МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 1985

УДК 538.4

НЕЛИНЕЙНАЯ ДЛИННОВОЛНОВАЯ МОДУЛЯЦИЯ СИММЕТРИЧНЫХ ВОЛН ПЛОСКОГО МАГНИТНОГО СЛОЯ

МЕРЗЛЯКОВ Е. Г.

Особенности распределения магнитного поля в фотосфере Солнца и экспериментальное обнаружение волн, распространяющихся вдоль магнитных трубок солнечной атмосферы, способствовали появлению в последнее время большого количества работ, посвященных изучению волноводных свойств сред с магнитной структурой. Одним из простейших оказался случай плоского магнитного слоя, который подробно изучался в линейном приближении [1–3]. Исходя из дисперсионных свойств такой структуры, в [4] указано на возможность существования в ней солитонов в приближении длинных относительно слоя волн малой амплитуды.

В данной работе методом разномасштабных разложений получено уравнение Шредингера, описывающее распространение нелинейных модуляций гармонической симметричной моды по плоскому магнитному слою в несжимаемой жидкости. Подобное уравнение выводилось, например, для волн на воде [5–9].

1. Основные уравнения. Рассмотрим бесконечно проводящую идеальную несжимаемую жидкость с невозмущенным магнитным полем следующего вида:

$$B_x=0, \quad B_y=0, \quad B_z=\begin{cases} B_{z0}, & |x|\leqslant x_0 \\ 0, & |x|>x_0 \end{cases}$$

Здесь x, y, z — декартовы координаты, $2x_0$ — ширина плоского магнитного слоя. В невозмущенном состоянии жидкость всюду покоится. Плотность и давление жидкости внутри и вне слоя постоянны и равны ρ_0, p_0 и ρ_e, p_e соответственно. На границах $x=\pm x_0$ выполняется условие непрерывности полного давления

$$p_e=p_0+B_{z0}^2/8\pi$$

Считается, что возмущения скорости и поля по оси y отсутствуют и все переменные зависят только от x и z. Введем функцию тока ψ

$$v_x=\frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad v_z=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

где v_x и v_z — составляющие скорости по осям x и z соответственно, и векторный потенциал $\mathbf{A}=(0, -A, 0)$

$$b_x=\partial A/\partial z, \; b_z=-\partial A/\partial x$$

где b_x и b_z — возмущения магнитного поля по осям x и z соответственно. Тогда уравнения магнитной гидродинамики запишутся в виде

$$\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t\,\partial z}+\rho\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial^2\psi}{\partial z\,\partial x}-\rho\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\left(\frac{\partial^2A}{\partial x^2}+\frac{\partial^2A}{\partial z^2}\right)\times$$
$$\times\left(B_{z0}-\frac{\partial A}{\partial x}\right)\frac{1}{4\pi}, \quad -\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t\,\partial x}-\rho\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\rho\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial z}=$$
$$=-\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial^2A}{\partial x^2}+\frac{\partial^2A}{\partial z^2}\right) \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial A}{\partial t}=-\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial z}+\frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial x}+B_{z0}\frac{\partial \psi}{\partial z}$$

В последнем уравнении системы (1.1) несущественная функция времени внесена в A. На левой и правой границах должны выполняться условия

$$\left[p+\frac{B^2}{8\pi}\right]=0,\qquad \left[\frac{\partial \psi}{\partial z}+\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial z}\right]=0,\qquad \frac{\partial \eta}{\partial t}=\frac{\partial \psi}{\partial z}+\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial z} \tag{1.2}$$

Здесь квадратными скобками обозначен скачок соответствующей величины на границе, $\eta(z, t)$ — возмущение границы, в общем случае различное для $x>0$ и $x<0$. Система (1.1) описывает движение внутри и вне слоя, причем в последнем случае $A=0$ и движение будет потенциальным. В линейном приближении в [1] показано, что одно из возможных решений системы уравнений (1.1) с граничными условиями (1.2) — симметричные волны, для которых возмущения границ отличаются только знаком. Очевидно, что такое решение допускается и в общем случае. Поэтому в дальнейшем рассматривается только симметричная мода, т. е. φ и A будут нечетными по x, а p — четной по x функциям. При $|x|\to\infty$ возмущения должны исчезать.

2. Вывод нелинейного уравнения Шредингера. Пусть возмущением начального состояния является модулированная гармоническая слабонелинейная волна. Амплитуда возмущения характеризуется безразмерным параметром $\varepsilon\ll 1$. Следуя предшествующим работам, например [5], воспользуемся методом разномасштабных разложений и перейдем к новым переменным. Введем внутри слоя переменные t, z, x, $t_1=\varepsilon t$, $z_1=\varepsilon z$, $\tau=\varepsilon^2 t$. Вне слоя — t, z, x, $t_1=\varepsilon t$, $z_1=\varepsilon z$, $\tau=\varepsilon^2 t$, $x_1=\varepsilon x$. Решение системы (1.1) с условиями (1.2) ищется в виде разложений по гармоникам $E=\exp\{i(k_0x-\omega_0 t)\}$ и по ε, например внутри слоя

$$\psi=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\sum_{k=0}^{n}(q_{nk}E^k+\text{к. с.}),\qquad q_{nk}=q_{nk}(x, t_1, z_1, \tau)$$

вне слоя

$$\psi^e=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\sum_{k=0}^{n}(q_{nk}{}^eE^k+\text{к. с.}),\qquad q_{nk}{}^e=q_{nk}{}^e(x, x_1, t_1, z_1, \tau)$$

Здесь к.с. — комплексно-сопряженная величина, индекс e указывает на внешнюю к слою область. Решение получается в результате выделения членов с одинаковыми гармониками и степенями ε. Зависимость от x_1 внешних величин определяется из условия равномерности разложения по ε.

Считается, что в первом приближении по ε имеется гармоническая волна с медленно меняющейся амплитудой, распространяющаяся в положительном направлении оси z. Тогда внутри слоя решение в этом приближении имеет вид

$$\psi_1=(f_{11}E+\text{к. с.})\operatorname{sh} k_0x,\qquad p_1=-\rho_0\frac{\omega_0}{k_0}\frac{\partial \psi_1}{\partial x},\qquad A_1=-\frac{B_{z0}}{\omega_0}k_0\psi_1$$

Вне слоя для $x>0$

$$\psi_1{}^e=(f_{11}{}^eE+\text{к. с.})\exp(-k_0x),\qquad p_1{}^e=-\rho_e\frac{\omega_0}{k_0}\frac{\partial \psi_1}{\partial x}$$

При этом из граничных условий следует

$$f_{11}{}^e\exp(-k_0x_0)=f_{11}\operatorname{sh} k_0x_0$$

и зависимость ω_0 от k_0, которая дает дисперсионное соотношение для линейных бесконечно малых симметричных волн

$$\omega_0^2=\frac{v_a^2k_0^2}{1+(\rho_e/\rho_0)\,\mathrm{th}\,k_0x_0},\qquad v_a^2=\frac{B_{z0}^2}{4\pi\rho_0}$$

Собирая коэффициенты при ε^2 в уравнениях (1.1), получим следующее выражение для ψ в этом порядке по ε: внутри слоя

$$\psi_2=(f_{22}E^2+\text{к.с.})\,\mathrm{sh}\,2k_0x+(f_{21}E+\text{к.с.})\,\mathrm{sh}\,k_0x-$$
$$-\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial z_1}(f_{11}E+\text{к. с.})\,\frac{x\,\mathrm{ch}\,k_0x}{k_0}+\psi_{20}$$

вне слоя для области $x>0$

$$\psi_2^e=(f_{22}^eE^2+\text{к.с.})\exp(-2k_0x)+(f_{21}^eE+\text{к.с.})\exp(-k_0x)+\psi_{20}^e$$

Здесь ψ_{20} и ψ_{20}^e — члены, не содержащие E и к.с., причем функция ψ_{20}^e определяется из решения выписанной ниже задачи

$$\frac{\partial^2\psi_{20}^e}{\partial z_1^2}+\frac{\partial^2\psi_{20}^e}{\partial x_1^2}=0$$

$$\psi_{20}^e=\psi_{20}-k_0^2|f_{11}|^2(\mathrm{sh}\,2k_0x_0+2\,\mathrm{sh}^2\,k_0x_0)/\omega_0\ \text{при}\ x=x_0 \tag{2.1}$$

$$\psi_{20}^e\to0\ \text{при}\ x\to\infty$$

Выражение для ψ_{20}, если опустить часть, не зависящую от z_1, имеет вид

$$\psi_{20}=|f_{11}|^2[(k_0V+\omega_0)v_a^2\,\mathrm{sh}\,2k_0x-(\omega_0^2-v_a^2k_0^2)Vx]k_0^2[\omega_0^2(V^2-v_a^2)]^{-1},$$

$$V=-\omega_0'(k_0) \tag{2.2}$$

Из граничных условий (1.2) во втором порядке по ε для членов с E^1 следует, что $f_{11}=f_{11}(\xi,\tau)$, где $\xi=z_1+Vt_1$. Следовательно, модуляции распространяются с групповой скоростью.

Собирая члены с E^2, найдем в этом же порядке по ε выражение для f_{22}, f_{22}^e и условие на f_{21} и f_{21}^e

$$f_{22}=\frac{k_0^2}{4\omega_0}(3+2\,\mathrm{ch}^2\,k_0x_0+\mathrm{sh}\,2k_0x_0)f_{11}^2$$

$$f_{22}^e\exp(-2k_0x_0)=f_{22}\,\mathrm{sh}\,2k_0x_0-\frac{k_0^2}{\omega_0}\,\mathrm{sh}\,2k_0x_0f_{11}^2-\frac{k_0^2}{\omega_0}f_{11}^2\,\mathrm{sh}^2\,k_0x_0 \tag{2.3}$$

$$f_{21}\,\mathrm{sh}\,k_0x_0=f_{21}^e\exp(-k_0x_0)-i\frac{\partial f_{11}}{\partial z_1}(\mathrm{ch}\,k_0x_0+\mathrm{sh}\,k_0x_0)x_0$$

Третье приближение по ε для ψ получается из (1.1) с учетом (2.2) и (2.3) в результате выделения членов, содержащих ε^3. В дальнейшем это приближение понадобится только внутри слоя, причем только та часть, в которую входит E^1. Она имеет следующий вид:

$$\psi_3=f_{31}E\,\mathrm{sh}\,k_0x-ix\,\mathrm{ch}\,k_0x\frac{\partial f_{21}}{\partial z_1}E-\frac{1}{2}x^2\,\mathrm{sh}\,k_0x\frac{\partial^2 f_{11}}{\partial z_1^2}E+$$
$$+2\left(1+\frac{k_0V}{\omega_0}\right)(v_a^2-V^2)^{-1}\Big[\mathrm{sh}^3\,k_0x-k_0x\,\mathrm{ch}\,k_0x-$$
$$-(\mathrm{sh}^3\,k_0x+k_0x\,\mathrm{ch}\,k_0x)\frac{k_0V\omega_0+k_0^2v_a^2}{\omega_0^2-v_a^2k_0^2}\Big]\frac{k_0^4v_a^2}{\omega_0^2}|f_{11}|^2f_{11}E \tag{2.4}$$

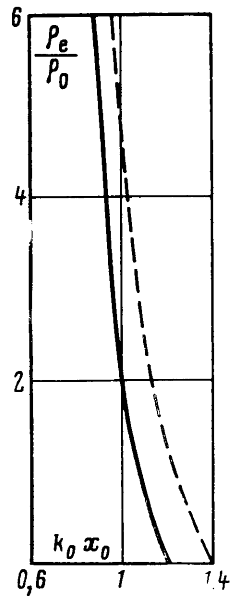
Выше полученное решение внешней задачи является равномерным по ε в конечной области по x шириной порядка x_0. При больших $|x|$ необходимо перейти к другим разложениям по ε. Однако эволюция модулированной волны целиком определяется течением внутри слоя, поэтому достаточно ограничиться имеющимся решением. Собирая в граничных условиях коэффициенты при ε^3 и E и учитывая (2.1)—(2.4), получим нелинейное уравнение Шредингера

$$i\frac{\partial f_{11}}{\partial\tau}+\mu\frac{\partial^2 f_{11}}{\partial\xi^2}+\delta|f_{11}|^2 f_{11}=0,\qquad \mu=0{,}5\omega_0''(k_0)$$

$$\delta=\left(1-\frac{V^2}{v_a^2}\right)^{-1}\left[1+\left(\frac{\rho_e}{\rho_0}\right)\operatorname{th}k_0x_0\right]^{-1}\left\{\frac{k_0^4}{\omega_0}\left(1+\frac{k_0V}{\omega_0}\right)^2\left(1-2\operatorname{ch}^2k_0x_0-\right.\right.$$
$$\left.-\frac{2k_0x_0}{\operatorname{sh}2k_0x_0}\right)-\left(1-\frac{v_a^2k_0^2}{\omega_0^2}\right)\frac{\omega_0k_0^2}{v_a^2}\left[\left(1-\frac{v_a^2k_0^2}{\omega_0^2}\right)\frac{k_0x_0}{\operatorname{sh}2k_0x_0}-2\left(\frac{Vk_0}{\omega_0}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{v_a^2k_0^2}{\omega_0^2}\right)\right]-\frac{k_0^4}{\omega_0}\left(1-\frac{v_a^2k_0^2}{\omega_0^2}\right)\left(1-\frac{V^2}{v_a^2}\right)\left(\frac{5}{4}+2\operatorname{ch}^2k_0x_0+\frac{3}{2}\operatorname{sh}2k_0x_0+\right.$$
$$\left.\left.+2\operatorname{ch}k_0x_0\operatorname{sh}^3k_0x_0+2\operatorname{sh}^2k_0x_0\operatorname{ch}^2k_0x_0\right)\right\}\qquad(2.5)$$

3. Устойчивость плоской волны. Как известно (например, [5]), уравнение (2.5) имеет класс решений вида

$$f_{11}=A(\xi)\exp(i\alpha\tau),\ \alpha=\mathrm{const}$$



Для $A=A_0\exp(ik\xi)$, $\alpha=\delta|A_0|^2-\mu k^2$ — это решение типа плоской волны. Устойчивость таких волн определяется знаком $\mu\delta$. Волны устойчивы относительно бесконечно малых возмущений для $\mu\delta<0$ и неустойчивы для $\mu\delta>0$. Численные расчеты показали, что для $0{,}1\leqslant k_0x_0\leqslant5$ $\delta>0$, и знак $\mu\delta$ совпадает со знаком μ. На фигуре сплошной линией изображена нейтральная кривая в осях k_0x_0 и ρ_e/ρ_0. Она имеет асимптоту $k_0x_0\sim0{,}74$ при $\rho_e/\rho_0\to\infty$. Область неустойчивости расположена справа от кривой.

Для больших k_0x_0 разложения по ε не справедливы из-за быстрого роста с k_0x_0 нелинейных членов, что связано с отсутствием дисперсии при $k_0x_0\to\infty$. При $k_0x_0\to0$ отношение нелинейных членов к дисперсионным стремится к 0, что соответствует [8] описанию распространения длинных нелинейных волн в плоском магнитном слое уравнением Бенджамина — Оно [4].

Характерный наблюдаемый в фотосфере Солнца диаметр трубок — 100—300 км. В приложении к слоям это дает длину неустойчивой волны $\leqslant437$—1313 км соответственно.

4. Распространение солитонов. В случае $\mu\delta>0$ уравнение (2.5) имеет решение типа солитонов огибающей

$$f_{11}=A\operatorname{sech}\left[A\sqrt{\frac{\delta}{2\mu}}(\xi-B\tau)\right]\exp\left\{iA^2\frac{\delta\tau}{2}+\left(\xi-\frac{B\tau}{2}\right)\frac{B}{2\mu}\right\}$$

Здесь A — амплитуда солитона, B — скорость. При фиксированной амплитуде длина солитона определяется через отношение μ/δ. На фигуре правее штриховой линии $\mu/\delta\to0$ при $\rho_e/\rho_0\to\infty$ и фиксированном k_0x_0.

Используемое в данной работе приближение несжимаемой жидкости с отсутствием поля вне слоя справедливо, например, для нижней части солнечной фотосферы, где можно считать $v_a \ll c_0$, c_e. Через c_0 и c_e обозначены скорости звука внутри и вне магнитного слоя соответственно. С высотой ρ_e/ρ_0 здесь, по-видимому, растет. Таким образом, длина солитона при распространении вверх уменьшается.

Автор благодарит М. С. Рудермана за постановку задачи и полезные обсуждения и В. Б. Баранова за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Roberts B.* Wave propagation in magnetically structured atmosphere. № 2: Waves in a magnetic slab.— Solar Phys., 1981, v. 69, № 1, p. 39—56.
2. *Edwin P. M., Roberts B.* Wave propagation in magnetically structured atmosphere. № 3. The slab in a magnetic environment.— Solar Phys., 1982, v. 76, № 2, p. 239—259.
3. *Chakraborty B. B.* The hydromagnetic stability of a two-dimensional compressible jet.— Progr. Theoret. Phys., 1968, v. 40, № 2, p. 210—230.
4. *Roberts B., Mangeney A.* Solitons in solar magnetic flux tubes.— Monthly Not. Roy. Astron. Soc., 1982, v. 198, p. 7P—11P.
5. *Hasimoto H., Ono H.* Nonlinear modulation of gravity waves.— J. Phys. Soc. Japan, 1972, v. 33, № 3, p. 805—811.
6. *Davey A.* The propagation of a weak nonlinear wave.— J. Fluid Mech., 1972, v. 53, № 4, p. 769—781.
7. *Tanaka M.* Nonlinear self-modulation of interfacial waves.— J. Phys. Soc. Japan, 1982, v. 51, № 6, p. 2016—2023.
8. *Tanaka M.* Nonlinear self-modulation problem of the Benjamin — Ono equation.— J. Phys. Soc. Japan, 1982, v. 51, № 8, p. 2686—2692.
9. *Захаров В. Е.* Устойчивость периодических волн конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости.— ПМТФ, 1968, № 2, с. 86—94.

Москва

Поступила в редакцию
23.II.1984