta\approx 1$ и вязкость уменьшается в 2,03 раза. При числе $\mathrm{Br}=0{,}5$, $\theta\approx 2$, при этом вязкость уменьшится в 8 раз. Зона разогрева движется по закону $y_*=2z_*\sqrt{\varkappa t}$. Если принять, что дрейф литосферных плит начался 100—200 млн. лет назад, то зона разогрева в наше время должна быть на глубине ($\varkappa\sim 10^{-4}$ см^2/с)

$$y_*=(2-6)\,(10^{-4}(100-200)\cdot 10^6\cdot 365\cdot 24\cdot 3{,}6\cdot 10^3)^{1/2}\approx 10-40 \text{ км}$$

Эти оценочные расчеты показывают, что под литосферной плитой на глубине 10—40 км должен существовать слой породы с пониженной вязкостью, что коррелируется с данными работы [5]. Если на два порядка увеличить коэффициент температуропроводности [11], то граница прогрева опустится до глубины 400 км. Эта глубина соответствует известной в геофизике сейсмоотражающей границе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ботт М.* Внутреннее строение Земли. М.: Мир, 1974. 373 с.
2. *Кеонджян В. П., Монин А. С.* О концентрационной конвекции в земной мантии.— Докл. АН СССР, 1980, т. 253, № 1, с. 78–81.
3. *Мясников В. П., Фадеев В. Е.* Модели эволюции земли и планет земной группы.— В кн.: Итоги науки и техники. Сер. Физика земли. Т. 5. М.: ВИНИТИ. 1980. 231 с.
4. *Ваньян Л. Л., Шиловский П. П.* Глубинная электропроводность океанов и континентов. М.: Наука, 1983. 86 с.
5. *Копничев Ю. Ф.* О строении верхней мантии и природе вулканизма в районах островных дуг.— Докл. АН СССР, 1983, т. 273, № 1, с. 89–93.
6. *Brunn J. P., Cobbold P. R.* Strain heating and thermal softening in continental shear zones: a review.— J. Struct. Geology, 1980, v. 2, № 1/2, p. 149–158.
7. *Gruntfest I. J.* Thermal feedback in liquid flow; plane shear at constant stress.— Trans. Soc. Rheology, 1963, v. 7, p. 195–207.
8. *Франк-Каменецкий Д. А.* Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1967. 490 с.
9. *На Ц.* Вычислительные методы решения прикладных граничных задач. М.: Мир, 1982. 294 с.
10. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.
11. *Yuen D. A., Peltier W. R.* Mantle plumes and the thermal stability of the D'layer.— Geophys. Res. Lett., 1980, v. 7, № 9, p. 625–628.

Москва

Поступила в редакцию
17.IV.1984