

УДК 536.25

## ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ И СТРАТИФИКАЦИИ ПЛОТНОСТИ НА ВОЗНИКНОВЕНИЕ КОНВЕКЦИИ В АТМОСФЕРАХ ПЛАНЕТ И ОБОЛОЧКАХ ЗВЕЗД

ФОМИНА Н. И., ЯВОРСКАЯ И. М.

Тепловая конвекция представляет собой явление, широко распространенное в астро- и геофизических объектах. Перенос энергии конвекцией происходит в ядрах звезд верхней части главной последовательности и в оболочках звезд нижней ее части, в частности на Солнце. Взаимодействие конвекции с радиальными пульсациями и вращением, по-видимому, является тем механизмом, который вызывает переменность цефеид. Похоже, что полосатая структура поверхности планет-гигантов Юпитера и Сатурна является отражением конвективной неустойчивости атмосфер этих планет (см., например, [1–4]). На Земле конвекция влияет на глобальные движения в атмосфере и океанах, а конвекция в мантии Земли, по-видимому, ответственна за движение континентов.

Большое число работ посвящено исследованию конвекции в астро- и геофизических условиях, но проблема столь сложна, что можно говорить лишь о решении некоторых частных задач. Действительно, конвекция в астрофизике является неизмеримо более сложным процессом, чем классическая конвекция Рэлея — Бенара. Это связано прежде всего с тем, что конвекция предстает здесь не как отдельный изолированный процесс, а во взаимодействии с другими явлениями звездной или планетной динамики: вращением, магнитными полями, сдвиговыми течениями, излучением и т. д.

Большие градиенты плотности в астрофизических конвективных зонах (так, на Солнце в конвективной оболочке плотность меняется на 6 порядков, на Юпитере — на 2–3 порядка) не допускают применения весьма облегчающей изучение конвекции аппроксимации Буссинеска.

При изучении глобальных конвективных явлений в астрофизических условиях необходимо учитывать сферическую геометрию слоев, в которых она происходит. И наконец, следует отметить еще один из самых важных факторов, осложняющих расчет конвективных зон: из-за громадных линейных размеров этих зон конвекция в них всегда турбулентна.

В данной работе изучается влияние стратификации плотности и температурных граничных условий, являющихся следствием параметризации мелкомасштабной турбулентной конвекции в сферических слоях сжимаемого газа, на возникновение крупномасштабной конвекции.

**1. Постановка задачи.** Конвективная зона звезды или планеты моделируется сферическим слоем  $r_1 \leq r \leq r_2$  совершенного газа, находящегося в центральном гравитационном поле  $GM_0/r^2$ , через который проходит поток тепла ( $G$  — гравитационная постоянная,  $r$  — расстояние от центра слоя,  $M_0$  — масса газа внутри сферы радиуса  $r_1$ ). Поскольку конвективная зона в звездах или атмосферах больших планет окружена средой, находящейся в состоянии, близком к равновесному, будем считать, что конвективный слой граничит со сферическими слоями 1 и 2, в которых перенос тепла происходит за счет излучения или теплопроводности. Поток тепла образуется выделением тепла источниками где-то вблизи центра звезды или планеты внутри сферы радиуса  $r_3 < r_1$ .

Поскольку в рассматриваемых задачах глубина конвективной зоны обычно во много раз больше шкалы высот давлений, необходимо учитывать сжимаемость и использовать полное уравнение состояния газа. С другой стороны, поскольку конвекция турбулентна, ее спектр содержит

пульсации от масштабов порядка глубины зоны до самых малых, на которых происходит вязкая диссипация, а ни одна модель не может описывать движения столь разных масштабов, то возникает необходимость как-то параметризовать мелкомасштабную турбулентность, например эффективными коэффициентами переноса. Это позволяет изучать конвекцию глобальных масштабов, ее структуру, линейные размеры и т. д. Очевидно, что эффективные коэффициенты переноса в конвективной зоне оказываются на много порядков больше молекулярных или радиационных. Отсюда ясно, что значения коэффициентов переноса в конвективном слое будут во много раз превышать значения соответствующих коэффициентов в окружающих слоях.

Равновесные параметры газа во всех областях модели удовлетворяют уравнениям гидростатики, теплопроводности и уравнению состояния, которые в безразмерных переменных имеют вид

$$\frac{1}{R} \frac{dp}{dx} = -\frac{m(x)}{x^2}; \quad \frac{dm}{dx} = R(x)x^2$$

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left( kx^2 \frac{dt}{dx} \right) = \varepsilon; \quad p = Rt \quad (1.1)$$

$$x = \frac{r}{r_2}; \quad R = \frac{\rho}{\rho_{00}}; \quad t = \frac{T}{T_{00}}; \quad p = \frac{P}{P_{00}}; \quad m = \frac{M}{M_0}$$

здесь  $\rho_{00}$  — плотность в основании конвективного слоя,  $T_{00} = GM_0/R^*r_2$ ,  $P_{00} = R^0\rho_{00}T_{00}$ ,  $R^* = c_p - c_v$  — газовая постоянная,  $c_p$  и  $c_v$  — теплоемкости при постоянном давлении и объеме,  $\varepsilon$  — интенсивность источников тепла, отличная от нуля в области  $r \leq r_3$ . Для упрощения задачи примем, что коэффициенты теплопроводности постоянны, но различны в конвективном слое и окружающей среде и что в конвективном слое можно пренебречь собственной гравитацией, т. е.  $m=1$ .

Граничные условия, отражающие равенство температур, давления и потоков тепла на границах конвективного слоя, имеют следующий вид:

$$x = \frac{r_1}{r_2} = b : t_0 = t_1, \quad p_0 = p_1, \quad b^2 \frac{dt_0}{dx} = \frac{Q}{k_0} \quad (1.2)$$

$$x = 1 : t_0 = t_2, \quad p_0 = p_2, \quad \frac{dt_0}{dx} = \frac{Q}{k_0}$$

здесь нижние индексы 0, 1 и 2 относятся к характеристикам газа в конвективном слое в окружающей среде ниже и выше конвективного слоя соответственно,  $Q$  — безразмерный поток тепла, проходящий через слой.

Используя (1.1) и (1.2), найдем равновесное распределение параметров газа в конвективном слое

$$t_0 = \frac{x_0 - x}{x_0 x} \frac{1}{\alpha + 1}, \quad R_0 = \left[ \frac{b}{x} \frac{x_0 - x}{x_0 - b} \right]^\alpha$$

$$p_0 = \frac{x_0 - b}{(\alpha + 1)x_0 b} \left[ \frac{b(x_0 - x)}{x(x_0 - b)} \right]^{(\alpha + 1)} \quad (1.3)$$

где показатель политропы  $\alpha$  определяется проходящим через слой потоком тепла  $Q/k_0 = -(\alpha + 1)^{-1}$ , параметр  $x_0$  определяет расстояние, на котором обращаются в нуль температура и давление; параметр  $b$  связан с относительной толщиной слоя  $\delta = 1 - b$ . Таким образом, равновесное распределение параметров газа (1.3) в конвективной зоне определяется тремя параметрами:  $\alpha$ ,  $x_0$  и  $b$ .

Когда действительный температурный градиент в слое оказывается больше адиабатического, может возникнуть конвекция. Хотя принцип смены устойчивости для сферического слоя не доказан, примем, что на пределе устойчивости возникает стационарная конвекция. Уравнения для возмущений давления  $p'$ , плотности  $\rho'$ , температуры  $T'$  и скорости  $\mathbf{u}$  записываются в следующем виде:

$$-\nabla p' - g\rho' \mathbf{r}_0 + \mathbf{F} = 0, \quad \text{div } \rho_0 \mathbf{u} = 0, \quad \rho' = \frac{\rho_0}{P_0} p' - \frac{\rho_0}{T_0} T' \quad (1.4)$$

$$\rho_0 c_v \mathbf{u} \nabla T_0 + P_0 \nabla \mathbf{u} = \nabla (k \nabla T')$$

где  $g = GM_0/r^2$ ,  $\mathbf{F}$  — сила вязкости, зависящая от тензора напряжений  $\tau_i^j(i, j=r, \theta, \varphi)$  [5] и через него от эффективного коэффициента динамической вязкости  $\eta$ ,  $(r, \theta, \varphi)$  — координаты в сферической системе. Как показывают расчеты методом пути перемешивания структуры конвективных зон, в частности Солнца [6], коэффициент  $\eta$ , определяемый как  $\eta \approx \rho u' h$ , оказывается примерно пропорциональным плотности среды  $\rho_0(r)$  везде, кроме узких областей вблизи границ зоны ( $h$  — путь перемешивания,  $u'$  — скорость конвективных пульсаций). Поэтому в дальнейшем примем, что в конвективном слое  $\eta = v_0 R_0(x) \rho_{00}$  ( $v_0 = \text{const}$ ).

Преобразуем систему (1.4), исключив возмущения давления и плотности, и получим уравнение для безразмерной температуры

$$\lambda \frac{g^* R_0}{t_0} \Delta_1 \Theta = (\nabla \times \nabla \times \mathbf{F})_r + \frac{R_0 g}{P_0} \nabla_1 \mathbf{F}$$

где  $\Delta_1$  и  $\nabla_1$  — операторы  $\Delta$  и  $\nabla$ , действующие в плоскости  $(\theta, \varphi)$ ,  $g_0 = g(r_2)$ ,  $\lambda = g_0 r_2^3 / v_0^2$ ,  $\Theta = T'/T_{00}$ ,  $g^* = x^{-2}$ . Проведем разделение переменных, положив

$$x R_0 u_r = W(x, \theta, \varphi) = W(x) Y_l^m(\theta, \varphi);$$

$$\Theta(x, \theta, \varphi) = \Theta(x) Y_l^m(\theta, \varphi)$$

где  $Y_l^m(\theta, \varphi)$  — сферические функции. После весьма громоздких преобразований получим уравнение 4-го порядка, связывающее  $W$  и  $\Theta$

$$\lambda E(x) a^2 \Theta = L W \quad (1.5)$$

$$L = \sum_{i=0}^4 f_i d^i; \quad a^2 = l(l+1)$$

$$y = -\frac{d \ln R_0}{d \ln x} = \frac{\alpha x_0}{x_0 - x}; \quad f_4(x) = 1$$

$$f_3(x) = \frac{4\alpha + 2\alpha y + y}{\alpha x}; \quad f_2 = \frac{(2xy' - 3y - 2a^2)\alpha + (\alpha + 1)(3 + y)y}{\alpha x^2}$$

$$f_1 = \frac{\alpha(y''x^2 + 4y'x - a^2y - 2y) + (\alpha + 1)(y'x + 3y - a^2)y}{\alpha x^3}$$

$$f_0 = \frac{\alpha(y''x^2 - 2a^2y'x + a^2y - 2y + a^4 - 2a^2) + (\alpha + 1)(y'x + y + a^2 - 2/3\alpha y)y}{\alpha x^4}$$

$$E = (\alpha + 1)x_0 b^\alpha (x_0 - x)^{\alpha-1} / (x_0 - b)^\alpha x^{\alpha+2}$$

Здесь штрихи означают дифференцирование по  $x$ . Второе уравнение, связывающее  $W$  и  $\Theta$ , получим из уравнения притока тепла

$$D_t \Theta = -I(x) \text{Pr} \Delta \nabla t_0 W \quad (1.6)$$

$$D_l = d^2 + \frac{2}{x}d - \frac{a^2}{x^2}; \quad \text{Pr} = \nu_0 \rho_{00} \frac{c_p}{k_0}; \quad I(x) = \frac{1}{x^3}$$

$$\Delta \nabla t_0 = \frac{d \ln t_0}{d \ln p_0} - \left( \frac{d \ln t}{d \ln p} \right)_{ad};$$

$$\left( \frac{d \ln t}{d \ln p} \right)_{ad} = \frac{\gamma - 1}{\gamma}; \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

Из (1.5) и (1.6) следует одно уравнение 6-го порядка для  $W$

$$D_l [x^{\alpha+2} (x_0 - x)^{1-\alpha} L W] = - \frac{\text{Ra} a^2}{x^3} W$$

$$\kappa_0 = k_0 / c_p \rho_{00}$$

$$\text{Ra} = g_0 r_2^3 \Delta \nabla t_0 (\alpha + 1) x_0 b^\alpha / \nu_0 \kappa_0 (x_0 - b)$$

Здесь  $\text{Ra}$  — число Релея. Перейдем к формулировке граничных условий. Конвективные зоны в астрофизике обычно граничат с устойчиво стратифицированной средой, реже с твердой поверхностью. Очевидно, что эффективные коэффициенты переноса, обусловленные мелкомасштабной конвекцией, вне конвективных зон малы. Поэтому на границах рассматриваемого слоя с устойчиво стратифицированной средой вязкие напряжения полагаются равными нулю  $\tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi r} = 0$ . В качестве температурных граничных условий примем два предельных условия: равенство нулю возмущений температуры (границы конвективного слоя имеют бесконечную теплопроводность) либо равенство нулю потоков тепла (границы теплоизолированы).

В дальнейшем будут рассмотрены следующие четыре типа граничных условий:

$$\text{I. } x=b, 1: \quad W=W'' + \frac{y}{x} W' = \Theta = 0$$

$$\text{II. } x=b, 1: \quad W=W'' + \frac{y}{x} W' = \Theta' = 0 \quad (1.7)$$

$$\text{III. } \begin{cases} x=b: & W=W'' + \frac{y}{x} W' = \Theta' = 0 \\ x=1: & W=W'' + \frac{y}{x} W' = \Theta = 0 \end{cases}$$

$$\text{IV. } \begin{cases} x=b: & W=W'' + \frac{y}{x} W' = \Theta = 0 \\ x=1: & W=W'' + \frac{y}{x} W' = \Theta' = 0 \end{cases}$$

Использование граничных условий типа II–IV вместо типа I означает ослабление граничных условий для возмущений температуры на одной или обеих границах, поскольку в этом случае допускается проникновение этих возмущений в окружающие слои. Очевидно, что сферическая геометрия и стратификация плотности в отличие от конвекции в плоском слое несжимаемой жидкости [7,8] делают граничные условия типов III и IV неравнозначными, так как различны размеры областей проникновения возмущений вне и внутри конвективного слоя и плотности в них газа. Наряду со случаем  $k(x) = \text{const}$  будет рассмотрен случай II', соответст-

вующий изменению эффективного коэффициента теплопроводности  $k(x) \sim R_0(x)$  в согласии с теорией пути перемешивания [6].

**2. Метод решения и численные результаты.** Полученная задача на собственные значения (1.5)–(1.7) решалась методом пристрелки с использованием процедуры ортогонализации [9]. Система приводилась заменой переменных к шести уравнениям первого порядка относительно новых переменных  $U_i$ . Для каждого конкретного типа граничных условий  $U_i$  выбирались так, чтобы получить для трех  $U_i$  однородные граничные условия при  $x=b$  и 1. Далее, как обычно, решение краевой задачи заменялось решением трех задач Коши. При численном интегрировании системы методом Рунге – Кутта (модификация Гилла) на каждом шаге проводилась ортогонализация решений, устраняющая влияние быстро меняющихся решений на остальные. Число шагов по  $x$  обычно равнялось 100, увеличение их числа в 3–5 раз обычно приводило к изменению числа Рэлея в 4–5-м знаке, что во многих случаях было несущественно. Из условия обращения в нуль детерминанта, составленного из полученных решений, находились собственные значения – критические числа Рэлея  $Ra^*$  для каждого заданного значения волнового числа  $l$ . Затем устанавливалось критическое волновое число  $l_c$ , обеспечивающее минимальное значение  $Ra_{min}$ . Поскольку при ортогонализации собственные функции задачи меняются, проводилось восстановление собственных функций по методу, предложенному в [10].

В процессе расчетов параметры менялись в следующих пределах:  $1/2 \leq \alpha \leq 30$ ,  $b=0,8$  и  $0,9$ ;  $1,002 \leq x_0 \leq \infty$ . Поскольку найденное из краевой задачи собственное значение  $Ra_{min}$  не имеет четкого физического смысла, для суждения о влиянии на возникновение конвекции стратификации плотности, сферичности, переменных коэффициентов переноса и температурных граничных условий, удобно ввести переменное по слою число Рэлея

$$Ra(x) = \frac{g \Delta \nabla T_0 h^4}{T_0 \nu_0 \kappa_0} = Ra_{min} (1-b)^4 \frac{(x_0-x)^{\alpha-1}}{x^{\alpha+3}}$$

где  $\Delta \nabla T_0 = \nabla T_0 - (\nabla T_0)_a ((\nabla T_0)_a$  – адиабатический температурный градиент), и использовать для суждения об устойчивости его значение в середине слоя

$$Ra_c = Ra_{min} (1-b)^4 \left( x_0 - \frac{b+1}{2} \right)^{\alpha-1} \left( \frac{b+1}{2} \right)^{-(\alpha+3)}$$

Результаты расчетов  $Ra^*$ ,  $Ra_c$ ,  $l_c$  и собственных функций  $W$  и  $\Theta$  представлены ниже.

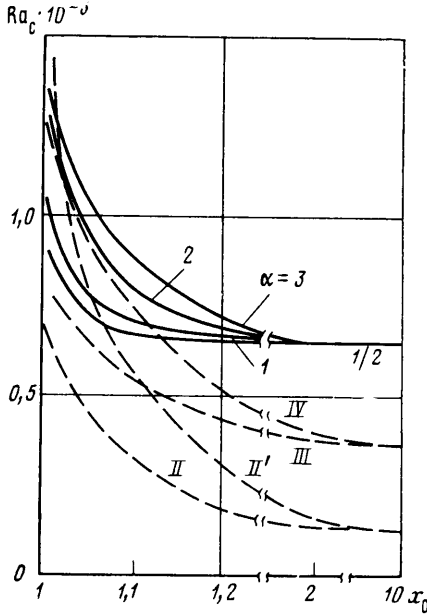
**3. Обсуждение результатов и выводы.** Параметры  $x_0$  и  $\alpha$  ответственны за стратификацию плотности в слое. Один и тот же перепад плотности

$$\Lambda = R_0(b)/R_0(1) = [(x_0-b)/b(x_0-1)]^2$$

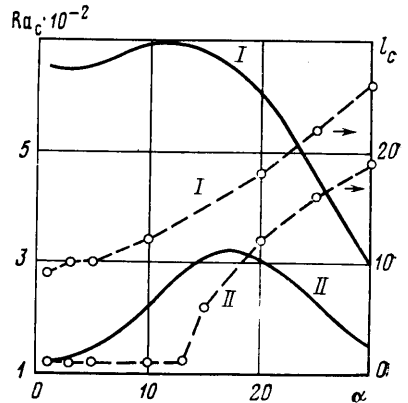
может быть достигнут за счет изменения как  $\alpha$ , так и  $x_0$ , однако общая масса газа в слое  $M$  больше при меньших  $\alpha$ , поскольку большие  $\alpha$  характеризуют более резкое падение плотности в плотных слоях вблизи нижней границы и более медленное вблизи верхней границы по сравнению со случаем меньших  $\alpha$ . При  $x_0=1$  перепад в слое бесконечен;  $x_0 \rightarrow \infty$  соответствует бесконечно протяженной атмосфере и  $\Lambda(\infty, \alpha) = b^{-\alpha} > 1$ , а случай  $x_0 = \infty$  и  $\alpha = 0$  соответствует несжимаемой жидкости, т. е.  $\Lambda = 1$  [11].

Зависимость  $Ra^*$  от  $l$  вблизи  $l_c$  весьма пологая, особенно при сильной стратификации плотности, что указывает на то, что проблема выбора реализуемого масштаба конвективных ячеек возникает и в сферических слоях при очень малой закритичности.

На фиг. 1 представлены значения  $Ra_c$  в слое с  $b=0,8$  в зависимости от  $x_0$  при  $\alpha=1/2, 1, 2, 3$  и I типе граничных условий (сплошные кривые) и при  $\alpha=3$  и II–IV типах граничных условий (штриховые кривые). Зависимость  $Ra_c$  и  $l_c$  от  $\alpha$  в слое той же толщины при  $x_0=1,8$ , I и II типах граничных условий представлена на фиг. 2. Как следует из фиг. 1, усиление стратификации, т. е. увеличение  $\alpha$  при фиксированном  $x_0$  или уменьшение  $x_0$  при фиксированном  $\alpha$ , при всех типах граничных условий приводит к стабилизации слоя газа. Однако (фиг. 2), это справедливо лишь



Фиг. 1



Фиг. 2

при умеренных значениях  $\alpha$  (при  $x_0=1,8$   $\alpha \leq 10$ ). При больших  $\alpha$  и фиксированных  $x_0$  с ростом  $\alpha$  устойчивость слоя падает (следует отметить, что значения  $\alpha > 10$ , по-видимому, в астрофизических объектах не реализуемы и практического интереса не представляют). Отсюда и из табл. 1, где приведены значения  $Ra_c$  и  $l_c$  в слое с  $b=0,8$ ,  $\Lambda \approx 517$ , II и IV типах граничных условий ясно, что влияние параметров  $x_0$  и  $\alpha$  на устойчивость слоя не равноценно и степень стабилизации слоя не может быть определена единственным параметром  $\Lambda$ , а зависит и от общей массы газа  $M$  в слое.

В табл. 2 приведены значения  $l_c$  в слое с  $b=0,8$  в зависимости от  $x_0$ : в первых четырех столбцах при  $\alpha=3$  и четырех типах граничных условий, в последних — при  $\alpha=1/2, 1, 2, 3$  и I типе граничных условий, в последней строчке указаны значения  $l_c$  для слоя несжимаемой жидкости [11]. В графе II' табл. 2 приведены критические волновые числа  $l_c$  в слое, эффективная теплопроводность которого пропорциональна плотности газа  $k(x) \sim R_0(x)$ . С ростом стратификации плотности при прочих фиксированных условиях растет критическое волновое число, т. е. уменьшается горизонтальный масштаб конвекции.

Табл. 3 содержит значения  $Ra_c$  и  $l_c$  при  $\alpha=3$ ,  $x_0=1,2$  и трех типах граничных условий в слоях различной толщины  $b=0,8$  и  $0,9$ . Уменьшение толщины слоя ( $\delta=1-b$ ) ведет к увеличению устойчивости слоя с пропорциональным уменьшением масштаба движений. В табл. 4 даны значения  $Ra_c$  и  $l_c$  при  $b=0,8$  для четырех типов граничных условий и  $\Lambda=1; 3,85; 1,42 \cdot 10^3; 7,5 \cdot 10^3$ . Замена обращения в нуль на одной или обеих границах возмущений температуры (тип I) возмущениями градиента температуры

Таблица 1

| $\Lambda \approx 517, b=0,8$ |          |        |                   |        |                   |
|------------------------------|----------|--------|-------------------|--------|-------------------|
| $x_0$                        | $\alpha$ | II тип |                   | IV тип |                   |
|                              |          | $l_c$  | $Ra_c \cdot 10^2$ | $l_c$  | $Ra_c \cdot 10^2$ |
| 1,0369                       | 3        | 2      | 5,21              | 13     | 10,1              |
| 1,4046                       | 10       | 5      | 3,31              | 13     | 6,98              |
| 1,8                          | 14       | 5      | 2,98              | 13     | 6,455             |

Таблица 2

| $x_0$               | $b=0,8, \alpha=3, l_c$ |    |     |     |    | $b=0,8, I \text{ тип}, l_c$ |    |    |    |
|---------------------|------------------------|----|-----|-----|----|-----------------------------|----|----|----|
|                     | I                      | II | II' | III | IV | $\alpha=1/2$                | 1  | 2  | 3  |
| 1,015               | 16                     | 7  | 4   | 12  | 15 | 11                          | 12 | 14 | 16 |
| 1,05                | 14                     | 1  | 1   | 11  | 12 | 10                          | 11 | 12 | 14 |
| 1,2                 | 11                     | 1  | 1   | 9   | 9  | 10                          | 10 | 10 | 11 |
| 10                  | 9                      | 1  | 1   | 8   | 7  | 9                           | 9  | 9  | 9  |
| $\infty (\alpha=0)$ | 9                      | 1  | 1   | 8   | 7  |                             |    |    |    |

Таблица 3

| $b$ | I     |                   | II    |                   | III   |                   |
|-----|-------|-------------------|-------|-------------------|-------|-------------------|
|     | $l_c$ | $Ra_c \cdot 10^2$ | $l_c$ | $Ra_c \cdot 10^2$ | $l_c$ | $Ra_c \cdot 10^2$ |
| 0,8 | 11    | 7,38              | 1     | 1,91              | 9     | 4,35              |
| 0,9 | 22    | 68,5              | 1     | 14,1              | 17    | 39,5              |

Таблица 4

| Тип граничных условий | $\alpha=0, x_0=\infty$<br>$\Lambda=1$ |                   | $\alpha=3, x_0=1,8$<br>$\Lambda=3,8$ |                   | $\alpha=3, x_0=1,025$<br>$\Lambda=1,42 \cdot 10^3$ |                   | $\alpha=20, x_0=1,8$<br>$\Lambda=7,52 \cdot 10^3$ |                   |
|-----------------------|---------------------------------------|-------------------|--------------------------------------|-------------------|--|-------------------|---|-------------------|
|                       | $l_c$                                 | $Ra_c \cdot 10^2$ | $l_c$                                | $Ra_c \cdot 10^2$ | $l_c$  | $Ra_c \cdot 10^2$ | $l_c$   | $Ra_c \cdot 10^2$ |
| I                     | 9                                     | 6,49              | 10                                   | 6,45              | 15   | 12,2              | 18  | 6,14              |
| II                    | 1                                     | 1,2               | 1                                    | 1,27              | 5  | 5,93              | 12  | 3,05              |
| III                   | 8                                     | 3,94              | 8                                    | 3,75              | 12   | 7,43              | 14  | 3,21              |
| IV                    | 7                                     | 3,63              | 7                                    | 3,91              | 14   | 11,2              | 18  | 6,04              |

(типы II, III и IV) при прочих равных условиях уменьшает устойчивость слоя (фиг. 1) и приводит к существенному увеличению масштаба конвективных ячеек (табл. 2–4). Эта замена означает ослабление температурных граничных условий, поскольку в этом случае допускается проникновение температурных возмущений в окружающие слои газа. Очевидно, что сферическая геометрия и стратификация плотности в отличие от плоского слоя несжимаемого газа [7, 12] делают граничные условия III и IV неравноценными, так как размеры областей проникновения возмущений и плотность газа вне и внутри конвективного слоя оказываются различными. Максимальная дестабилизация и увеличение горизонтального масштаба конвективных ячеек достигаются при ослаблении граничных условий на обеих границах (II тип граничных условий) и минимальной

стратификации (фиг. 1, табл. 2 и 4). При не слишком сильной стратификации  $\Lambda < \Lambda_c(\alpha) \approx 200-300$  масштаб конвективных ячеек постоянен и максимален  $l_c=1$ .

С ростом стратификации размер ячеек убывает и одновременно уменьшается дестабилизирующий эффект ослабления граничных условий (фиг. 2). Ослабление граничного условия на внутренней границе (тип III) обычно приводит к большему уменьшению устойчивости слоя, чем на внешней границе. И только в случае очень протяженных атмосфер  $x_0 > 10$  наблюдается обратная картина (фиг. 1, табл. 4). Это следует из физических соображений: температурные пульсации при IV типе граничных условий имеют возможность проникать лишь в менее плотные слои и на расстояние, равное  $x_0-1$ , которое мало при  $x_0$  близких к 1 и велико при больших  $x_0$ . Поэтому при достаточно тонкой атмосфере ( $x_0 \sim 1$ ) результаты для I и IV типов граничных условий, как следует из фиг. 1 и третьего столбца табл. 4, оказываются примерно одинаковыми. При очень сильной стратификации  $\Lambda > 10^4$  и  $x_0 \approx 1$  ослабление граничных условий перестает оказывать влияние на критическую конвекцию. Это, по-видимому, можно объяснить тем, что очень большая плотность в центральной области слоя и  $x_0 \approx 1$  препятствует распространению возмущений в окружающие слои. Этот результат существенно отличен от полученного в [8] для плоского слоя сжимаемой жидкости. Различие вряд ли можно объяснить только геометрией слоя. По-видимому, существеннее то, что в [8] эффективные коэффициенты переноса принимались постоянными, тогда как в нашей работе в согласии с [6] принято  $\eta \sim R_0(x)$  и  $k_0 = \text{const}$ . Этот эффект сохраняется, если принять  $k_0 \sim R_0(x)$ .

На фиг. 3 приведен пример кривых устойчивости, определяющих зависимость  $Ra^*$  от волнового числа  $l$  в слое  $b=0,8$ ,  $x_0=1,8$  и различных  $\alpha$  при II типе граничных условий. В интервале  $1 \leq \alpha \leq 13$  всегда  $l_c=1$ , при дальнейшем росте  $\alpha$  (или при фиксированном  $\alpha$  и уменьшении  $x_0$ ) минимум кривой  $Ra^*(l)$  постепенно перемещается на большие значения  $l$ . Кривые устойчивости в обозримом интервале значений  $l \leq 30$  в отличие от работы [8] всегда имеют один минимум. В работе [8] при определенных значениях параметров кривые устойчивости имеют два минимума на разных длинах волн, каждый из которых является абсолютным минимумом в определенном интервале значений параметров. Смена абсолютных минимумов тогда приводит к скачкообразному изменению критического волнового числа. В нашем случае критический масштаб конвекции с ростом стратификации плотности при ослабленных граничных условиях меняется непрерывно, как и в случае граничных условий I типа.

На фиг. 4 и 5 приведены графики зависимости нормированных функций, соответствующих радиальной компоненте количества движения  $W$  и возмущению температуры  $\Theta$ , от радиуса в слое с  $b=0,8$  при  $x_0=1,8$ ,  $\alpha=3$  (сплошные кривые) и  $\alpha=20$  (штриховые кривые) и трех типах граничных условий. Структура этих функций показывает, что независимо от степени стратификации плотности и граничных условий вертикальный размер конвективных ячеек всегда равен высоте слоя. С увеличением стратификации плотности максимум амплитуды при всех типах граничных условий перемещается в более плотные слои. Граничные условия при фиксированных значениях параметров подобия слабо влияют на функцию  $W$ , различие не превышает 2-3% и на фиг. 4 все кривые практически совпадают. При ослаблении граничных условий на обеих границах возмущения температуры в слое меняются слабо при сильной стратификации ( $\alpha=20$ ), а при слабой ( $\alpha=3$ ) практически постоянны (масштаб справа относится только к случаю  $\alpha=3$  при II типе граничных условий).

На основании проведенных расчетов можно сделать следующие выводы:

1. Увеличение стратификации плотности в случае задания на границах слоя температуры обычно приводит к стабилизации слоя и уменьше-

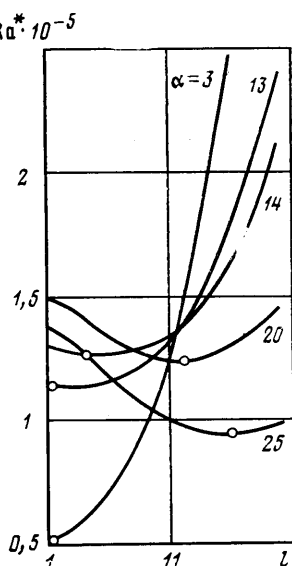


нию горизонтального размера конвективных ячеек. Вертикальный размер конвективных движений всегда оказывается равным высоте слоя газа.

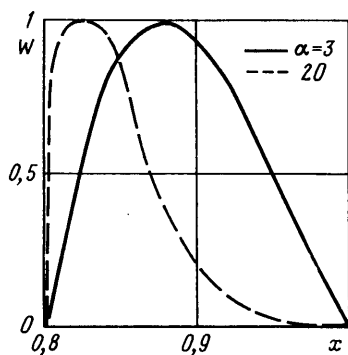
2. Учет влияния конечной теплопроводности окружающих конвективный слой массивов приводит к ослаблению температурных граничных условий, что в свою очередь ведет в обратному эффекту — дестабилизации слоя и увеличению масштаба конвективных движений. При не очень сильных стратификациях последний эффект оказывается преобладающим. С ростом  $\Lambda$  влияние граничных условий ослабевает и при перепаде плотности  $\Lambda > 10^4$  оно практически исчезает.

3. При ослаблении граничных условий на обеих границах и  $\Lambda \leq \Lambda_c(\alpha) \approx 200-300$  горизонтальный масштаб конвективных движений максимален и уменьшается при дальнейшем росте стратификации.

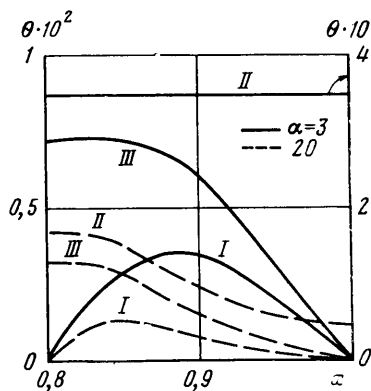
Применение полученных результатов к изучению конвекции на астрофизических объектах позволяет заключить, что большие горизонтальные размеры зон и поясов на наблюдаемых поверхно-



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

стях больших планет по сравнению с оценками вертикального размера конвективных зон [3-4] можно объяснить слабой эффективной проводимостью окружающих слоев газа. Однако это объяснение не проходит для конвективных зон звезд типа Солнца, где стратификация очень велика и перепад плотности оказывается порядка  $10^6$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Стоун П. Метеорология атмосферы Юпитера.— В кн.: Юпитер. Т. 2. М.: Мир, 1976, с. 460—500.
2. Gierasch P. J. Jovian meteorology: large-scale moist convection.— Icarus, 1976, v. 29, № 4, p. 445—454.
3. Williams G. P., Robinson J. B. Dynamics of convectively unstable atmosphere: Jupiter? — J. Atmosph. Sci., 1973, v. 30, № 4, p. 684—717.
4. Yavorskaya I. M., Belyaev Yu. N. On a convective model of Jupiter.— Acta Astronautica, 1982, v. 10, № 6—7, p. 481—486.
5. Hurlle D. T. J., Jakeman E., Pike E. R. On the solution of the Benard problem with boundaries of finite conductivity.— Proc. Roy. Soc., 1976, v. A296, № 1447, p. 469—475.
6. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.

7. *Depassier M. C., Spiegel E. A.* The large-scale structure of compressible convection.— *Astron. J.*, 1981, v. 86, № 3, p. 496–512.
8. *Baker N., Temesvary S.* Table of convective stellar envelope models. New York, 1966, 79 p. (Goddard space flight center).
9. *Годунов С. К.* О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.— *Успехи мат. наук*, 1961, т. 16, № 3, с. 171–174.
10. *Бирих Р. В., Рудаков Р. Н., Семакин И. Г.* Применение метода ортогонализации в пошаговом интегрировании при исследовании устойчивости конвективных течений. Ч. 2. Расчет формы возмущений.— В кн.: *Конвективные течения*. Вып. 1. Пермь: изд. Пермск. пед. ин-та, 1979, с. 58–60.
11. *Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford: Clarendon Press, 1961. 652 p.

Москва

Поступила в редакцию  
10.IV.1984