МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 1985

УДК 532.516

ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ, ОБУСЛОВЛЕННОЕ ВИНТООБРАЗНЫМ ДВИЖЕНИЕМ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

ЯРМИЦКИЙ А. Г.

Исследуется течение, вызванное винтообразным экспоненциально затухающим движением тела вращения в неподвижной вдали от него вязкой несжимаемой жидкости. Изучено силовое воздействие со стороны жидкости на перемещающееся указанным способом тело. Показано, что индуцируемое им течение является однородно-винтовым. Изложение иллюстрируется на примере движения сферической поверхности. Сравниваются точное и приближенное (в стоксовом смысле) решения. Классические результаты для установившихся медленных движений сферы (как поступательного, так и вращательного) вытекают в качестве частных случаев.

1. Осесимметричные течения вязкой жидкости (с азимутальной закруткой) описываются следующей системой уравнений для функций тока ψ и функции $\Phi=h_3v_3$, характеризующей распределение азимутальной компоненты скорости v_3 [1]:

$$E^2\psi=-h_3\Omega_3=-\chi$$

$$\chi_t-\nu E^2\chi=\frac{h_3}{h_1h_2}\left(\frac{\partial(\psi,h_3^{-2},\chi)}{\partial(q_1,q_2)}-\frac{\partial(\Phi,h_3^{-2}\Phi)}{\partial(q_1,q_2)}\right) \tag{1.1}$$

$$\Phi_t-\nu E^2\Phi=\frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial(\psi,\Phi)}{\partial(q_1,q_2)}$$

$$E^2=\frac{h_3}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2}{h_1h_3}\frac{\partial}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_1}{h_2h_3}\frac{\partial}{\partial q_2}\right)\right]$$

Здесь q_1, q_2 — криволинейные ортогональные координаты в меридиональной плоскости, q_3 — азимутальный угол φ, так что (q_1, q_2, φ) образуют правую систему ортогональных криволинейных координат вращения; h_i $(i=1-3)$ — коэффициенты Ламе, причем $h_3=r$ — расстояние точки от оси симметрии; $\Omega_3=\Omega_\varphi$ — азимутальная компонента вектора вихря; ν — кинематическая вязкость; индексом t обозначена частная производная $\partial/\partial t$ по времени от соответствующей переменной. Функция тока ψ введена так, что вектор скорости

$$\mathbf{v}=\left(\frac{\partial\psi}{h_2h_3\partial q_2},-\frac{\partial\psi}{h_1h_3\partial q_1},\frac{\Phi}{h_3}\right)$$

Нелинейные члены исчезают при [2]

$$\Phi=\Phi(\psi),\quad \chi=r^2F(\psi)+\Phi(\psi)\Phi'(\psi)$$

Положим

$$F(\psi)=A\,(=\text{const}),\quad \Phi(\psi)=k(t)\psi+l(t) \tag{1.2}$$

где $k(t)$ и $l(t)$ — произвольные функции времени t.

Условие совместности получающейся при этом системы уравнений

$$E^2\psi=-\chi=-(Ar^2+k\Phi),\quad \chi_t-\nu E^2\chi=0$$

$$\Phi_t-\nu E^2\Phi=0,\quad \Phi=k\psi+l$$

дает либо $k=\text{const}$, функция $l(t)$ произвольна, но поле скоростей не зависит от $l(t)$ и потому без нарушения общности можно считать $l(t)=0$, как это сделано в [3], либо $k=0$, $l=\text{const}$. Последний случай исследован в [4] и (при $l=0$) в [5].

При $k=\text{const}(\neq 0)$ [3]

$$A=-dH/d\psi,\quad H=p/\rho+v^2/2+\Pi$$

где p — давление, ρ — плотность, v — модуль вектора скорости, Π — потенциал массовых сил.

Интеграл Бернулли в рассматриваемом случае имеет вид

$$H+A\psi=B(t) \tag{1.3}$$

здесь $B(t)$ — произвольная функция времени.

Как показано в [3] (полагаем $l=0$)

$$\psi=\psi_0(q_1,\ q_2)\exp(-k^2\nu t)-k^{-2}Ar^2 \tag{1.4}$$

причем функция $\psi_0(q_1,\ q_2)$ удовлетворяет уравнению для функции тока однородно-винтового течения невязкой жидкости с напряженностью $k=\text{const}$

$$E^2\psi_0+k^2\psi_0=0 \tag{1.5}$$

Согласно (1.2)

$$\Phi=k\psi_0(q_1,\ q_2)\exp(-k^2\nu t)-k^{-1}Ar^2$$

Случай однородно-винтового потока вязкой жидкости ($A=0$, $k=\text{const}\neq 0$) был изучен еще В. А. Стекловым [6].

Выясним теперь физический смысл постоянных k и A. Для этого заметим, что условие непроницаемости поверхности вращения, перемещающейся со скоростью $\mathbf{W}(t)=W(t)\mathbf{e}_z$ вдоль своей оси симметрии z, требует, чтобы на этой поверхности [7]

$$\psi=\frac{1}{2}W(t)r^2 \tag{1.6}$$

а условие отсутствия относительной азимутальной скорости при вращении тела вокруг той же оси с угловой скоростью ω имеет вид

$$\Phi=\omega(t)r^2 \tag{1.7}$$

Предположим, что во всем потоке $\Phi=k\psi$. Тогда это соотношение должно иметь место и на движущейся поверхности. Поэтому (с учетом (1.6) и (1.7))

$$k=2\omega(t)/W(t)$$

Сравнивая значение (1.4) на поверхности тела с выражением (1.6), приходим к выводу, что скорость $W(t)$ должна иметь следующую структуру:

$$W(t)=W_0\exp(-k^2\nu t)+W_* \tag{1.8}$$

здесь W_* — асимптотическая ($t\to\infty$) аксиальная скорость тела, а W_0 — постоянная (разность между начальным и асимптотическим значениями $W(t)$).

Причем на указанной поверхности

$$\psi_0(q_1, q_2)=\frac{1}{2}W_0r^2,\qquad k^{-2}A=-\frac{1}{2}W_*$$

Выражение для угловой скорости $\omega(t)$ имеет структуру, аналогичную (1.8)

$$\omega(t)=\omega_0 \exp(-k^2\nu t)+\omega_*$$

$$\omega_0=\frac{1}{2}kW_0, \qquad \omega_*=\frac{1}{2}kW_*$$

Параметры A и k получают теперь определенное физическое истолкование: их можно выразить через кинематические параметры движущейся поверхности

$$k=2\omega_0/W_0=2\omega_*/W_*; \qquad A=-2\omega_*^2/W_*$$

Если жидкость занимает все пространство и неподвижна на бесконечности, то $A=0$, а

$$\psi_0(q_1, q_2)/R^2\to 0 \text{ при } R\to\infty, \qquad R^2=r^2+z^2$$

При этом $W_*=\omega_*=0$. В этом случае тело совершает экспоненциально затухающее винтообразное движение, а индуцируемое им течение жидкости является однородно-винтовым с тем же показателем затухания и с напряженностью $k=2\omega_0/W_0$, W_0 и ω_0 — начальные аксиальная и угловая скорости соответственно.

2. Изучим силовое воздействие вязкой жидкости на тело вращения при винтообразном экспоненциально затухающем движении последнего.

Силу, действующую вдоль оси симметрии z со стороны жидкости на тело, найдем по формуле [7], записанной в характеристических координатах

$$F_z=\pi\int\limits_{(L)} r^2\frac{\partial p}{\partial s}ds+2\pi\mu\int\limits_{(L)}\frac{\partial r}{\partial n}E^2\psi ds \tag{2.1}$$

Здесь μ — вязкость, а интегрирование ведется вдоль меридиональных линий (L) в направлении, составляющем положительный угол с внешней нормалью в точке поверхности.

Выполняя в первом слагаемом интегрирование по частям и учитывая, что в точках пересечения поверхности тела с осью вращения $r=0$, перепишем (2.1) в виде

$$F_z=2\pi\left(\mu\int\limits_{(L)}E^2\psi\frac{\partial r}{\partial n}ds-\int\limits_{(L)}pr\,dr\right) \tag{2.2}$$

Поскольку течение вокруг тела винтовое, то в соответствии с (1.3)

$$p=p_\infty-\frac{\rho v^2}{2}$$

где p — динамическое (модифицированное) давление, учитывающее потенциал массовых сил, p_∞ — давление в покоящейся на бесконечности жидкости.

Так как на поверхности тела $v^2=W^2+\omega^2r^2$, то второй интеграл в (2.2) обращается в нуль.

В случае винтового течения $E^2\psi=-k^2\psi$, поэтому из (2.2) следует, что

$$F_z=-2\pi\mu k^2\int\limits_{(L)}\psi\frac{\partial r}{\partial n}ds$$

Подставляя в правую часть значение функции тока ψ на поверхности тела и заменяя $\partial r/\partial n$ на $-\partial z/\partial s$, получим

$$F_z=-k^2\nu MW(t)=-k^2\nu MW_0\exp(-k^2\nu t) \tag{2.3}$$

$$M=-\rho\pi\int\limits_{(L)} r^2 dz$$

Здесь M — масса жидкости в объеме тела.

Выражение (2.3) можно представить в виде

$$F_z=M\frac{dW}{dt} \tag{2.4}$$

Таким образом, сила сопротивления возрастает с ростом аксиального ускорения тела и массы вытесненной жидкости.

Перейдем к определению момента сил сопротивления относительно оси симметрии z тела

$$M_z=2\pi\int\limits_{(L)}\tau_{n\varphi}r^2 ds \tag{2.5}$$

Касательные напряжения $\tau_{n\varphi}$ на поверхности тела в направлении азимутального угла φ можно найти с помощью соотношения

$$\tau_{n\varphi}=\mu r\frac{\partial}{\partial n}(r^{-2}\Phi) \tag{2.6}$$

Подставив в (2.6) значение $\Phi=k\psi$, получим

$$\tau_{n\varphi}=k\mu r\frac{\partial}{\partial n}(r^{-2}\psi)=-k\mu\left(v_s+2r^{-2}\psi\frac{\partial r}{\partial n}\right)$$

Так как на поверхности тела

$$2r^{-2}\psi=W(t),\qquad v_s=-W(t)\frac{\partial r}{\partial n}$$

то $\tau_{n\varphi}=0$, а стало быть, и $M_z=0$.

Таким образом, динамическое воздействие вязкой жидкости на тело вращения, совершающее экспоненциально затухающее винтообразное движение, сводится только лишь к силе сопротивления.

3. Пусть твердая сфера радиуса a совершает винтообразное движение в неограниченной, неподвижной вдали от нее жидкости. Законы изменения ее скоростей — аксиальной $W(t)$ и угловой $\omega(t)$ — таковы

$$W=W_0 f(t),\quad \omega=\omega_0 f(t),\quad f(t)=\exp(-k^2\nu t) \tag{3.1}$$

Введем сферическую систему координат R, θ, φ с началом в центре сферы и с лучом $\theta=0$, направленным вдоль скорости W.

На поверхности движущейся сферы функция $\psi_0(R,\theta)$ удовлетворяет условиям

$$\psi_0(a,\theta)=\frac{1}{2}ag(\theta),\qquad \left.\frac{\partial\psi_0}{\partial R}\right|_{R=a}=g(\theta),\qquad g(\theta)=W_0 a\sin^2\theta \tag{3.2}$$

$$\left.\frac{\psi_0}{R^2}\right|_{R\to\infty}\to 0 \tag{3.3}$$

Уравнению (1.5) с условиями (3.2) и (3.3) удовлетворяет функция

$$\psi_0=\frac{1}{2}W_0 a^2\Psi \tag{3.4}$$

$$\Psi=\frac{\pi\lambda}{2}\left(J_{5/2}(\lambda)Y_{3/2}\left(\lambda\frac{R}{a}\right)-Y_{5/2}(\lambda)J_{3/2}\left(\lambda\frac{R}{a}\right)\right)\left(\frac{R}{a}\right)^{1/2}\sin^2\theta,\quad \lambda=ka=\frac{2\omega_0 a}{W_0}$$

Здесь $J_m(x)$ и $Y_m(x)$, $m=n+{}^1/_2$; $n=1$, 2 — бесселевы функции полуцелого индекса первого и второго рода соответственно; λ — величина, обратная числу Россби.

Таким образом, функции ψ и Φ, описывающие течение вокруг движущейся сферы с законом затухания скоростей (3.1), имеют вид

$$\psi=\frac{1}{2}Wa^2\Psi,\qquad \Phi=\omega a^2\Psi \tag{3.5}$$

Решение аналогичной задачи в стоксовом приближении, удовлетворяющее линеаризованным уравнениям Навье — Стокса

$$E^2\psi=-\chi,\quad \chi_t-\nu E^2\chi=0,\quad \Phi_t-\nu E^2\Phi=0 \tag{3.6}$$

приводит к следующим результатам:

$$\begin{gathered}\psi=\frac{1}{2}Wa^2\left(3Y_{3/2}\left(\lambda\frac{R}{a}\right)-\lambda Y_{5/2}(\lambda)\left(\frac{a}{R}\right)^{3/2}\right)\lambda^{-1}Y_{1/2}^{-1}(\lambda)\left(\frac{R}{a}\right)^{1/2}\sin^2\theta\\ \Phi=\omega a^2Y_{3/2}\left(\lambda\frac{R}{a}\right)Y_{3/2}^{-1}(\lambda)\left(\frac{R}{a}\right)^{1/2}\sin^2\theta\end{gathered} \tag{3.7}$$

если только λ не является одним из нулей функций $Y_{1/2}(\lambda)$ или $Y_{3/2}(\lambda)$.

При $\lambda=\lambda_i$, где $Y_{5/2}(\lambda_i)=0$, приближенное решение (3.7) совпадает с точным (3.5).

Если $\omega_0=0$ и одновременно $k\to 0$, решение (3.7), как и следовало ожидать, соответствует стоксовому для равномерного поступательного движения твердой сферы. В случае, когда $W_0=0$ и $k\to 0$, получаем известный [7, 8] результат для равномерно вращающейся вокруг одного из своих диаметров сферы.

Найдем теперь силу, действующую со стороны жидкости на сферу в случае стоксового приближения. Для этого с помощью линеаризованных уравнений Навье — Стокса, записанных в характеристических координатах, исключим из (2.1) давление

$$\frac{\partial p}{\partial s}=-\left(\rho\frac{\partial v_s}{\partial t}+\mu r^{-1}\frac{\partial}{\partial n}(E^2\psi)\right)$$

и, следовательно

$$F_z=-\pi\left(\rho\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{(L)}r^2v_s ds+\mu\int\limits_{(L)}r^3\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{E^2\psi}{r^2}\right)ds\right)$$

или в сферических координатах

$$F_z=-\pi\left(\rho a^3\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^\pi v_\theta\sin^2\theta d\theta+\mu a^4\int\limits_0^\pi\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{E^2\psi}{R^2}\right)\sin\theta\, d\theta\right)$$

Учитывая, что

$$E^2\psi=-\frac{3}{2}W(t)\lambda\left(\frac{R}{a}\right)^{1/2}Y_{3/2}\left(\lambda\frac{R}{a}\right)Y_{1/2}^{-1}(\lambda)\sin^2\theta$$

и на поверхности сферы $v_s=v_\theta=-W\sin\theta$, после несложных вычислений получим

$$F_z=M\frac{dW}{dt}\left(1+\frac{3}{2}\frac{Y_{5/2}(\lambda)}{Y_{1/2}(\lambda)}\right)$$

где M — масса жидкости, вытесненной сферой.

При $\lambda=\lambda_i$ приходим к (2.4), а при $\lambda\to 0$ — к формуле Стокса для силы сопротивления жидкости при установившемся поступательном движении сферы.

Вычисление момента сил сопротивления с привлечением формул (2.5), (2.6) и второго из выражений (3.7) приводит к такому результату:

$$M_z = -2\omega(t)\nu M \frac{\lambda Y_{5/2}(\lambda)}{Y_{3/2}(\lambda)} \tag{3.8}$$

При $\lambda=\lambda_i$ снова получаем $M_z=0$, а при $\lambda\to 0$ (3.8) приводит к известному [7, 8] соотношению для случая медленного установившегося вращения сферы.

В силу линейности системы (3.6) и краевых условий можно (воспользовавшись принципом суперпозиции) наложить на течение (3.7) стационарное решение линеаризованной задачи о равномерном винтообразном движении сферы. Это позволит описать не только фазу торможения, но и фазу разгона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. 378 с.
2. *Васильев О. Ф.* Основы механики винтовых и циркуляционных потоков. М.– Л.: Госэнергоиздат, 1958. 144 с.
3. *Ярмицкий А. Г.* Об одном классе осесимметричных неустановившихся течений вязкой несжимаемой жидкости.– ПМТФ, 1978, № 2, с. 59–66.
4. *Назаров Г. И., Пучкова Н. Г., Янко А. К.* К интегрированию системы уравнений Навье – Стокса для одного случая вихревого осесимметричного движения несжимаемой жидкости.– В кн.: Гидромеханика. Вып. 19. Киев: Наук. думка, 1971, с. 66–71.
5. *Milne-Thomson L. M.* Axisymmetrical isovistive flows with vorticity proportional to distance from the axis.– Rev. Roum. Sci. Techn. Mec. Appl., 1968, v. 13, № 6, p. 1041–1052.
6. *Стеклов В. А.* Один случай движения вязкой несжимаемой жидкости.– Сообщ. Харьковск. матем. о-ва. Сер. 2. 1896, т. 5. № 3–4, с. 101–124.
7. *Хаппель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с.
8. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1953. 788 с.

Жданов

Поступила в редакцию
16.IX.1983