

УДК 537.84

## ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МГД-ТЕЧЕНИЯХ В КАНАЛАХ

АИТОВ Т. Н., ТАНАНАЕВ А. В., ЯКОВЛЕВ В. В.

Численно и экспериментально исследованы возможности наступления безынерционных режимов течения проводящей жидкости в каналах сложной геометрии при воздействии сильного внешнего поля. Определена область существования безынерционного режима по числам Гартмана и параметру МГД-взаимодействия, получены асимптотические оценки коэффициентов сопротивления.

**1. МГД-течения в сильном поле.** Движение жидкого металла при наличии сильного внешнего магнитного поля часто встречается в технических приложениях [1–3].

Динамика электропроводящей несжимаемой вязкой жидкости определяется системой критериев: числом Рейнольдса  $R=UL\rho/\eta$ , числом Гартмана  $M=BL\sqrt{\sigma/\eta}$  и параметром МГД-взаимодействия  $N=M^2/R=\sigma B^2L/\rho U$ . Здесь  $L$  — характерный размер,  $U$  — скорость,  $\sigma$  и  $\eta$  — электропроводность и динамическая вязкость,  $\rho$  — плотность,  $B$  — характерное значение индукции внешнего поля. В сильном поле  $N \gg 1$ ,  $M \gg 1$ . Это позволяет применить асимптотический анализ МГД-течений, основанный на линейризованной по Стоксу системе уравнений движения [3]. Однако до настоящего времени доказательства асимптотического соответствия решений линейных и нелинейных уравнений отсутствуют.

Общее решение линейризованных уравнений определяется суперпозицией решений для гартмановских пограничных слоев и решения для невязкого безынерционного ядра, градиент давления в котором уравновешивается электромагнитной силой

$$\nabla(p/N) = \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (1.1)$$

$$\mathbf{j} = -\nabla\phi + \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad \nabla \mathbf{j} = 0, \quad \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (1.2)$$

магнитное поле предполагается заданным. Обозначения общепринятые. Уравнение (1.1) показывает, что течение жидкости в ядре определяется не вторым законом Ньютона, а условием получения потенциального распределения электромагнитной силы в соответствии с законом Ома.

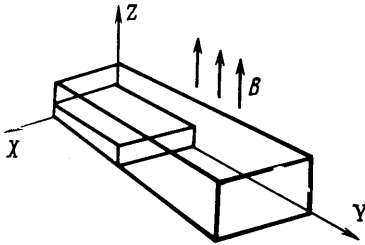
Общее решение уравнений (1.1)–(1.2) получено в [4] в виде интегралов от дифференциальных характеристик заданных полей  $B$  и  $p$ . Отметим, что общее решение предопределяет наличие в потоке узких слоев ( $K$ -слоев), ориентированных вдоль магнитных силовых линий, в которых безынерционная и невязкая аппроксимация (1.1) не имеет места. В отличие от слоев гартмановского типа баланс сил в  $K$ -слое имеет инерционно-электромагнитный характер, поэтому наличие  $K$ -слоя не обнаруживается в рамках анализа с использованием линейризованных по Стоксу уравнений движения. Толщина  $K$ -слоя убывает с ростом поля как  $N^{-1/2}$  [3]. Однако заранее неясно, будут ли нет указанные слои оказывать влияние на интегральные характеристики течения при  $N \gg 1$ . Типичной ситуацией образования  $K$ -слоя является прохождение магнитной силовой линии через участок излома стенки канала [4], поэтому наибольшие сомнения в правомочности линейризации уравнений движения возникают для случаев течения в областях нерегулярной формы.

**2. Численный анализ.** Первоначально возможность наступления безынерционного стока режима исследовалась численно. Структура уравнений движения

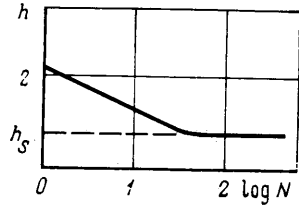
$$N^{-1}(\nabla\mathbf{v})\mathbf{v} = -\nabla(p/N) + M^{-2}\nabla^2\mathbf{v} + \mathbf{j}\times\mathbf{B} \quad (2.1)$$

показывает, что если в сильном поле при  $N \gg M$  вклад нелинейных членов действительно будет пренебрежимо мал, то нормированный перепад давлений вида  $\Delta h = \Delta p/N$  должен быть функцией только числа Гартмана. Однозначно характеризует переход в линейный режим совпадение расчетов как по нелинейным уравнениям (2.1), так и с использованием линейризованного аналога (т. е. уравнений с заранее отброшенной левой частью).

В расчетах использовались две модели. Одна соответствовала традиционно используемой модели вязкой несжимаемой электропроводной жидкости, описываемой системой уравнений (2.1) совместно с уравнениями (1.2). Вторая модель соответствовала линейризованному аналогу.



Фиг. 1



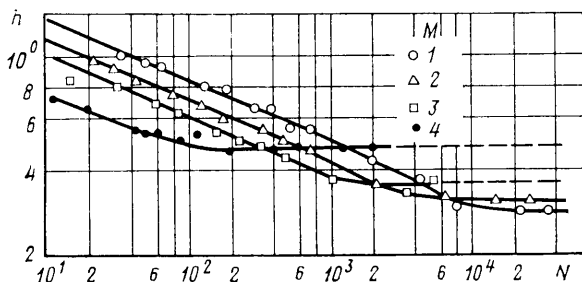
Фиг. 2

Обе модели применялись для расчета течения на участке внезапного расширения (фиг. 1). Участки внезапного расширения часто встречаются в технических приложениях, кроме того, наличие изломов стенки канала обуславливает образование при  $N \gg 1$  слоев инерционно-электромагнитной природы, воздействие которых на динамику течения и целесообразно исследовать. Жидкость втекает в узкую часть канала через сечение, расположенное в плоскости  $y=0$ , двигаясь далее в положительном направлении оси  $y$ , проходит участок внезапного расширения и окончательно выходит через сечение, расположенное в плоскости  $y=y_{\max}$ , где  $y_{\max}$  — длина канала в осевом направлении. Размеры расчетной области варьировались, однако основные результаты, приведенные ниже, получены при следующих значениях параметров: максимальный размер по направлению оси  $x-x_{\max}=1.6$  (плоскость симметрии течения),  $y_{\max}=4$ , максимальный размер по вертикальной координате  $z_{\max}=2$  (верхняя стенка). Внешнее магнитное поле считается однородным и направленным по оси  $z$ .

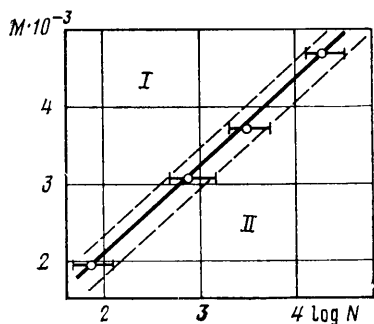
Сформулированные выше дифференциальные уравнения движения заменялись конечно-разностными с погрешностью  $O(\tau, H^2)$ , здесь  $\tau$  — шаг по временной координате,  $H$  — интервал пространственной дискретизации. Количество разностных уравнений соответствовало трехмерной расчетной сетке с числом узлов  $9 \times 21 \times 11$  и постоянным шагом  $H=0.2$  по всем направлениям. Граничные условия включали в себя условие прилипания и непротекания для поля скоростей и условие электроизоляции стенки для электрического потенциала. Разностные уравнения решались методом расщепления аналогично вычислительной процедуре, описанной в [5]. Для расчетов использовался компьютер БЭСМ-6.

Для оценки погрешности, вносимой линейризацией уравнений, сравнивались величины безразмерного перепада давления между входом и выходом расчетной области, вычисленные как по полным (нелинейным) уравнениям, так и с использованием линейризованного аналога. Основной результат исследования представлен на фиг. 2, на которой изображена расчетная зависимость нормированного перепада давлений  $\Delta h$  от параметра  $N$ , вычисленная по решениям нелинейных уравнений. Параметр  $M$  вдоль кривой фиг. 2 поддерживается постоянным. Асимптотическое (наименьшее) значение  $\Delta h = \Delta h_s$  соответствует расчету в приближении Стокса. Из фиг. 2 видно, что с ростом  $N$  коэффициент сопротивления проточного тракта асимптотически приближается к минимальному значению  $\Delta h_s$ . В сильном поле при  $N \gg M$  перепад давлений пропорционален параметру МГД-взаимодействия  $\Delta p = k(M)N$ , причем  $k$  численно равен коэффициенту сопротивления тракта, рассчитанному в безынерционном приближении  $k = \Delta h_s$ .

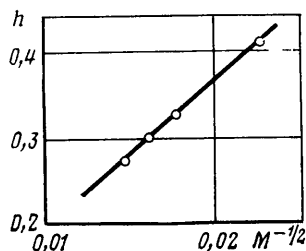
**3. Экспериментальные результаты.** Для проверки возможностей перехода течения в безынерционный режим проведена серия экспериментов на МГД-стенде [6]. Рабочая среда в канале — ртуть. Основные эксперименты по наступлению стока режима проводились на модели изогну-



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

того на  $180^\circ$  канала прямоугольного поперечного сечения с отношением сторон  $b/a=10,4$ ,  $b=120$  мм — длинная сторона сечения, являющаяся характерным размером. Участок канала  $L=5b$  размещался в однородном поперечном поле. Максимальная напряженность магнитного поля в объеме  $600 \times 140 \times 150$  мм<sup>3</sup> составляла  $B=1,7$  Тл, при этом числа подобия изменялись в диапазонах  $0 \leq M \leq 4680$ ,  $0 \leq N \leq 4 \cdot 10^4$ ,  $500 \leq R \leq 8 \cdot 10^5$ .

На фиг. 3 представлены результаты эксперимента, для каждой кривой число  $M$  постоянно. Цифрам 1–4 на фиг. 3 соответствуют следующие величины чисел Гартмана  $M$ : 4680, 3680, 3060, 1930. Видно, что характер кривых  $\Delta h = \Delta h(N)$  аналогичен расчетным. Асимптотическое (при  $N \gg 1$ ) значение  $\Delta h_s$  соответствует стоксову режиму течения. Обработка экспериментальных результатов фиг. 3 в координатах  $N-M$  показывает область существования инерционного (I) и безынерционного (II) режимов течения (фиг. 4).

Зависимость  $\Delta h_s$  от числа Гартмана ( $M \gg 1$ ) можно оценить следующим образом. Из линеаризованного уравнения (2.1) следует, что перепад давления в продольном направлении по порядку величины равен

$$\Delta h = h_2 - h_1 = L j_{\perp} B \quad (3.1)$$

где  $L$  — характерная величина участка неоднородности,  $j_{\perp}$  — поперечная составляющая плотности тока в ядре. В соответствии с [3] для участка расширения канала прямоугольного поперечного сечения  $L=O(1)$ ,  $j_{\perp}=O(M^{-1/2})$ , поэтому при  $B=O(1)$  из (3.1) следует оценка:  $\Delta h_s=O(M^{-1/2})$ . Для течения в круглой трубе  $L=O(M^{1/2})$ ,  $j_{\perp}=O(M^{-1})$  [3], поэтому и в данном случае справедлива оценка  $\Delta h_s=O(M^{-1/2})$ . Примечательно, что оценка справедлива и для течения на участке поворота (фиг. 5).

**4. Обсуждение результатов.** При обсуждении приведенных результатов возникает два вопроса. Первый связан с особенностями перехода течения к безынерционному режиму в области произвольной формы. До настоящего времени нет доказательства асимптотического соответствия решений ли-

нейных и нелинейных уравнений движения при  $N \rightarrow \infty$ . Более того, результаты настоящего анализа свидетельствуют о том, что имеются ситуации, в которых течение никогда не перейдет к безынерционному режиму при больших числах  $N$  и  $M$ . Например, так будет в том случае, когда рассматриваемые значения параметров лежат выше прямой линии фиг. 4. Таким образом, наступление безынерционного режима в области нерегулярной формы следует связывать не только с большой величиной определяющих параметров  $N$  и  $M$ , а с обязательной их взаимосвязью, выраженной зависимостью фиг. 4. Следует отметить, что в безынерционном режиме течения решения линейных и нелинейных уравнений совпадают только интегрально, т. е. по перепаду давления. Локально данные расчета по линейризованным уравнениям и реальная структура течения могут отличаться. Причина состоит в том, что линейризованные уравнения не фиксируют слои инерционно-электромагнитной природы, наличие которых в потоке обусловлено структурой общего решения для ядра (1.1)–(1.2).

Второй вопрос связан с предельным характером поведения коэффициентов сопротивления проточных трактов при безынерционном режиме течения. Предположим, что значения параметров  $N$  и  $M$  таковы, что течение перешло к безынерционному режиму. Коэффициент сопротивления в этом случае начинает определяться формулой типа  $\Delta p = k(M)N$ , где  $k$  зависит только от числа Гартмана по асимптотическому закону  $k = O(M^{-1/2})$ . Для каждого проточного тракта можно построить график типа изображенного на фиг. 5, иллюстрирующий линейный характер зависимости  $\Delta h_s$  от величины  $M^{-1/2}$ . Однако аппроксимация полученных авторами опытных данных показывает, что для многих проточных трактов прямая линия фиг. 5 не проходит через начало координат (т. е. через точку  $M^{-1/2} = 0$ ), а зависимость  $\Delta h_s = \Delta h_s(M)$  аппроксимируется выражением

$$\Delta h_s = \alpha M^{-1/2} + h_0 \quad (4.1)$$

Здесь  $\alpha$  и  $h_0$  — константы. Из зависимости (4.1) формально следует, что в асимптотически сильном поле в безынерционном режиме  $\Delta h_s \rightarrow h_0$  при  $M \rightarrow \infty$ , т. е. асимптотическое (по числу Гартмана) значение коэффициента сопротивления не зависит от числа Гартмана. Коэффициент  $k$  принимает наименьшее постоянное значение, определяемое константой  $h_0$ :  $\Delta p = h_0 N$ .

Наличие дополнительного слагаемого  $h_0$  в асимптотическом законе сопротивления (4.1) обуславливается конечной электропроводностью стенок. При умеренных числах Гартмана ( $M \sim \varepsilon^{-1}$ ,  $\varepsilon = \sigma_w t_w / \sigma L$ ,  $\sigma_w$  и  $t_w$  — проводимость и толщина стенки) для анализа течения применимо приближение изолированных стенок, а для коэффициента сопротивления справедлива оценка  $O(M^{-1/2})$ . При дальнейшем увеличении числа Гартмана, когда  $M^{-1} \ll \varepsilon$ , анализ течения необходимо проводить с применением модели тонкой электропроводной стенки. Из [3] следует, что  $h_0 \sim \varepsilon^{1/2}$ . Эффекты, связанные с конечной электропроводностью стенок, могут также вноситься и вследствие шероховатости стенок канала. При проявлении шероховатости  $\varepsilon = \Delta/L$ , где  $\Delta$  — толщина эквивалентного шунтирующего слоя, создаваемого шероховатостью стенок [7]. Однако с увеличением числа  $N$  вследствие подавления инерционных эффектов толщина эквивалентного шунтирующего слоя уменьшается. Соответственно уменьшается и шунтирующий эффект шероховатости.

Основной особенностью наступления безынерционного режима в рассматриваемых течениях является то, что кроме наличия сильного магнитного поля ( $N \gg 1$ ,  $M \gg 1$ ) необходимо выполнение еще одного дополнительного соотношения, связывающего числа  $N$  и  $M$ . Линейризация потока происходит по интегральной характеристике — перепаду давления. Асимптотическое (по числу Гартмана) значение коэффициента сопротивления проточного тракта в безынерционном режиме не зависит от числа Гартмана.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Hunt J. C. R., Shercliff J. A.* Magnetohydrodynamics at high Hartmann number.— *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 1971, v. 3, p. 27—62.
2. *Муравьев Е. В.* Контактные устройства диверторных и лимитерных систем реакторов-токамаков. 1. Устройства с жидкометаллической рабочей поверхностью.— В кн.: Вопросы атомной науки и техники. Сер.: Термоядерный синтез. М., 1980, вып. 2(6), с. 57—64.
3. *Hunt J. C. R., Holroyd R. J.* Applications of laboratory and theoretical MHD duct flow studies in fusion reactor technology.— UKAEA Res. Group Rep., Culham Laboratory, Abingdon, 1977, CLM-R169.
4. *Куликовский А. Г.* О медленных стационарных течениях проводящей жидкости при больших числах Гартмана.— *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1968, № 2, с. 3—10.
5. *Антонов Т. Н., Калютик А. И., Тананаев А. В.* Численное исследование пространственного МГД-течения в канале с резким изменением поперечного сечения.— *Магнитная гидродинамика*, 1983, № 2, с. 123—130.
6. *Тананаев А. В., Боченинский В. П., Емелин Ю. Б., Черняев Ю. П., Яковлев В. В.* Экспериментальные стенды для гидравлических и энергокавитационных испытаний жидкометаллических МГД-машин.— В кн.: Уральская конф. по применению магнитной гидродинамики в металлургии. Тез. докл. Вып. 1. Пермь, 1974, с. 79—84.
7. *Тананаев А. В.* Течения в каналах МГД-устройств. М.: Атомиздат, 1979. 364 с.

Ленинград

Поступила в редакцию  
9.IV.1984