

УДК 532.5.031

## ВИХРЕВОЕ НЕВЯЗКОЕ ТЕЧЕНИЕ С ЦИРКУЛЯЦИОННЫМИ ЗОНАМИ В КАНАЛЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

КОНОВАЛОВ А. Е.

Развитие теории вихревого движения невязкой жидкости для описания течения в канале встречает определенные трудности в связи с проявлением эффектов вязкости вблизи твердых стенок. В потенциально-вихревой модели течения [1], в которой завихренность отлична от нуля лишь в замкнутой циркуляционной зоне, окруженной потенциальным потоком, предполагается, что точки отрыва и присоединения известны заранее. Например, при обтекании каверны эти точки совпадают с крайними угловыми точками контура. Проблема определения завихренности в замкнутой зоне для потенциально-вихревой схемы исследована в ряде работ [2, 3 и др.]. В случае несжимаемой жидкости завихренность в циркуляционной зоне постоянна для двумерного течения и пропорциональна расстоянию от оси для осесимметричного. Величина константы находится из условия стационарности прилегающих вязких слоев.

Если стенки канала имеют плавный профиль без угловых точек, то для определения границ циркуляционных зон нужно использовать дополнительные условия. В настоящей работе принята другая схема, в которой завихренность формируется вне области течения и в конкретной задаче задается в виде граничного условия.

Получено аналитическое решение, описывающее вихревое течение невязкой жидкости в канале со слабо меняющимся сечением. Рассмотрены три типа входной неравномерности потока: 1) равномерное сдвиговое течение, 2) течение типа следа и 3) потенциальное течение с узким пристеночным сдвиговым слоем. Для течений в диффузорных каналах при указанных видах неравномерности на входе построены картины линий тока с циркуляционными зонами. Обсуждается модель отрывного течения в канале с турбулентным пограничным слоем на стенках.

Ограничимся классом задач, в которых воздействие вязких сил мало по сравнению с градиентом давления, обусловленным геометрией канала. Поэтому завихренность вдоль линий тока можно считать постоянной и известной. Причем естественно предположить, что постоянная завихренности в циркуляционной зоне будет той же, что и на граничной линии тока, приходящей из начального сечения канала.

Решение задачи, которую можно отнести к задачам данного типа, рассматривалось в работе [4], в которой было получено соотношение, связывающее параметры течения во входном и выходном участках канала. Эти участки были прямыми и имели постоянные площади поперечного сечения. Поэтому нормальная компонента скорости была равна нулю и решение получилось в конечном виде. В случае канала переменной площади решение задачи существенно усложняется, так как появляется нормальная составляющая скорости. В дальнейшем будут рассматриваться каналы с малым изменением площади сечения, таким, чтобы выполнялось соотношение

$$|\partial v / \partial x| \ll |\partial u / \partial y| \quad (1)$$

Здесь  $u$ ,  $v$  — продольная и поперечная компоненты скорости, а  $x$ ,  $y$  — соответствующие координаты. Предположение (1), ограничивающее изменение течения вдоль оси  $x$ , использовалось в работе [5].

Сформулируем задачу. Течение предполагается установившимся, двумерным или осесимметричным. После введения функции тока  $\psi$  величина

завихренности  $\omega$  в двумерном пространстве будет иметь вид

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad (2)$$

$$u = \partial \psi / \partial y, \quad v = -\partial \psi / \partial x$$

Так как завихренность в двумерном течении сохраняется на линии тока, то из (2) следует уравнение

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega(\psi) \quad (3)$$

Функция  $\omega(\psi)$  может быть определена из граничных условий на входе в канал. Пусть для простоты канал имеет прямые участки на концах, направленные по оси  $x$ . Тогда  $\omega(\psi) = -(du^2(\psi)/d\psi)/2$ , где  $u(\psi)$  — профиль скорости на входе в канал.

Граничные условия для уравнения (3) можно записать следующим образом:

$$\psi = \psi_1(y) \quad (x=0), \quad \partial \psi / \partial x = 0 \quad (x=L)$$

$$\psi = \psi_- \quad (y=R_-(x)), \quad \psi = \psi_+ \quad (y=R_+(x)) \quad (4)$$

В случае образования в канале циркуляционных зон с постоянной завихренностью [2] значение константы можно взять тем же, что и на граничной (ветвящейся) линии тока. Такое условие использовалось в задаче натекания струи на стенку [6].

Получим решение уравнения (3) с граничными условиями (4). В силу предположения (1) уравнение (3) редуцируется к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 \psi}{dy^2} = -\omega(\psi) \quad (5)$$

Переменная  $x$  входит в неизвестную функцию  $\psi$  неявно, как параметр. Введем переменную  $u = \partial \psi / \partial y$  в уравнение (5)

$$u \frac{du}{d\psi} = -\omega(\psi) \quad (6)$$

После интегрирования (6), обозначив  $u_- = u(\psi_-)$ , получим

$$u^2 - u_-^2 = -2 \int_{\psi_-}^{\psi} \omega(\psi'') d\psi''$$

Возвращаемся к переменной  $y$  и интегрируем второй раз

$$y = R_- + \int_{\psi_-}^{\psi} \frac{d\psi'}{\sqrt{u_-^2 - \xi}}, \quad \xi = 2 \int_{\psi_-}^{\psi} \omega d\psi''$$

Величина  $u_-(x)$  находится из условия (4)  $y = R_+(x)$  при  $\psi = \psi_+$ .

Результат для осесимметричного течения получается пересчетом с помощью замены координат

$$y = r^2/2 - r_1^2/2$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пусть завихренность постоянна во всей области течения:  $\omega(\psi) = c$ . Это означает, что функция  $\psi_1(y)$  в граничных условиях (4), которая определяет завихренность на линиях тока, удовлетворяет условию  $d^2 \psi_1 / dy^2 = -c$ .

Кроме того, в циркуляционных зонах  $D_i$  функция  $\omega$  продолжена таким образом, что  $\omega(\psi) = c, \psi \in D_i$ .

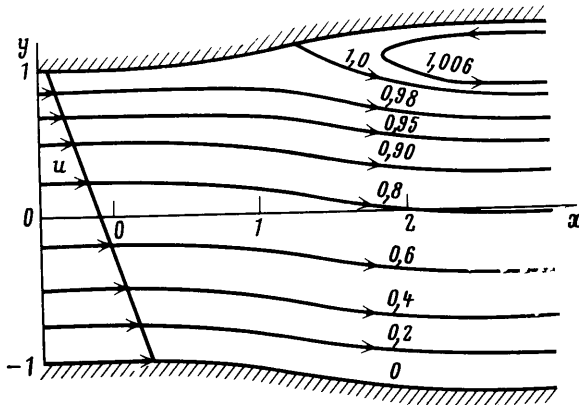
Решение при  $R_- = -R, R_+ = R, Q = \psi_+ - \psi_-$  имеет простой вид

$$\psi = \psi_- + \frac{Q}{2} \left( 1 + \frac{y}{R} \right) + \frac{cR^2}{2} \left( 1 - \left( \frac{y}{R} \right)^2 \right) \quad (7)$$

В этом случае имеется одна циркуляционная зона с границей, на которой  $\psi = \psi_+$ . Граничная линия тока определяется уравнением

$$1 + \frac{y}{R} = \frac{Q}{cR^2}$$

Положение точки ветвления (или отрыва при  $y=R$ ) находится из соотношения  $R(x_0) = \sqrt{Q/(2c)}$ .



Фиг. 1

Если  $c < 0$ , то циркуляционная зона ограничена линией тока  $\psi = \psi_-$

$$1 - \frac{y}{R} = -\frac{Q}{cR^2}$$

выходящей из точки  $R(x_0) = -\sqrt{Q/(-2c)}$ .

Легко убедиться, что в области  $D_i$  при  $c > 0$  выполняется неравенство  $\psi \geq \psi_+$ , а при  $c < 0 - \psi \leq \psi_-$ . Продольная компонента скорости  $u = Q/(2R) - cy$  обращается в ноль на стенке канала в точке  $R(x_0) = \sqrt{Q/(2c)}$  и при  $x > x_0$  становится отрицательной.

На фиг. 1 показана картина линий тока в диффузорном канале, форма которого задается уравнением

$$R=1, \quad x < 0; \quad R = \frac{9}{8} + \left(\frac{1}{8}\right) \sin\left(2\pi/5(x - 5/4)\right) \\ 0 \leq x \leq 2,5; \quad R = 5/4, \quad x \geq 2,5$$

Величина завихренности взята равной  $c/Q = 2^5/3^4$ . В данном случае циркуляционная зона уходит в бесконечность. Отметим, что, хотя решение (7) получено при ограничении (1), условие обтекания стенок  $v/u = \pm R_x'$  выполняется точно.

В работе [4] рассматривались примеры течения, соответствующие асимптотике решения при  $x \rightarrow \pm\infty$ , и отмечалась возможность образования незамкнутой зоны обратных токов.

Во втором примере распределение завихренности на входе в канал соответствует течению в следе с профилем скорости  $u_1 = cy + u_{01} \quad (y \geq 0)$ ,

$u_1 = -cy + u_{01}$  ( $y \leq 0$ ), т. е. завихренность кусочно-постоянна:

$$\omega = -c (y > 0, \psi > 0), \quad \omega = +c (y < 0, \psi < 0).$$

На линии тока  $\psi = 0$  завихренность имеет разрыв. Продолжим в циркуляционных зонах  $D_i$  функцию  $\omega$  так, что  $\omega = -c$ , если  $D_i$  принадлежит подобласти  $y > 0$ , и  $\omega = c$ , если  $D_i$  принадлежит подобласти  $y < 0$ . Форму стенок канала зададим симметричной

$$R_+ = R, \quad R_- = -R; \quad R = 1, \quad x < 0; \quad R = \frac{9}{8} + \left(\frac{1}{8}\right) \sin(\pi(x - \frac{1}{2})), \\ 0 \leq x \leq 2; \quad R = 1, \quad x > 2$$

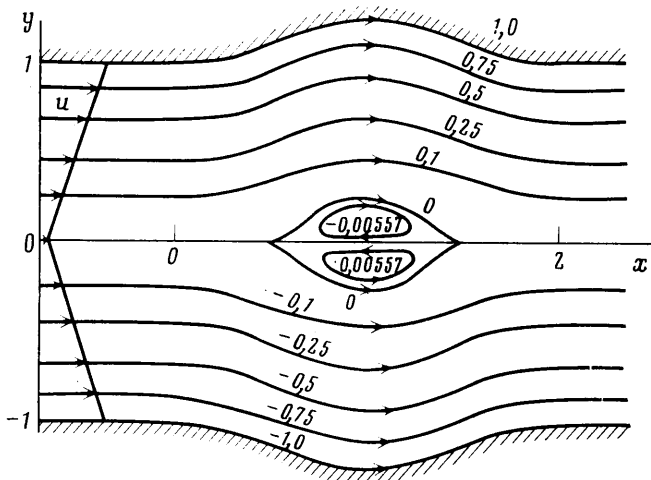
Положим в силу симметрии области течения  $\psi_+ = \psi_- = Q/2$ . Величину завихренности примем равной  $c/Q = 2^2/3^4$ . Решение будет следующим:

$$\psi = \begin{cases} \frac{cy^2}{2} + \frac{(Q - cR^2)y}{2R}, & y \geq 0 \\ -\frac{cy^2}{2} + \frac{(Q - cR^2)y}{2R}, & y \leq 0 \end{cases}$$

В данном случае циркуляционная зона удалена от стенок канала (см. фиг. 2) и имеет более сложную структуру. Граница циркуляционной области, на которой  $\psi = 0$ , описывается уравнением

$$y = R - Q/cR \quad (y \geq 0), \quad y = Q/cR - R \quad (y \leq 0)$$

Положение точек ветвления находится из уравнения  $R(x) = \sqrt{Q/c}$ . Образование циркуляционной зоны в середине канала при входной неравномерности типа следа наблюдалось экспериментально в работе [7].



Фиг. 2

Рассмотрим случай, когда завихренность отлична от нуля только в пристеночной области. Для упрощения выкладок предположим, что завихренность отлична от нуля только у одной стенки и постоянна:  $\omega = c$  ( $\psi^* < \psi$ ),  $\omega = 0$  ( $\psi \leq \psi^*$ ).

В случае образования циркуляционной зоны  $D_i$  продолжим  $\omega$  так, что  $\omega = c$ , если  $\psi$  принадлежит  $D_i$ . Пусть канал будет образован прямой и криволинейной стенками  $y = 0$ ,  $y = R(x)$ . Граничные условия удобно взять в виде  $y = 0$  ( $\psi = 0$ ),  $y = R$  ( $\psi = Q$ ). Решение получим непосредственным

интегрированием дифференциального уравнения

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} = \begin{cases} -c, & \psi > Q \\ -c_*, & \psi_* < \psi \leq Q \\ 0, & \psi \leq \psi_* \end{cases}$$

Пока неизвестную границу циркуляционной зоны, в которой, как показано в первом примере,  $\psi > Q$ , обозначим  $y_0$ . Линию тока  $\psi(y_*, x) = \psi_*$ , которая отделяет потенциальную область от вихревой, будем задавать в явном виде с помощью подлежащей определению функции  $y_*(x)$ . Схематично все границы показаны на фиг. 3. Входящие в решение

$$\psi = \begin{cases} -c(y-y_0)^2/2 + (\psi_*/y_* - c(y_0-y_*))(y-y_0) + Q, & y > y_0 \\ -c(y-y_*)^2/2 + \psi_*/y_*(y-y_*) + \psi_*, & y_* < y \leq y_0 \\ \psi_* y / y_*, & y \leq y_* \end{cases} \quad (8)$$

неизвестные функции  $y_0(x)$ ,  $y_*(x)$  находятся из уравнений

$$\begin{aligned} Q &= -c(y_0-y_*)^2/2 + \psi_*(y_0-y_*)/y_* + \psi_* \\ Q &= -c(R-y_0)^2/2 + (\psi_*/y_* - c/(y_0-y_*))(R-y_0) + Q \end{aligned} \quad (9)$$

Часть линии  $y_0$

$$y_0 = 2(\psi_*/y_* + cy_*)/c - R$$

справа от точки  $R_0 = y_* + \psi_*/(y_*c)$  совпадает с границей циркуляционной зоны. Другая часть (слева от  $R_0$ ) совпадает с линией стенки канала  $R(x)$ .

Рассмотрим предельный случай решения (8), когда толщина вихревого слоя  $y_0 - y_*$  стремится к нулю. Обозначим скорость на верхней стенке  $u_+$  и в потенциальном ядре  $u_*$ . Величина завихренности в слое  $y_0 - y_*$

$$c = (u_* - u_+) / (y_0 - y_*) \quad (10)$$

при  $y_* \rightarrow y_0$  ( $\psi_* \rightarrow Q$ ) должна стремиться к бесконечности. Имеем бесконечно тонкий слой (вихревую пленку), в котором скорость претерпевает скачок  $u_* - u_+$ . Вне слоя завихренность остается конечной. Таким образом, решение (8) с учетом (10) в пределе переходит в решение для невязкого течения идеальной жидкости в канале с плавно изменяющимся контуром стенок, когда завихренность сосредоточена в бесконечно тонком пристеночном слое

$$\psi = \begin{cases} -c(y-y_0) + u_+(y-y_0) + Q, & \psi > Q \\ Qy/y_0, & \psi \leq Q \end{cases}$$

Величина  $c$  должна быть задана из условий на входе в канал. Получим выражение для  $u_+$ . Вычислим поток завихренности через полосу шириной  $y_0 - y_*$  и длиной  $x$  в момент времени  $t$ . Через время  $dt$  частицы, заполняющие полосу, сместятся на расстояние  $dx = u dt$ . Взяв разность потоков в моменты времени  $t$  и  $t + dt$ , из условия сохранения потока завихренности получим

$$[dt(u_* + u_+)(y_0 - y_*)c]_t = [dt(u_* + u_+)(y_0 - y_*)c]_{t+dt}$$

откуда для произвольного сечения  $x$  следует

$$u_*^2 - u_+^2 = [u_*^2 - u_+^2]_{x=0} = 2\Gamma \quad (11)$$

Величина  $u_*$  выражается через  $y_0$ :  $u_* = Q/y_0$ . Уравнение для  $y_0$  получается из (9) и (10) при  $y_* \rightarrow y_0$ ,  $\psi_* \rightarrow Q$

$$y_0(x) = R(x) \quad (R \leq R_0), \quad y_0(x) = R - 2u_+/c \quad (R \geq R_0) \quad (12)$$

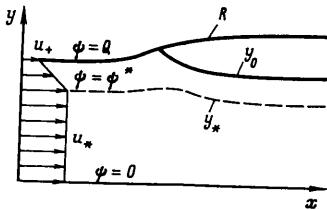
Для величины  $R_0$  из (11) и (12) следует  $R_0 = Q/\sqrt{2\Gamma}$ .

При  $R > R_0$  для вычисления  $y_0$  нужно решать уравнение 4-го порядка, которое получается из (12) после исключения  $u_+$

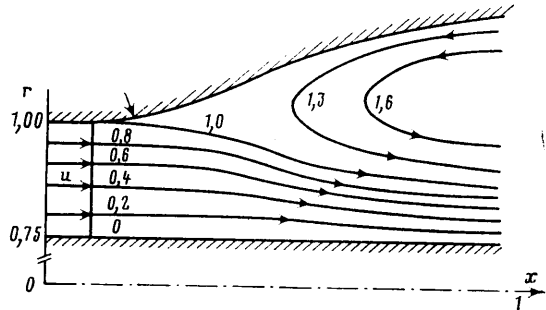
$$\alpha^2 (R^0 - y^0)^2 = 1/y^{02} - 1$$

$$\alpha = cQ/(4\Gamma), \quad y^0 = y_0/R_0, \quad R^0 = R/R_0$$

Уравнение имеет два действительных корня. Один из них, положительный, дает решение задачи.



Фиг. 3



Фиг. 4

Рассмотрим возможность применения данной схемы для расчета турбулентного течения в канале с тонким пограничным слоем на стенках. Выразим константы, входящие в решение из граничных условий, через характеристики пограничного слоя на входе в канал. Завихренность  $s$  определим как отношение разности скоростей в пограничном слое к его толщине  $\delta = R_1 - y_{*1}$ . Для характерной разности скоростей  $u_* - u_+$  возьмем скорость на внешней границе пограничного слоя  $u_* = Q/R_1$  и скорость на границе ламинарного подслоя [7]  $u_+ = 5u_* \sqrt{c_f/2}$ . Этот выбор основывается на результатах работы [9], в которой показано, что отрыв пограничного слоя от поверхности инициируется не вязким подслоем, а нелинейной областью, которая имеет толщину порядка толщины исходного пограничного слоя.

Так как константы входят в решение в виде комплексов  $\alpha$ ,  $R_0/R_1$ , выразим последние через характерные скорости

$$\alpha = \frac{cQ}{4\Gamma} = \frac{R_1}{2\delta(1+u_+/u_*)}, \quad \frac{R}{R_1} = \frac{1}{\sqrt{1-(u_+/u_*)^2}}$$

На фиг. 4 показан результат расчета течения в осесимметричном канале кольцевого сечения. Внешняя стенка задана кривой  $R = 9/8 + (1/8) \sin(\pi(x-1/2))$ , нижняя — прямой  $R = 3/4$ . Для констант взяты следующие значения:  $u_+/u_* = 0,18$ ,  $\alpha = 1,14$ . Следует отметить, что положение точки отрыва (указано стрелкой на фиг. 4), определенное с помощью двумерного расчета потенциального течения [10] с последующим расчетом пограничного слоя интегральным методом, почти совпадает с началом циркуляционной зоны.

В заключение автор благодарит Е. Ю. Шальмана, А. Н. Крайко и А. Б. Ватажина за полезное обсуждение работы и советы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдштик М. А. Вихревые потоки. Новосибирск: Наука, 1981. 366 с.
2. Batchelor G. K. On steady laminar flow with closed streamlines at large Reynolds number. — J. Fluid Mech., 1956, v. 1, № 2, p. 177–190.
3. Нейланд В. Я., Сычев В. В. К теории течений в стационарных срывных зонах. — Уч. зап. ЦАГИ, 1970, т. 1, № 1, с. 14–23.

4. *Мунсон*. Вихревое невязкое течение в кольцевом канале, трубе или двумерном канале переменного сечения.— Тр. Америк. о-ва инж.-мех. Теор. основы инж. расчетов, 1980, т. 102, № 4, с. 151–156.
5. *Морозов А. И., Соловьев Л. С.* Стационарные аксиально-симметричные течения плазмы поперек азимутального магнитного поля.— Журн. техн. физики, 1964, т. 34, № 3, с. 429–443.
6. *Rubel A.* Inviscid axisymmetric jet impingement with recirculating stagnation regions.— AIAA Journal, 1983, v. 21, № 3, p. 351–357.
7. *Вольф, Джонстон*. Влияние неравномерного входного профиля скорости на режимы течения и характеристики плоских диффузоров.— Тр. Америк. о-ва инж.-мех. Теор. основы инж. расчетов, 1969, т. 91, № 3, с. 141–155.
8. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974, 711 с.
9. *Сычев В. В.* К асимптотической теории турбулентного отрыва.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1983, № 4, с. 47–54.
10. *Коновалов А. Е.* Расчеты дозвуковых невязких течений в осесимметричных каналах с разделением потоков.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1981, № 4, с. 154–156.

Москва

Поступила в редакцию  
25.IV.1984