

УДК 532.5.013.4

**ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ  
ВОЗМУЩЕНИЙ ПРИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ  
КЕЛЬВИНА — ГЕЛЬМГОЛЬЦА**

**КУЛИКОВСКИЙ А. Г., ШИКИНА И. С.**

В линейном приближении изучается асимптотическое поведение локализованных двумерных возмущений поверхности тангенциального разрыва скорости, разделяющего два однородных стационарных потока идеальной несжимаемой жидкости. Учитывается влияние поверхностного натяжения и силы тяжести. Математически задача сводится к исследованию методом перевала асимптотики двойного интеграла при различных значениях параметров, которыми являются компоненты вектора групповой скорости. Наибольшую трудность в этой задаче представляет нахождение двумерного перевального контура в пространстве двух комплексных переменных, определяющего, какая из различных седловых точек дает асимптотику. Сначала для фурье-компоненты по одной из переменных с учетом всех седловых точек находится асимптотика, которая параметрически зависит от второй переменной. Выбор второй переменной позволяет доказать аналитически, что при отсутствии силы тяжести асимптотика растущих возмущений определяется единственной седловой точкой в плоскости этой переменной. Таким образом дается обоснование указанной авторами ранее [1] формы границы  $L$  области  $D$  на плоскости групповых скоростей, занятой растущими возмущениями. При наличии силы тяжести численно найдены инкременты роста возмущений, соответствующих различным групповым скоростям и указана область  $D$ , занятая растущими возмущениями.

1. Рассмотрим поведение двумерных возмущений в системе координат  $x=x'+ut$ ,  $y=y'+vt$ , движущейся с произвольной скоростью  $w(u, v)$ , при  $t \rightarrow \infty$ , считая  $x'$  и  $y'$  постоянными.

Возмущение любой из величин, описывающих течение, представляется в виде интеграла Фурье

$$P(x', y', t) = \sum_j \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p_j(k_x, k_y) \exp i[(k_x x' + k_y y') - \omega_j'(k) t] dk_x dk_y \quad (1.1)$$

Здесь  $k_x, k_y$  — компоненты волнового вектора  $\mathbf{k}$ ,  $\omega_j' = \omega_j - uk_x - vk_y$ ,  $\omega_j$  —  $j$ -я ветвь аналитической функции  $\omega(\mathbf{k})$ , определяемой дисперсионным уравнением,  $p_j(k_x, k_y)$  — фурье-компоненты начальных возмущений. Величины  $P, p_j$  могут также зависеть от  $z$ .

Для исследования асимптотического поведения при  $t \rightarrow \infty$  интегралов (1.1) можно воспользоваться методом перевала, согласно которому двумерный контур интегрирования, первоначально проходящий по действительным значениям переменных, смещают в область комплексных значений  $k_x, k_y$ , стремясь уменьшить действительную часть показателя степени (а следовательно, и модуль подынтегрального выражения). Если такому уменьшению препятствует наличие седловой точки, то интегрирование в окрестности этой точки дает асимптотическое поведение интеграла [2]

$$P \sim \frac{p(k_{xs}, k_{ys})}{t \sqrt{\Delta}} \exp[i(k_{xs} x' + k_{ys} y' - \omega_s' t)] \quad (1.2)$$

$$\omega_s' = \omega'(k_{xs}, k_{ys}), \quad \Delta = \det \|\partial^2 \omega' / \partial k_i \partial k_j\|$$

Здесь  $k_{xs}, k_{ys}$  — координаты седловой точки, определяемой уравнениями

$$\frac{\partial \omega}{\partial k_x} = u, \quad \frac{\partial \omega}{\partial k_y} = v \quad (1.3)$$

Оценка (1.2) справедлива, если  $p(k_{xs}, k_{ys}) \neq 0$  и  $\Delta \neq 0$ . В противном случае следующий член асимптотического разложения дает

$$P \sim t^{-3/2} \exp(t \operatorname{Im} \omega_s')$$

Если для заданных  $u$  и  $v$  в седловой точке  $\operatorname{Im} \omega_s' > 0$ , то  $P(x', y', t) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ . Если  $\operatorname{Im} \omega_s' < 0$ , то для соответствующих значений  $u, v$  возмущения затухают при  $t \rightarrow \infty$ .

Если в подынтегральном выражении (1.1)  $\operatorname{Im} \omega' = 0$  для действительных значений  $k_x, k_y$  или это равенство стало выполняться в результате деформирования пути интегрирования, то интеграл (1.1) будет стремиться к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , в чем можно убедиться малым смещением пути интегрирования (если только  $\omega' \neq \text{const}$ ). Сказанное верно и для любой части интеграла, соответствующей области  $\operatorname{Im} \omega' = 0$ .

Следовательно, асимптотика растущих возмущений определяется группой волн с волновым вектором  $k_{xs}, k_{ys}$ , соответствующим групповой скорости  $w$ , для которой выполняется неравенство  $\operatorname{Im} \omega_s' > 0$ .

На плоскости  $u, v$  можно указать область  $D$ , такую, что для  $w \in D$  возмущения растут, а для точек, лежащих вне  $D$  или на ее границе, возмущения затухают при  $t \rightarrow \infty$ .

2. Рассмотрим поставленную задачу для возмущений поверхности раздела  $z=0$  двух идеальных несжимаемых жидкостей. Учтем поверхностное натяжение и силу тяжести. Начальное возмущение поверхности и ее скорость по нормали считаем малыми.

Пусть  $\rho_i, v_i$  — плотность и скорость однородного невозмущенного движения  $i$ -й жидкости ( $i=1$  для  $z>0$ ,  $i=2$  для  $z<0$ ),  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $g$  — ускорение силы тяжести. В системе координат, движущейся со скоростью

$$c = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2, \quad \beta_i = \rho_i / (\rho_1 + \rho_2) \quad (2.1)$$

ось  $x$  которой параллельна относительной скорости  $v_1 - v_2$ , дисперсионное уравнение имеет вид [3]

$$\Omega = \sqrt{K^3 - K_x^2 + GK}$$

$$\Omega = \frac{\omega \sigma}{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^3 (\rho_1 + \rho_2) (\beta_1 \beta_2)^{3/2}} = \frac{\omega}{\mu}, \quad k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad (2.2)$$

$$K = \frac{k \sigma}{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2 (\rho_1 + \rho_2) \beta_1 \beta_2} = \frac{k}{\lambda}, \quad K_x = \frac{k_x}{\lambda}$$

$$G = \frac{g \sigma (\beta_2 - \beta_1)}{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^4 (\rho_1 + \rho_2) \beta_1^2 \beta_2^2}, \quad K_y = \frac{k_y}{\lambda}$$

Дисперсионное уравнение справедливо для комплексных значений  $K_x, K_y$ , причём в (2.2) под  $K$  следует понимать ветвь с  $\operatorname{Re} K > 0$ , так как только она соответствует убыванию возмущений при удалении от поверхности разрыва скорости.

Если  $G > 0,25$ , то  $\Omega^2 > 0$  для всех действительных значений  $K_x, K_y$  и течение устойчиво. В этом случае возмущения (1.1) затухают при  $t \rightarrow \infty$  для любых  $u, v$  равномерно по  $x', y'$ .

Если  $0 \leq G < 0,25$ , то в плоскости  $K_x, K_y$  имеется два симметричных относительно осей овала  $K^3 - K_x^2 + GK = 0$ , на которых  $\Omega = 0$ . Правый овал представлен на фиг. 1. Действительным значением  $K_x, K_y$ , лежащим

внутри овалов, соответствуют мнимые значения  $\Omega$ , т. е. имеет место неустойчивость Кельвина — Гельмгольца. Изучим асимптотику локализованных возмущений в этом случае.

Введем безразмерные скорости и обезразмерим  $\omega'$  так же, как и  $\omega$

$$U = \frac{u}{|v_1 - v_2| \sqrt{\beta_1 \beta_2}}, \quad V = \frac{v}{|v_1 - v_2| \sqrt{\beta_1 \beta_2}}, \quad \Omega' = \Omega - UK_x - VK_y \quad (2.3)$$

В рассматриваемой задаче уравнения (1.3), определяющие седловые точки, имеют вид

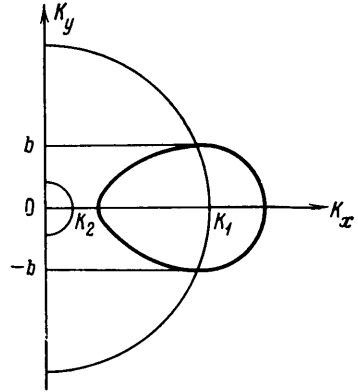
$$K_x(1,5K - 1 + G/K) = U\Omega; \quad (2.4)$$

$$K_y(1,5K + G/K) = V\Omega.$$

Здесь  $U, V$  — действительные, а  $K, K_x, K_y$  — комплексные величины.

В плоскости  $K_x, K_y$ , согласно (2.4), равенство  $U=0$  выполняется на оси  $K_y$  и на окружностях  $K=K_1(G), K=K_2(G), K_1 > K_2$ . Овалы  $\Omega^2=0$  пересекает только большая окружность. В точках их пересечения касательная к овалом горизонтальна, соответствующее значение  $|K_y|$  обозначим через  $b=b(G)$  (фиг. 1). При  $G=0$  овалы касаются в начале координат,  $K_2=0, b^2=4/27$ .

3. Чтобы найти асимптотику возмущений, рассмотрим сначала поведение фурье-компоненты возмущения, соответствующей заданному действительному значению  $K_y$



Фиг. 1

$$q(\xi, K_y, \tau) = \sum_j \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_j(K_x, K_y) \exp i(K_x \xi - \Omega_j'' \tau) dK_x \quad (3.1)$$

$$\Omega_j''(K_x, K_y) = \Omega_j(K_x, K_y) - UK_x$$

$$\xi = x'\lambda, \quad \tau = \mu t, \quad \Pi_j(K_x, K_y) = \lambda^2 p_j(\lambda K_x, \lambda K_y)$$

Безразмерные величины  $q(\xi, K_y, \tau)$  зависят также от действительного параметра  $U$ .

Контур интегрирования в (3.1) при необходимости будем смещать в комплексную плоскость  $K_x$ .

Из фиг. 1 видно, что если  $|K_y| \geq b$ , то  $\Omega$  действительно для всех действительных  $K_x$  и  $q \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow \infty$  для всех значений  $U$ . Если  $|K_y| < b$ , то прямая  $K_y = \text{const}$  в плоскости  $K_x, K_y$  пересекает овалы  $\Omega^2=0$  и на действительной оси комплексной плоскости  $K_x$  имеются интервалы значений  $a_1(G, K_y) < |K_x| < a_2(G, K_y)$ , на которых  $\Omega$  принимает мнимые значения.

В комплексной плоскости  $K_x$   $\Omega$  является четырехзначной аналитической функцией, имеющей точки ветвления  $K_x = \pm a_1, K_x = \pm a_2, K_x = \infty$ , а также точки  $K_x = \pm iK_y$ , совпадающие с точками ветвления функции  $K = \sqrt{K_x^2 + K_y^2}$ . Для выделения однозначных ветвей  $\Omega$  проведем в плоскости  $K_x$  разрезы по действительной оси от  $-\infty$  до  $-a_2$ , от  $-a_1$  до  $a_1$ , от  $a_2$  до  $\infty$  и по мнимой оси  $K_x$  от  $+i\infty$  до  $iK_y$ , от  $-i\infty$  до  $-iK_y$ . Условию  $\text{Re } K > 0$  удовлетворяют только две ветви  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , отличающиеся знаком. Мнимая часть каждой из них нечетная, а действительная — четная функция  $\text{Re } K_x$ .

Определим ветвь  $\Omega_1$  так, чтобы  $\text{Im } \Omega_1 \geq 0$  на полуоси  $\text{Re } K_x \geq 0$  для действительных  $K_y$ .

В силу указанных свойств ветвей  $\Omega$  асимптотическое поведение интегралов в (3.1), взятых по правой и левой полуоси  $\text{Re } K_x$ , будет задаваться экспонентами с одинаковыми показателями. Поэтому растущую часть асимптотики  $q$  можно оценить следующим образом:

$$q(\xi, K_y, \tau) \sim \int_0^{\infty} \Pi_1(K_x, K_y) \exp i(K_x \xi - \Omega_1'' \tau) dK_x \quad (3.2)$$

Для  $U=0$ , согласно (2.4), стационарными точками  $\Omega_1''$  будут  $K_{xs}=0$ ,  $K_{xs1}=\sqrt{K_1^2-K_y^2}$ ,  $K_{xs2}=\sqrt{K_2^2-K_y^2}$ . Так как  $\Omega$  — действительно при  $K_x=0$  и  $K=K_2$  (фиг. 1), то асимптотический рост интеграла (3.2) при  $|K_y|<b$  определится седловой точкой  $K_{xs1}$ . Эта точка лежит на полуоси  $\text{Re } K_x>0$  и в ней  $\text{Im } \Omega_1''=\text{Im } \Omega_1>0$ .

Если  $U \neq 0$ , то, согласно (2.4), стационарные точки  $\Omega_1''$  в плоскости  $K_x$  определяются соотношением

$$K_x^2 = \frac{U^2(K^3+GK)}{F^2+U^2}, \quad F=1,5K-1+G/K \quad (3.3)$$

Формулы (3.3) неявно определяют седловые точки  $K_{xs}=K_{xs}(U, K_y)$ . Независимо от того, какая из них дает асимптотику (3.1), при  $\tau \rightarrow \infty$  имеет место одномерная оценка [2]

$$q(\xi, K_y, \tau) \sim \frac{q'(K_{xs}, K_y)}{\sqrt{\tau}} \exp i[K_{xs} \xi - \Omega_1''(K_{xs}, K_y) \tau]$$

где  $q'$ , вообще говоря, комплексная величина, выражающаяся через  $\Pi_1$ .

4. Перейдем к интегрированию по  $K_y$ . Безразмерные возмущения по порядку величины равны

$$Q(\xi, \eta, \tau) \sim \frac{1}{\sqrt{\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} q'(K_{xs}, K_y) \exp i[K_{xs} \xi + K_y \eta - \Omega_1'(K_{xs}, K_y) \tau] dK_y \quad (4.1)$$

$$\Omega' = \Omega'' - VK_y, \quad \eta = y'\lambda$$

Найдем асимптотику (4.1) для различных значений  $U, V$ , деформируя при необходимости контур интегрирования в комплексную плоскость  $K_y$ .

Заметим, что для выбранной ветви  $\Omega_1$  изменение знака  $V$  соответствует изменению знака  $K_y$  в седловой точке. Поскольку дисперсионное уравнение (2.2) не зависит от знака  $K_y$ , то в дальнейшем можно рассматривать только положительные значения  $V$ .

Пусть  $U=0$ , тогда  $\Omega'(K_{xs}, K_y) = \sqrt{K_y^2 - b^2}$ . Проведя в комплексной плоскости  $K_y$  разрезы от  $b$  до  $\infty$  и от  $-b$  до  $-\infty$ , выделим однозначные ветви  $\Omega'(K_y)$ , отличающиеся знаком. В (4.1) рассматривается та ветвь  $\Omega_1'$ , для которой  $\text{Im } \Omega_1' = \text{Im } \Omega_1'' \geq 0$  на действительной оси  $K_y$ .

В плоскости  $K_y$   $\Omega_1'(K_y)$  имеет одну седловую точку, которая при  $0 \leq V < 1$  лежит на мнимой полуоси  $\text{Im } K_y \geq 0$  и в ней  $\text{Im } \Omega_1' > 0$ . При  $V \rightarrow 1$  перевал уходит в  $\infty$ , а при  $V > 1$  на действительной оси  $K_y$  по разные стороны от  $[-b, b]$  лежат две седловые точки (левая из них пришла на действительную ось  $K_y$  с ветви  $\Omega_2'$ ). Седловые точки соединяет линия  $\text{Im } \Omega_1' = 0$ , лежащая в верхней полуплоскости  $K_y$ . Смещая контур интегрирования выше этой линии, получим, что интеграл в (4.1) стремится к нулю.

Таким образом, если  $U=0$ , то при  $\tau \rightarrow \infty$  для  $|V| < 1$  возмущения растут, а для  $|V| > 1$  затухают.

Если  $U \neq 0$ , то явно указать перевальные точки и деформацию контура интегрирования в плоскости  $K_y$  не удается, но оказывается возможным

сделать это в плоскости  $K$ . Заменяя в (4.1) переменную  $K_y$  на  $K$ , интегрирование будем вести по линии  $\text{Im } K_y = 0$  в комплексной плоскости  $K$ .

Заметим, что расти со временем может только та часть интеграла (4.1), которая соответствует интегрированию по отрезку  $[-b, b]$  действительной оси  $K_y$ , поэтому в плоскости  $K$  достаточно изучить интеграл от точки, где  $K_y = -b$  до точки, где  $K_y = b$ . В этих точках  $\Omega = 0$ , а  $K$  и  $\bar{K}_x$  принимают действительные и соответственно равные значения.

При  $U \neq 0$  из (3.3), (2.2), (3.1) имеем

$$K_y^2 = K^2 - \frac{U^2(K^3 + GK)}{F^2 + U^2}, \quad \Omega^2 = \frac{F^2(K^3 + GK)}{F^2 + U^2}$$

$$\Omega'' = \frac{\sqrt{K^3 + GK}(F - U^2)}{\sqrt{F^2 + U^2}} \quad (4.2)$$

$$\Omega' = \Omega''(K, U) - VK_y(K, U)$$

В плоскости  $K$   $\Omega'(K, U)$  является многозначной аналитической функцией. Ее точки ветвления совпадают с точками ветвления функций  $\Omega''(K, U)$  и  $K_y = \sqrt{K_y^2(K)}$ .

Найдем отображение плоскости  $K_y$  на плоскость  $K$ . Для этого рассмотрим  $K_y^2(K)$  как комплексный потенциал фиктивного течения жидкости в плоскости  $K$ . Линии тока этого течения будут линиями  $\text{Im } K_y^2 = \text{const}$ , а эквипотенциальные линии — линиями  $\text{Re } K_y^2 = \text{const}$ .

Положим  $G = 0$ . Тогда комплексный потенциал имеет вид

$$K_y^2 = \frac{4}{9}(f - B)^2 - E + \frac{P - iQ}{f - iU} + \frac{P + iQ}{f + iU}$$

$$f = 1,5K - 1, \quad B = \frac{1}{3}U^2 - 1, \quad E = \frac{4}{27}U^2(1 + \frac{1}{3}U^2) \quad (4.3)$$

$$P = \frac{4}{27}U^2(U^2 - 3), \quad Q = \frac{4}{27}U(3U^2 - 1)$$

В силу (4.3) удобнее рассматривать картину течения в плоскости  $f$ , отличающейся от  $K$  сдвигом.

Особенностями этого течения являются диполи, симметрично расположенные на мнимой оси  $f$ . Течение имеет пять критических точек  $f_j^*$ , из которых три действительны:  $f_1^* = 0$ ,  $f_2^* = -1$ ,  $f_3^* = f^*(U)$ , а  $f_4^*$  и  $f_5^*$  — комплексно сопряжены.

Течение симметрично относительно действительной оси  $f$ , поэтому рассмотрим отображение плоскости  $K_y^2$  на верхнюю полуплоскость  $f$ .

Пусть сначала  $U$  мало, тогда

$$K_y^2 = \frac{4}{9}(f + 1)^2 + \frac{4}{27} \frac{iU}{f - iU} - \frac{4}{27} \frac{iU}{f + iU}$$

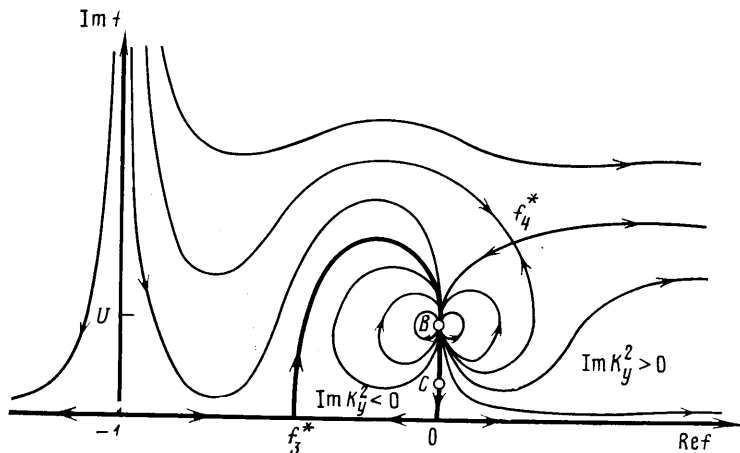
Линии тока  $\text{Im } K_y^2 = \text{const}$  фиктивного течения в верхней полуплоскости  $f$  показаны на фиг. 2. Жирно выделены нулевые линии тока. На действительной оси  $f$   $\text{Im } K_y^2 = 0$ , а  $\text{Re } K_y^2 > 0$  достигает минимума в критической точке  $O$ , где  $f_1^* = 0$ . Поэтому дальнейшее уменьшение  $\text{Re } K_y^2$  идет по линии  $OB$ , на которой  $\text{Im } K_y^2 = 0$ . В точке  $C$  этой линии  $K_y = 0$  и она является точкой ветвления двузначной функции  $K_y(K)$ . На  $CB$   $\text{Re } K_y^2$  уменьшается от 0 до  $-\infty$ . В критической точке  $f_3^* \sim -U^{2/3}$   $\text{Re } K_y^2$  достигает максимума. На фиг. 2 стрелками указано направление роста  $\text{Re } K_y^2$ .

При увеличении  $U$  диполи удаляются от действительной оси, их оси поворачиваются против часовой стрелки. Критические точки  $f_3^*$ ,  $f_4^*$ ,  $f_5^*$  передвигаются, причем комплексные точки двигаются налево, а действительная  $f_3^*$  идет вправо. При  $U^2 = 2/3$  критические точки  $f_1^*$  и  $f_3^*$  совпадают. Для  $2/3 < U^2 < 3$   $\text{Re } K_y^2$  имеет минимум при  $f = f_3^* > 0$  и максимум при  $f = f_1^* = 0$ . При  $U^2 = 3$  точка  $C$  становится действительной и совпадает с критической точкой  $f_3^* = 1$ .

Таким образом, отображением действительной оси  $K_y^2$  в плоскости  $K$  является ось  $\text{Re } K$  с «выступом» в комплексную плоскость. Выступ начинается из точки, в которой  $\text{Re } K_y^2$  имеет минимум, а заканчивается в центре диполя  $B$ , где  $\text{Re } K_y^2 = -\infty$ . При  $U^2 < 3$  на выступе лежит точка  $C$ , в которой  $K_y^2 = 0$ . При  $U^2 > 3$  изменение знака  $K_y^2$  происходит на действительной оси  $K$  в двух точках, между которыми и на выступе  $K_y^2 < 0$ .

Поскольку картина линий  $\text{Im } K_y^2 = \text{const}$  в плоскости  $K$  известна, то, воспользовавшись свойствами отображения  $K_y = \sqrt{K_y^2(K)}$ , нетрудно найти поведение линий  $\text{Im } K_y = \text{const}$ . Качественно линии  $\text{Im } K_y = \text{const} > 0$  представлены на фиг. 3. Жирно выделена линия  $\text{Im } K_y = 0$ .

Как уже было сказано выше, интегрирование по  $K$  следует вести между точками  $K_y = -b$  и  $K_y = b$ , которые на плоскости  $K$  совпадают (при  $f=0$ ), а для того чтобы  $K_y$  изменило знак, необходимо, чтобы контур интегрирования обходил точку ветвления функции  $K_y(K)$ . Если  $U^2 \geq 3$ , то точки  $K_y = \pm b$  и точка ветвления  $C$  лежат на действительной оси  $K$ , причем  $\text{Im } \Omega' = 0$  на всем пути интегрирования.



Фиг. 2

Для изучения асимптотики при  $U^2 < 3$  рассмотрим траекторию перевальной точки при изменении  $V$ , которую назовем «хребтом». Найдем хребты в плоскости  $K$  (или  $f$ ).

Из (2.4), (4.2) следует, что на хребте

$$V^2 = \frac{3}{2} - U^2 + \frac{3}{2}f - \frac{U^2}{2f} + \frac{U^2}{2f^2} \quad (4.4)$$

Так как  $V$  — действительно, то на хребте  $\text{Im } V^2 = 0$ , а  $\text{Re } V^2 \geq 0$ .

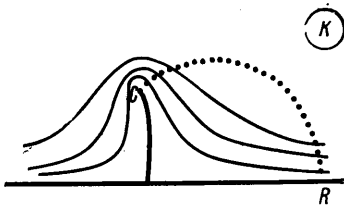
При фиксированном  $U$  линиями  $\text{Im } V^2 = 0$  является ось  $\text{Re } f$  и пересекающий ее овал, лежащий в области  $\text{Re } f > 0$  и симметричный относительно действительной оси  $f$ . Если  $f = re^{i\theta}$ , то уравнение овала имеет вид

$$r^3 + \frac{U^2 r}{3} - \frac{2}{3} U^2 \cos \theta = 0 \quad (4.5)$$

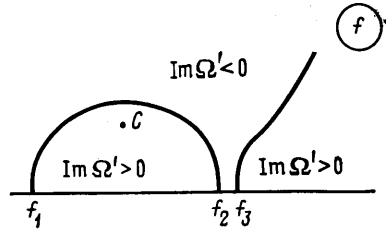
При  $U \rightarrow 0$  он стягивается в точку  $f=0$ , а при  $U \rightarrow \infty$  стремится к окружности  $r=2 \cos \theta$ .

Относительно хребтов справедливо следующее утверждение [4]: в точках, где  $V^2$  на хребте имеет экстремум, хребты пересекаются. На отрезках хребтов между пересечениями  $V^2$  меняются монотонно.

При больших значениях  $V^2$  все три корня  $f_1 < f_2 < f_3$  уравнения (4.4), соответствующие перевальным точкам, действительны. Точки  $f_1$  и  $f_2$  соединяет линия уровня  $\text{Im } \Omega' = 0$ , которая обходит точку ветвления  $C$  (фиг. 4). При уменьшении  $V^2$  корни  $f_2, f_3$  сближаются и при некотором значении  $V^2 = V_*^2(U)$  сливаются в точке  $R$ . При дальнейшем уменьшении  $V^2$  линия  $\text{Im } \Omega' = 0$  в точке  $R$  отходит от действительной оси и появляются две комплексно-сопряженные седловые точки, лежащие на овале (4.5). Седловая точка с  $\text{Im } \Omega' > 0$  при изменении  $V$  описывает комплексный хребет. Для точек хребта, в которых значения  $0 < V < V_*$  близки к  $V_*$ .



Фиг. 3



Фиг. 4

$(\partial \operatorname{Im} \Omega' / \partial V)_V < 0$ , а так как  $(\partial \operatorname{Im} \Omega' / \partial V)_V = -\operatorname{Im} K_y$ , то в этих точках хребта  $\operatorname{Im} K_y > 0$  и хребет (пунктирная линия на фиг. 3) из точки  $R$  идет в верхнюю полуплоскость  $f$ . Закачивается хребет в точке  $C$ , где  $V=0$ , причем, как видно из фиг. 3,  $\operatorname{Im} K_y > 0$  на всем хребте. Поэтому  $\operatorname{Im} \Omega'$  монотонно растет на  $RC$  при убывании  $V$ .

При вычислении асимптотики (4.1) продеформируем путь интегрирования для  $V^2 < V_*^2$  с «выступа» в линию наискорейшего спуска, идущую через комплексный перевал, и найдем, что  $Q(\xi, \eta, \tau) \rightarrow \infty$  при  $\tau \rightarrow \infty$ . Линии уровня  $\operatorname{Im} \Omega' = \text{const}$  в плоскости  $K$  качественно представлены на фиг. 5. Путь интегрирования изображен штрихами, хребет — пунктирной линией. Тонкая линия соответствует разрезу.

Таким образом доказано, что при  $G=0$  в комплексной части плоскости  $K$  имеется единственный хребет. Для каждого значения  $0 < U^2 < U_*^2 = 3$  существует такое  $V_*^2$ , что при  $V^2 < V_*^2$  контур интегрирования проходит через седловую точку этого хребта и соответствующие возмущения растут. При  $V^2 > V_*^2$  в плоскости  $K$  существует линия  $\operatorname{Im} \Omega' = 0$ , обходящая точку ветвления  $C$ , и возмущения затухают при  $\tau \rightarrow \infty$ . Для  $U^2 = 3$   $V_* = 0$ , а при  $U^2 > 3$  для всех значений  $V$  интегрирование следует вести по действительной оси  $K$ , на которой  $\operatorname{Im} \Omega' = 0$ .

Совокупность значений  $V_*$  для  $|U| < U_*$  образует в плоскости  $U, V$  линию  $L$ , на которой  $D(U, V) / D(K_x, K_y) = 0$ , где  $U, V$  — компоненты групповой скорости, зависящие от  $K_x, K_y$ . Действительно, в точке  $R$  пересечения хребтов происходит слияние двух точек перевала, лежащих в плоскости  $K$  и соответствующих одним и тем же значениям  $U, V$ . Переходя к переменным  $K_x, K_y$ , получим, что на линии  $L$  нарушается однозначность отображения плоскости действительных переменных  $K_x, K_y$  на плоскость  $U, V$ . Параметрическое уравнение линии  $L$  и ее вид для  $G=0$  приведены в [1].

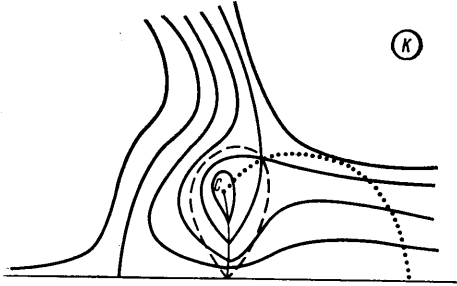
5. При  $G \neq 0$  численно проверено, что в области малых  $K$  возникает еще один комплексный хребет и линия  $\operatorname{Im} K_y^2 = 0$ . Однако в области значений  $K$ , где нужно проводить контур интегрирования, картина отображения  $K_y^2(K)$ , хребет и линии уровня  $\operatorname{Im} \Omega'(K) = \text{const}$  ведут себя качественно так же, как при  $G=0$ .

Для различных значений  $0 \leq G < 0,25$  построены линия неоднозначности  $L$  в плоскости  $U, V$  и ее образ  $L'$  в плоскости  $K_x, K_y$ . Эти линии симметричны относительно осей координат. На  $L$  величина  $|U|$  достигает максимума  $|U| = U_*(G)$ , при  $V=0$ . С ростом  $G$   $U_*$  уменьшается от значения  $U_* = \sqrt{3}$  при  $G=0$  до  $U_* = \sqrt{0,5}$  при  $G=0,25$ . Точки, в которых  $L$  имеет горизонтальную касательную, при  $G \rightarrow 0,25$  стремятся к оси  $V$ . Линия  $L$  подходит к оси  $V$  в точках  $|V| = V_0(G)$ ;  $V_0(0) = \sqrt{1,5}$ ;  $V_0(0,25) = 1$ .

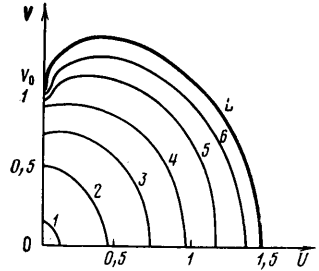
В плоскости  $U, V$  линия  $L$  ограничивает область  $D$ . Численно было проверено, что если  $U, V$  лежат на  $L$  или вне  $D$ , то в комплексной плоскости  $K$  существует замкнутая линия  $\operatorname{Im} \Omega' = 0$  с концами на действительной оси  $K$ , обходящая точку ветвления  $K_y = 0$ , что означает затухание соответствующих возмущений. Если  $U \neq 0$ ,  $U, V \in D$ , то линия  $\operatorname{Im} \Omega' = 0$  отходит от действительной оси и путь интегрирования идет через комп-

лексный перевал, в котором  $\text{Im } \Omega' > 0$ . Отсюда следует, что для  $U, V \in D$  возмущения растут. Так как для  $U=0$  возмущения затухают при  $|V| > 1$ , то под  $D$  будем понимать внутренность  $L$  с отброшенными отрезками  $1 \leq |V| \leq V_0$  оси  $V$ .

На фиг. 6 для  $G=0,15$  в 1-й четверти плоскости  $U, V$  представлены полученные численно, линии уровня  $\text{Im } \Omega' = \text{const}$  (кривые 1–6), соответствующие значениям  $\text{const}$ :  $C_1=0,23$ ;  $C_2=0,2$ ;  $C_3=0,15$ ;  $C_4=0,1$ ;  $C_5=0,05$ ;  $C_6=0,015$ . Жирно выделена граница области  $D$ .



Фиг. 5



Фиг. 6

С ростом  $G$  область  $D$  остается конечной, но скорость роста возмущений в ней уменьшается и при  $G \rightarrow 0,25$   $\text{Im } \Omega' \rightarrow 0$  во всей плоскости  $U, V$ . Можно показать, что при  $G \rightarrow 0,25$  уравнение кривой  $L$  превращается в эллипс  $2U^2 + V^2 = 1$ .

Таким образом, если для тангенциального разрыва имеет место неустойчивость Кельвина — Гельмгольца, то при больших временах первоначально локализованные возмущения поверхности разрыва будут расти и находиться в области, которая линейно расширяется со временем, оставаясь подобной  $D$ . Центр области движется со скоростью  $c$  (2.1). В системе координат, движущейся со скоростью  $c$ , скорость роста возмущений максимальная. Зная область  $D$ , можно выписать критерий роста возмущений в произвольно движущейся системе координат [1].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Куликовский А. Г., Шикина И. С. О развитии двумерных возмущений на поверхности тангенциального разрыва. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 3, с. 12–16.
2. Федорюк М. В. Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.
3. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford: Clarendon Press, 1961, 652 p.
4. Куликовский А. Г., Шикина И. С. О развитии возмущений на границе раздела двух жидкостей. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 5, с. 46–49.

Москва

Поступила в редакцию  
10.IV.1984