

УДК 532.51.013.4

О НЕЛИНЕЙНОМ РАЗВИТИИ ДВУМЕРНЫХ И ТРЕХМЕРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПРИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ РЭЛЕЯ — ТЕЙЛОРА

ГЕРЦЕНШТЕЙН С. Я., ЧЕРНЯВСКИЙ В. М.

Исследуется нелинейная эволюция двумерных и трехмерных возмущений конечной амплитуды при неустойчивости Рэлея — Тейлора. Задача рассматривается в предположении потенциальности течения. Решение строится методом Фурье [1]. В двумерном случае применяется метод конформных отображений [2, 3], что позволяет рассмотреть глубокие нелинейные стадии развития возмущений, включая образование поверхностей с неоднозначной зависимостью переменных в декартовых координатах. Построение отображений сводится к решению задачи Гильберта, которое дано в виде интегралов Шварца [4]. Используются явные выражения для этих интегралов [5], полученные с помощью рядов Фурье. Разработаны эффективные вычислительные алгоритмы и проведена серия численных исследований. Обнаружено, в частности, дестабилизирующее влияние коротковолновых составляющих, показано регулирующее действие поверхностного натяжения, найдены характерные времена нелинейного развития возмущений и характерные спектральные распределения. Исследована роль трехмерных эффектов, которая характеризуется уменьшением скорости развития возмущений.

1. Большое значение при исследовании неустойчивости Рэлея — Тейлора [6–13] имеет учет неоднозначности (в декартовых переменных) поверхности раздела, которая может возникнуть на поздних стадиях нелинейной эволюции конечно-амплитудных возмущений. Приведем краткое сопоставление известных подходов, с помощью которых решалась рассматриваемая задача.

При использовании метода Лагранжа — Эйлера [6] задача сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для координат дискретного набора N жидких частиц и интегрального уравнения для потенциала, основанного на формуле Грина. При численном решении требуется выполнение $O(N^3)$ операций с использованием памяти $O(N^2)$ машинных слов, необходимых для хранения и обращения соответствующих матриц.

Классический метод, моделирующий поверхность раздела набором N точечных вихрей, сводится к решению дискретного варианта интегродифференциального уравнения типа Фредгольма для интенсивностей вихрей. Достоинством этого метода по сравнению с предыдущим является возможность применения сходящейся итерационной процедуры, позволяющей сократить число операций на одном временном шаге до величины $O(N^2)$ и памяти $O(N)$ слов.

Применение конечно-разностного метода на основе полных уравнений Навье — Стокса [8] с использованием двумерной сетки, содержащей $N_1 \times N_2$ ячеек, требует $O(N_1^a N_2^b)$ операций ($a+b \geq 3$) и $O(N_1 N_2)$ слов памяти.

Одним из наиболее эффективных подходов является метод конформных преобразований [2, 3]. Для неустановившихся волновых движений этот метод разрабатывался в [12, 13], а также авторами настоящей работы¹. Следуя методике, разработанной в [11], в работах [12, 13] построение конформного отображения сведено к отысканию решения нелинейного интегрального уравнения. Численная процедура требует при этом $O(N^2)$ операций и использует $O(N)$ слов памяти.

В данной работе отыскание конформного отображения сводится к задаче Гильберта, решение которой дано в [4] в виде двух интегралов Шварца. Применение разложения в ряд Фурье [1] и использование быстрого преобразования позволяет сократить число арифметических операций до величины $O(N \ln N)$, необходимая память составляет $O(N)$ машинных слов.

Важную роль в задаче о нелинейном развитии течения с поверхностью раздела играет поверхностное натяжение, влияние которого исследовалось в [10]. В настоящей работе используется параметризация, позволяющая рассматривать более поздние стадии развития возмущений. Кроме того, рассматриваются мало исследованные вопросы о влиянии трехмерных эффектов и зависимости силы тяжести от времени.

¹ Отчеты Института механики МГУ, № 2378, 1980 г. и № 2866, 1983 г.

2. В двумерном случае отыскиваются периодические по x , с периодом $d=2\pi/\alpha$, ограниченные решения уравнения Лапласа, удовлетворяющие на свободной поверхности $x=u(e, t)$, $y=v(e, t)$ кинематическому и динамическому условиям

$$\Delta\Phi=0 \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \quad (2.1)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial y} \quad \left(\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \nabla\Phi\nabla \right) \quad (2.2)$$

$$P_+ - P_- = \gamma K \quad (2.3)$$

Здесь x, y и t – координаты и время, Φ – потенциал скорости, e – параметр вдоль границы, P_+ и P_- – соответственно давление на границе раздела со стороны жидкости и извне, K – кривизна поверхности раздела, γ – коэффициент поверхностного натяжения.

В дальнейшем предполагается, что в отсутствие возмущений жидкость занимает область $y \geq 0$, сила тяжести направлена в отрицательном направлении оси y и вне жидкости давление $P_- = 0$.

Пользуясь интегралом Коши – Лагранжа, преобразуем (2.3) к безразмерному виду, сохраняя для новых переменных прежние обозначения

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} \right)^2 \right] + y + \gamma K = 0 \quad (2.4)$$

Здесь в качестве единиц длины, времени и массы выбраны соответственно следующие величины: $L=d/2\pi$, $T=\sqrt{L/g}$, $M=\rho L^3$, где ρ – плотность жидкости, g – ускорение свободного падения.

Рассмотрим преобразование переменных, осуществляющее конформное отображение области с неизвестной границей на верхнюю полуплоскость $p \geq 0$ в новых переменных s, p так, что граница раздела отображается на координатную линию $p=0$

$$x=x(s, p, \tau), \quad y=y(s, p, \tau), \quad t=\tau \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial p}, \quad \frac{\partial x}{\partial p} = -\frac{\partial y}{\partial s} \quad (2.6)$$

Связь между производными в переменных x, y, t и s, p, τ определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{1}{h^2} \left(\frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial x}{\partial p} \frac{\partial}{\partial p} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{1}{h^2} \left(\frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial y}{\partial p} \frac{\partial}{\partial p} \right) \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial x}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$h^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right)^2$$

Из соотношений (2.2) при $p=0$ легко получить

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial x}{\partial s} \frac{ds}{d\tau} &= \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \\ \frac{\partial y}{\partial \tau} + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{ds}{d\tau} &= \frac{\partial\Phi}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Подставив в (2.4) и (2.8) выражения для производных (2.7) и спроектировав (2.8) на нормаль $\{\partial x/\partial p, \partial y/\partial p\}$ к свободной поверхности $x=x(s, 0, \tau)$, $y=y(s, 0, \tau)$, будем иметь

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} \frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial y}{\partial \tau} \frac{\partial y}{\partial p} = \frac{\partial \Phi}{\partial p} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{1}{h^2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial s} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right)^2 - \right. \\ \left. - \left(\frac{\partial x}{\partial \tau} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial y}{\partial \tau} \frac{\partial y}{\partial s} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right] + y + \gamma K = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Пусть, следуя [2], $x=s+x_1(s, p, \tau)$, $y=p+y_1(s, p, \tau)$, а функции $x_1(s, p, \tau)$, $y_1(s, p, \tau)$ имеют по s период 2π . Нетрудно видеть, что разрешение условия (2.9) относительно производных по времени $\partial x/\partial \tau$ и $\partial y/\partial \tau$ сводится к решению задачи Гильберта.

Краевая задача Гильберта [4] заключается в нахождении аналитической в области D и непрерывной на ее границе Σ функции $f(q)$, предельные значения действительной и мнимой части которой удовлетворяют на Σ линейному соотношению

$$a(s)f_r(s, 0) + b(s)f_i(s, 0) = c(s) \quad (2.11)$$

$$f(q) = f_r(s, p) + if_i(s, p), \quad q = s + ip$$

Здесь $a(s)$, $b(s)$, $c(s)$ — вещественные функции. Задача (2.9) сводится к задаче Гильберта (2.11) с помощью обозначений

$$\begin{aligned} f(q) &= \frac{\partial x}{\partial \tau}(s, p, \tau) + i \frac{\partial y}{\partial \tau}(s, p, \tau) \\ a(s) + ib(s) &= \frac{\partial x}{\partial s}(s, 0, \tau) + i \frac{\partial y}{\partial s}(s, 0, \tau) \\ c(s) &= \frac{\partial \Phi}{\partial p}(s, 0, \tau) \end{aligned}$$

Пользуясь условиями периодичности $x_1(s, p, \tau)$ и $y_1(s, p, \tau)$, решение указанной задачи будем строить в области $D \{0 \leq s \leq 2\pi, p \geq 0\}$. Введем вспомогательное преобразование $\xi = e^{i\alpha}$, отображающее область D на внутренность единичного круга. Для единичного круга функция $f(q) = F(\xi)$ представима в следующем виде (параметрическая зависимость от времени опущена) [4]:

$$F(\xi) = \xi^l e^{i\nu(\xi)} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\omega(\sigma)} c(\sigma) \frac{e^{i\sigma} + \xi}{e^{i\sigma} - \xi} d\sigma + Q_l(\xi) \right] \quad (2.12)$$

$$\nu(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{b(\sigma)}{a(\sigma)} - l\sigma \right) \frac{e^{i\sigma} + \xi}{e^{i\sigma} - \xi} d\sigma$$

$$Q_l = \sum_{n=0}^l (\delta_n \xi^n - \sigma_n^* \xi^{-n})$$

$$\xi = e^{i\alpha}, \quad \omega(\sigma) = \operatorname{Im}(\nu(\xi))$$

Целое число l , называемое индексом задачи Гильберта, определяется как деленное на 2π приращение аргумента функции $a(s)+ib(s)$ по контуре Σ при обходе его в положительном направлении

$$l = \frac{1}{2\pi} [\arg(a(s)+ib(s))]_{\Sigma} \quad (2.13)$$

В рассматриваемом случае индекс равен числу нулей в области D аналитической функции $\partial w(q)/\partial q$, $w=x+iy$.

Таким образом, разрешение кинематического условия сводится к вычислению двух интегралов типа Коши, которое может быть выполнено с помощью разложения весовых функций в ряды Фурье. Полином $Q_l(\xi)$ содержит $l+1$ произвольную функцию от времени, при этом решение $F(\xi)$ ограничено при $p \rightarrow \infty$.

Требование затухания $x_1(s, p, \tau)$ и $y_1(s, p, \tau)$ при $p \rightarrow \infty$ приводит к тому, что $\delta_l(\tau)=0$ и полином $Q_{l-1}(\xi)$ определяет l линейно-независимых решений однородной задачи.

Отметим, что решение нестационарной задачи обладает единственным решением. В силу линейности задачи Гильберта ее решение можно представить в виде суммы частного решения неоднородной задачи ($Q_l=0$) и общего решения однородной задачи ($c(s)=0$). Можно показать, что частное решение непрерывно при изменении индекса. Рассмотрим однородную задачу. Очевидно, что с учетом условия затухания при $l=0$ имеем единственное решение с $Q_0(\xi)=0$. Если в процессе эволюции индекс становится отличным от нуля, то в момент, когда происходит изменение индекса, требование непрерывности решения по времени приводит к необходимости положить $Q_l(\xi)=0$.

Отметим, что при $l=0$ решение имеет следующий простой вид:

$$\frac{\partial w(q, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial w(q, \tau)}{\partial q} (A(s, p, \tau) + iB(s, p, \tau)) \quad (2.14)$$

$$B(s, 0, \tau) = \frac{\partial \Phi(s, 0, \tau)}{\partial p} \frac{1}{h^2(s, 0, \tau)}$$

Здесь $A(s, p, \tau) + iB(s, p, \tau)$ — аналитическая функция.

Решение уравнения (2.1), удовлетворяющее граничным условиям периодичности и условию затухания возмущений на бесконечности при $y \rightarrow \infty$ ($p \rightarrow \infty$), ищется в следующем виде:

$$\Phi = \frac{\varphi_0(\tau)}{2} + \sum_{n=1}^N \varphi_n(\tau) e^{-np} \cos(ns) \quad (2.15)$$

$$x = s - \sum_{n=1}^N w_n(\tau) e^{-np} \sin(ns)$$

$$y = p + \sum_{n=1}^N w_n(\tau) e^{-np} \cos(ns) + \frac{w_0(\tau)}{2}$$

Подстановка разложений для Φ , x , y в (2.10), (2.12) при $p=0$ приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов $\varphi_n(\tau)$, $w_n(\tau)$.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов $\varphi_n(\tau)$ и $w_n(\tau)$ решалась методом Рунге — Кутты с автоматическим выбором шага с начальными условиями следующего вида:

$$\begin{aligned} \varphi_n(0) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad w_n(0) = w_n^{(0)} \\ n = 1, 2, \dots, N, \quad w_0(0) = 2 \sum_{n=1}^N n w_n^2(0) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Третье из условий (2.16) следует из закона сохранения массы жидкости M_0

$$\begin{aligned} \frac{dM_0}{dt} = \frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} y \frac{\partial x}{\partial s} ds = 0 \\ \int_0^{2\pi} y \frac{\partial x}{\partial s} ds = \text{const} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Здесь $x = x(s, 0, \tau)$, $y = y(s, 0, \tau)$. В невозмущенном состоянии $y(s, 0, 0) = 0$, поэтому $\text{const} = 0$. Подставляя разложения (2.15) в (2.17), получим третье условие в (2.16). Это условие является также интегралом (2.9) и используется для контроля точности вычислений. Начальные условия $w_n^{(0)}$ задавались как непосредственно, так и вычислялись при задании начальной формы свободной поверхности в декартовых координатах в виде $y = f(x)$. В последнем случае использовался уже рассмотренный выше алгоритм решения задачи Гильберта, приведение к которой осуществлялось описываемым ниже способом.

Пусть уравнение кривой записано в виде $y = \lambda f(x)$ и $f(x)$ — периодическая функция с периодом 2λ . Отыскиваются коэффициенты $w_n(\lambda)$ в представлении (2.15). Дифференцируя уравнение кривой по параметру λ , получим задачу Гильберта для функции $\partial w / \partial \lambda = \partial x(q, \lambda) / \partial \lambda + i \partial y(q, \lambda) / \partial \lambda$

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} - \lambda \frac{df}{dx} \frac{\partial x}{\partial \lambda} = f(x)$$

В качестве начального условия используется уравнение кривой при $\lambda = 0$, записанное в виде $x(s, 0, 0) = s$, $y(s, 0, 0) = 0$.

Интегрирование проводилось указанным методом от $\lambda = 0$ до $\lambda = 1$. Функции $f(x)$ и df/dx вычислялись с помощью быстрого преобразования Фурье.

Вычисление индекса в (2.13), алгебраических функций и умножение рядов в (2.10), (2.12) и (2.14) проводилось в точках $2\pi n/N$ ($n = 0, 1, \dots, N$), а для вычисления производных и интегралов по пространственным переменным использовалось спектральное представление (2.15). Применение быстрого преобразования Фурье позволяет ограничить трудоемкость на шаге интегрирования величиной $O(N \ln N)$.

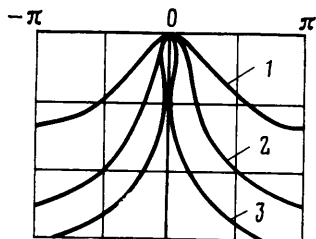
3. Для проверки описанной методики строилось численное решение задачи при $g = 0$, аналитическое решение которой дано Крэпшером [3]. На фиг. 1 изображена форма свободной поверхности, соответствующая различным начальным уровням энергии при учете 16 гармоник в разложении (2.15). Отметим, что с графической точностью результаты численного и аналитического решений совпадают [3].

На фиг. 2—3 представлены результаты расчетов для двух значений коэффициентов поверхностного натяжения γ : 0 и 0,5.

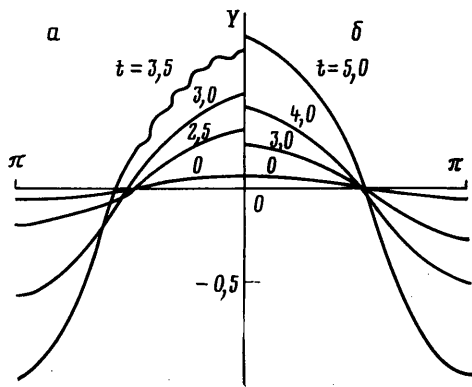
На фиг. 2 изображена форма свободной поверхности в последовательные моменты времени, соответствующая начальным условиям вида $y = -0,05 \cos x$. Существенно, что при $\gamma = 0$ на свободной поверхности интенсивно развиваются мелкомасштабные возмущения (фиг. 2, а). Увеличение количества учитываемых гармоник сглаживает свободную поверх-

ность только до определенного момента времени, а уже при $t \approx 4$ наблюдается образование мелкомасштабной ряби на вершине волны.

Фигура 2, а иллюстрирует также известную тенденцию [14] к установлению постоянной скорости подъема «пузыря» и постоянного ускорения проваливающегося узкого «языка» тяжелой жидкости. При этом максимальное отклонение поверхности раздела достигает величины порядка единицы, а время развития возмущений — порядка четырех. На временах, больших по сравнению с указанным, происходит разрушение решения, связанное с невыполнением законов сохранения массы и энергии. Подобное поведение согласуется с результатами [12, 13].



Фиг. 1



Фиг. 2

На фиг. 2, б приведена форма свободной поверхности в последовательные моменты времени при $\gamma = 0,5$. Видно, что учет поверхностной силы приводит к выглаживанию границы. Поверхностное натяжение не оказывает заметного воздействия на скорости «пузыря» и вместе с тем уменьшает ускорение «языка» жидкости.

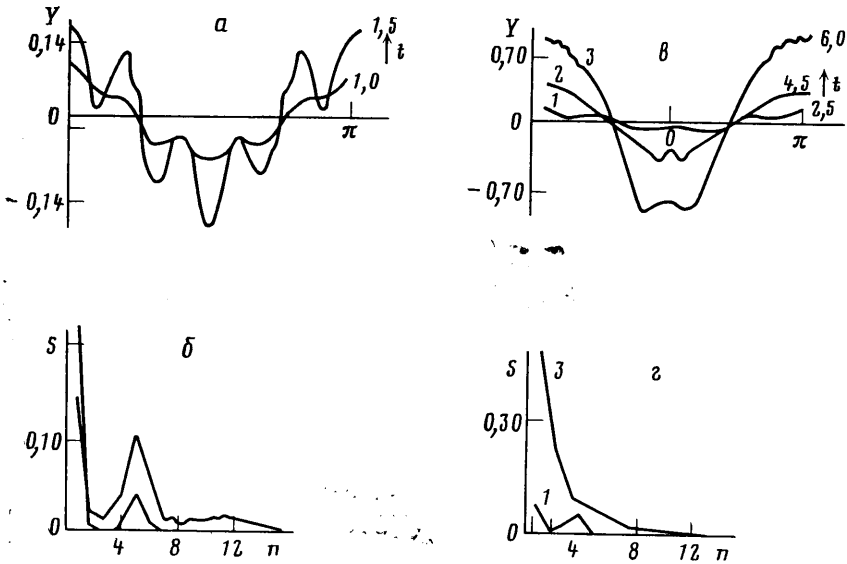
На фиг. 3 иллюстрируется роль мелкомасштабных возмущений, введенных в начальные условия.

Существенно, что рост той или иной мелкомасштабной компоненты при $\gamma = 0$ носит в известной степени случайный характер, определяемый малым возмущением начальных условий. Так, введение пятой гармоники с начальной амплитудой, на порядок меньшей амплитуды первой гармоники, приводит уже на относительно небольших временах (при $t \approx 1,5$) к активной генерации мелкомасштабных возмущений, заметно изменяющих форму свободной поверхности (фиг. 3, а) и ее спектральное распределение (фиг. 3, б).

При учете поверхностного натяжения влияние мелкомасштабных возмущений, введенных в начальные условия, быстро уменьшается так, что свободная поверхность (фиг. 3, в) и ее спектральное распределение (фиг. 3, г) становятся близкими к их невозмущенным значениям. При этом спектральное распределение имеет гладкий монотонный характер. Введение мелкомасштабных возмущений приводит лишь к некоторому общему повышению уровня пульсаций, при этом увеличение энергии длинноволновых составляющих объясняется, по-видимому, уменьшением переноса энергии в коротковолновую часть спектра.

Таким образом, модель, не учитывающая поверхностное натяжение, правильно предсказывает скорость «пузыря», однако расчет ускорения «языка» требует учета сил поверхностного натяжения. Кроме того, поверхностное натяжение оказывает регуляризирующее воздействие на рассматриваемое явление, т. е. форма свободной поверхности оказывается более гладкой.

4. В работе проводится также сопоставление результатов расчета двумерных и трехмерных волновых возмущений на ранней стадии нелинейного развития. Учитывается влияние сил поверхностного натяжения и зависимость силы тяжести от времени.



Фиг. 3

В трехмерном случае задача сводится к отысканию ограниченного решения уравнения Лапласа для потенциала скорости $\Phi(x, y, z, t)$, удовлетворяющего на границе жидкости $y=\eta(x, z, t)$ и в бесконечности следующим граничным условиям:

$$\Delta\Phi=0 \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + g\eta + \gamma K = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\eta}{\partial x} \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial z} \frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0 \quad (4.3)$$

$$|\nabla\Phi| \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow \infty) \quad (4.4)$$

$$|\Phi| < \infty \quad (x, z \rightarrow \pm\infty)$$

$$K = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\eta_x}{(1+\eta_x^2+\eta_z^2)^{1/2}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\eta_z}{(1+\eta_x^2+\eta_z^2)^{1/2}} \right) \quad (4.5)$$

Здесь K — кривизна свободной поверхности, $\eta_x = \partial\eta/\partial x$, $\eta_z = \partial\eta/\partial z$.

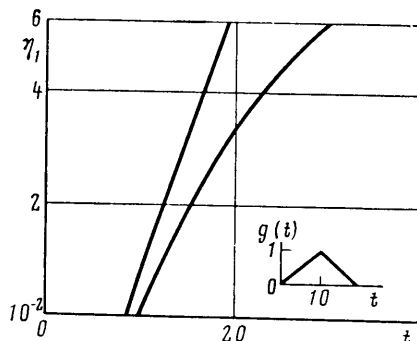
Решение задачи (4.1)–(4.5) строится с помощью метода Фурье. Отклонение свободной поверхности η от ее невозмущенного уровня представляется в виде ряда Фурье по циклическим координатам x, z с коэффициентами, зависящими от времени. При этом потенциал $\Phi(x, y, z, t)$ ищется в виде ряда по системе функций, удовлетворяющих уравнению Лапласа и являющихся точными решениями соответствующей линеаризованной задачи

$$\eta(x, z, t) = 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=0}^N \eta_n(t) e^{i(\alpha_n x + \beta_n z)} \right\}$$

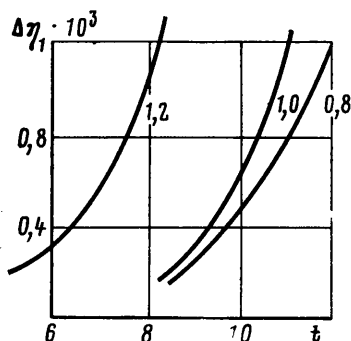
$$\Phi(x, y, z, t) = 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=0}^N \varphi_n(t) e^{i(\alpha_n x + \beta_n z) + \gamma_n y} \right\}, \quad \gamma_n = -\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}$$

Здесь $\{\alpha_n, \beta_n\}$ — волновой вектор.

Входящие в граничные условия функции Φ , $\partial\Phi/\partial x$, $\partial\Phi/\partial y$, $\partial\Phi/\partial z$, раскладываются в ряды Тейлора, в которых учитывается необходимое для получения заданной точности количество членов. В эти приближенные граничные условия подставляются укороченные ряды Фурье для потен-



Фиг. 4



Фиг. 5

циала Φ и отклонения η . Коэффициенты при одинаковых гармониках приравняются, и задача сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов $\varphi_n(t)$, $\eta_n(t)$ в (4.6) с начальными условиями $\varphi_n(0) = 0$, $\eta_n(0) = \eta_n^0$.

5. Рассмотрим результаты, полученные с учетом трехмерных возмущений и зависимости от времени ускорения $g(t)$. Для оценки влияния зависимости $g(t)$ вначале было рассмотрено развитие двумерных возмущений. Параметры проведенных расчетов были выбраны в соответствии с экспериментом по лазерному «обжатию», в котором характерное время составляло 10^{-9} с, ускорение изменялось от 0 до 10^{16} см/с², а характерные размеры стеклянных сферических оболочек были порядка $3 \cdot 10^{-4}$ см [15].

Расчеты проводились как с постоянным, так и с переменным ускорением $g(t)$, заданным в виде треугольного импульса. В безразмерных переменных характерное время составляло $t \approx 20$. В нестационарном случае максимальное значение ускорения равнялось 1, постоянное ускорение бралось равным 0,5. Безразмерное волновое число α первой гармоники в обоих случаях равнялось 1.

На фиг. 4 иллюстрируется роль нестационарности ускорения. Показано, что характерная величина — амплитуда основной гармоники $\eta_1(t)$ — в случае нестационарного ускорения (кривая 1) на временах $t \approx 20$ примерно в 2 раза меньше, чем соответствующая величина, полученная при расчете с постоянным ускорением (кривая 2).

Для оценки влияния трехмерных эффектов сравнивались амплитуды первых гармоник двумерной волны и продольной волны в трехмерном случае. Начальные амплитуды и длины продольной ($\eta_1(0) = \eta^0$, $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = 0$) и поперечной ($\eta_2(0) = \eta^0$, $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 = \alpha$) волн брались равными амплитуде и длине двумерной волны ($\eta_1(0) = \eta^0$, $\eta_2(0) = 0$, $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 = \alpha$). При этом текущие значения амплитуд продольной и поперечной волн оказываются равными между собой.

На фиг. 5 изображены в зависимости от времени кривые, представляющие собой разницу $\Delta\eta_1$ между амплитудами первых гармоник двумерной волны и продольной трехмерной волны. Кривые 1–3 соответствуют расчетам с волновыми числами $\alpha = 0,8$; 1,0; 1,2, коэффициентом поверхностного

натяжения $\gamma=0$, ускорением $g(t)$ — треугольным импульсом, изображенным на вставке, начальными условиями для амплитуд первых гармоник $\eta^0=0,04$.

Проведенные расчеты установили уменьшение амплитуды первой гармоники продольной волны по сравнению с амплитудой первой гармоники двумерной волны за счет передачи энергии в боковые волны. На фиг. 5 видно, что трехмерные эффекты заметнее проявляются для более коротких волн.

В заключение авторы выражают глубокую признательность Ю. Б. Рабиновичу и С. Л. Петрову, разработки которых были использованы при составлении программы расчета, а также Ю. М. Штемлеру за обсуждение методических вопросов и численных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.— Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.
2. Некрасов А. И. Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости. М.: Изд-во АН СССР, 1951. 95 с.
3. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
4. Газов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
5. Пыхтеев Г. Н. Приближенные методы вычисления интегралов типа Коши специального вида. Новосибирск: Наука, 1982. 127 с.
6. Longue-Higgins M. S., Cokelet E. D. The deformation of steep surface waves on water.— Proc. Roy. Soc. Lond. A, 1976, v. 350, № 1660, p. 1–26.
7. Baker G. R., Meiron D. I., Orszag S. A. Vortex simulations of the Rayleigh — Taylor instability.— Phys. Fluids, 1980, v. 23, № 8, p. 1485–1490.
8. Daly B. J. Numerical study of two fluid Rayleigh — Taylor instability.— Phys. Fluids, 1967, v. 10, № 2, p. 297–307.
9. Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М. Метод крупных частиц в газовой динамике. Вычислительный эксперимент. М.: Наука, 1982, 391 с.
10. Бабенко К. И., Петрович В. Ю. О неустойчивости Рэля — Тэйлора. Препринт Ин-та прикл. математики. № 68, 1978.
11. Menikoff R., Zemach C. Methods for numerical conformal mapping.— J. Comput. Phys., 1980, v. 36, № 3, p. 366–410.
12. Meiron D. I., Orszag S. A., Israeli M. Applications of numerical conformal mapping.— J. Comput. Phys., 1981, v. 40, № 2, p. 345–360.
13. Menikoff R., Zemach C. Rayleigh — Taylor instability and the use of conformal maps for ideal fluid flow.— J. Comput. Phys., 1983, v. 51, № 1, p. 28–64.
14. Emmons H. W., Chang C. T., Watson B. S. Taylor instability of finite surface waves.— J. Fluid Mech., 1960, v. 7, № 2, p. 177–193.

Москва

Поступила в редакцию
6.VII.1984