

УДК 533.6.011.34:519.6

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОЕКЦИОННОГО МЕТОДА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ КОНТУРА ТЕЛА МИНИМАЛЬНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

АУЛЬЧЕНКО С. М., ЛАТЫШОВ А. Ф., ЯНЕНКО Н. Н.

Рассматривается задача построения полубесконечного осесимметричного тела минимального сопротивления в дозвуковом потоке идеального газа, формулируемая как задача конечномерной минимизации посредством задания контура тела в параметрической форме и применения проектированного метода решения задачи обтекания.

Точное решение задачи построения оптимального аэродинамического контура даже в приближении невязкого газа сопряжено со значительными трудностями вследствие сложности решения системы уравнений в частных производных большой размерности, включающей уравнения обтекания и необходимые условия оптимальности. Построение минимизирующей последовательности прямыми методами численной оптимизации требует большого времени на ЭВМ, так как в этом случае необходимо многократное решение задачи обтекания. Поэтому представляется целесообразным объединить в единый вычислительный процесс определение оптимального контура тела и решение задачи обтекания. Такой вычислительный процесс строится на основе параметризации задачи посредством применения методов численной оптимизации. Параметризация задачи предполагает не только параметрическую форму задания контура тела, но и аппроксимацию решения уравнений течения газа с некоторым числом свободных параметров. Основная особенность такого подхода заключается в том, что точное решение уравнений течения газа реализуется лишь для оптимального контура. Это обстоятельство позволяет существенно сократить потребности для решения задачи ресурсов ЭВМ.

1. Для построения аппроксимации решения уравнений течения газа расчетная область покрывается сеткой, размеры ячеек которой при фиксированном их числе регулируются с целью повышения точности решения. Таким образом, оптимизации подлежат три группы параметров: параметры, задающие контур тела; параметры аппроксимации решения уравнений течения газа; параметры сетки.

Пусть задано множество функций $u(x, k) \in U_k$, зависящих от m параметров $k = \{k_1, \dots, k_m\}$ со значениями из ограниченного евклидова множества $K_m \subset E^m$; $x \in [x_0, x_N] \subset E^1$. Каждая функция $u(x, k)$ из допустимого множества U_k определяет функцию $\varphi = \varphi(x, y; u)$ как решение дифференциального уравнения в прямоугольной области Ω при следующих краевых условиях:

$$\Phi(\varphi) = A\varphi_{xx} + 2B\varphi_{xy} + C\varphi_{yy} + D = 0 \quad (1.1)$$

$$\varphi = u \in U_k \subset C^2 | \Gamma_1 = \{x | x_0 \leq x \leq x_N\}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \tau(x, y) \in C^1 | \Gamma_2 = \Gamma \setminus \Gamma_1 \quad (1.2)$$

$$\Omega = \{x, y | x_0 \leq x \leq x_N, \quad y_0 \leq y \leq y_N\}$$

где Γ — граница области Ω ; n — внешняя нормаль к границе Γ ; $\tau(x, y)$ — заданная функция; коэффициенты дифференциального уравнения (1.1) — функции $\{x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y\}$; $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_{xx}, \varphi_{xy}, \varphi_{yy}$ — частные производные функции φ .

Будем считать, что краевая задача (1.1), (1.2) удовлетворяет условиям существования и единственности решения при $\forall u \in U_k$.

Оптимизационная задача формулируется следующим образом: определить функцию $u(x, k) \in U_k$, доставляющую минимум функционалу

$$J(u) = F_0(\varphi(x, y; u)) \quad (1.3)$$

где функция $\varphi(x, y; u)$ — решение краевой задачи (1.1), (1.2).

Построим предварительно требуемую аппроксимацию для решения задачи (1.1), (1.2). Разобьем расчетную область Ω координатными линиями $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ на прямоугольные ячейки ω_{ij} . В ячейке ω_{ij} решение аппроксимируется следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_{ij}(x, y) = & \varphi_{i-1, j-1}(x_{i-1}, y_{j-1}) + [\varphi_{ij-1}(x, y_{j-1}) - \varphi_{ij-1}(x_{i-1}, y_{j-1})] + \\ & + [\varphi_{i-1, j}(x_{i-1}, y) - \varphi_{i-1, j}(x_{i-1}, y_{j-1})] + \sum_{s, l=1}^L a_{sl}{}^{ij} \xi^s \eta^l \\ & x = (1 - \xi)x_{i-1} + \xi x_i, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \\ & y = (1 - \eta)y_{j-1} + \eta y_j, \quad 0 \leq \eta \leq 1 \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\varphi_{i-1, j-1}(x_{i-1}, y_{j-1}) = \varphi_{i-1, j}(x_{i-1}, y_{j-1}) = \varphi_{ij-1}(x_{i-1}, y_{j-1}) = \varphi_{ij}(x_{i-1}, y_{j-1})$$

$$\Omega = \bigcup_{i, j=1}^N \omega_{ij}$$

Здесь L — порядок аппроксимации, зависящий от требуемого класса гладкости функции φ .

Рассмотрим общие свойства аппроксимации (1.4) в предположении, что $\varphi(x, y) \in C^p$, где C^p — множество p раз непрерывно дифференцируемых функций; $(x, y) \in \Omega$. Условия сохранения требуемой гладкости на границах ячеек приводят к выполнению следующих соотношений, связывающих значения коэффициентов аппроксимации в ячейках ω_{ij} , $\omega_{i, j-1}$, $\omega_{i-1, j}$:

$$\begin{aligned} a_{ql}{}^{ij} = & \left(\frac{h_i}{h_{i-1}} \right)^q \sum_{s=q}^L C_s^q a_{sl}{}^{i-1, j}, \quad s, l=1, \dots, L, \quad q=1, \dots, p \\ a_{sq}{}^{ij} = & \left(\frac{H_j}{H_{j-1}} \right)^q \sum_{l=q}^L C_l^q a_{sl}{}^{i, j-1}, \quad h_i = x_i - x_{i-1}, \quad H_j = y_j - y_{j-1} \end{aligned} \quad (1.5)$$

из которых определяется p строк и p столбцов матрицы коэффициентов аппроксимации решения в ячейке ω_{ij} .

Соотношения (1.5) достаточны для удовлетворения условия требуемой гладкости аппроксимации функции φ . Поэтому во внутренних ячейках можно исключить коэффициенты, не определяемые из (1.5). В граничных ячейках сохраняются коэффициенты, необходимые для удовлетворения граничных условий. Необходимые для рекуррентного счета коэффициенты в граничных ячейках задаются. Тогда приближенное решение во всей области Ω можно представить в виде

$$\varphi^*(x, y) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \delta_{ij} \varphi_{ij}(x, y) \quad (1.6)$$

Здесь $\delta_{ij} = 1$ при $(x, y) \in \omega_{ij}$ иначе $\delta_{ij} = 0$. Величина зависит от задаваемых свободных параметров $\{w_i\}$, число которых пропорционально N .

Это приближенное решение может быть определено из минимизации функционала невязки уравнения (1.1) $F(\varphi^*)$ по свободным параметрам

аппроксимации

$$F(\varphi^*) = \left[\frac{1}{\Omega} \iint_{\Omega} \Phi^2(\varphi^*) d\omega \right]^2 \rightarrow \min_{\varphi^*} \quad (1.7)$$

при связях (1.2).

Рассмотрим важный частный случай $\tau(x, y) \equiv 0$, $p=2$. Соответствующие граничные условия (1.2) с учетом представления решения в форме (1.4) будут иметь вид

$$a_{1l}^{1j} = 0, \quad j=1, \dots, N, \quad l=1, \dots, L \quad (1.8)$$

$$\sum_{s=1}^L s a_{s1}^{Nj} = 0, \quad l=1, \dots, L, \quad j=1, \dots, N$$

$$\sum_{l=1}^L l a_{s1}^{iN} = 0, \quad s=1, \dots, L, \quad i=1, \dots, N \quad (1.9)$$

Из анализа соотношений (1.5), (1.8), (1.9) следует, что при $p=2$ для удовлетворения граничных условий и выделения группы свободных параметров, задание которых определяет параметры аппроксимации во всех ячейках, необходимо $L=3$. При этом, как уже отмечалось, без нарушения свойств аппроксимации исключаются коэффициенты, не вычисляемые по формулам (1.5) и не требующиеся для выполнения граничных условий (1.2):

$$\{a_{33}^{ij}\}, \quad i, j=1, \dots, N-1, \quad a_{23}^{1j}, \quad j=2, \dots, N-1, \quad a_{31}^{i1}, a_{32}^{i1}, \quad i=2, \dots, N-1.$$

Свободными параметрами являются оставшиеся коэффициенты аппроксимации в ячейке (1.1).

При данной аппроксимации (1.4) и условиях (1.9) граничные условия на левой границе и на Γ_1 выполняются автоматически. Выполнение граничных условий в ячейках ω_{1N} , ω_{N1} обеспечивает их выполнение во всех ячейках ω_{iN} , ω_{Nj} , $i, j=2, \dots, N$, что непосредственно следует из соотношений (1.5), (1.9).

В случае неоднородных граничных условий $\tau(x, y) \neq 0$, раскладывая соответствующие функции в ряд по степеням независимой переменной и используя условия равенства многочленов, также получаем линейные соотношения между коэффициентами аппроксимации, т. е. вместо соотношений (1.8), (1.9) будут следующие:

$$\sum_{s=1}^L s a_{s1}^{Nj} = \frac{1}{(l+1)!} \frac{\partial^l \tau(x_N, y_{j-1})}{\partial x^l}, \quad l, s=1, \dots, L$$

$$\sum_{l=1}^L l a_{s1}^{iN} = \frac{1}{(s+1)!} \frac{\partial^s \tau(x_{i-1}, y_N)}{\partial y^s}, \quad i, j=1, \dots, N$$

$$a_{1l}^{1j} = \frac{1}{l(l+1)!} \frac{\partial^l \tau(0, y_{j-1})}{\partial x^l}$$

Точность решения $\varphi^*(x, y)$ существенно зависит также от распределения размеров ячеек ω_{ij} по области Ω при фиксированном N . Поэтому при минимизации функционала $F(\varphi^*)$ необходимо использовать также параметры, регулирующие размеры ячеек ω_{ij} . Для управления размерами ячеек, например по координате x , введем параметры

$$\lambda_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}, \quad i=1, \dots, N-1, \quad 0 < \lambda_i < 1 \quad (1.11)$$

$$h_{i+1} = h_i \left(\frac{1}{\lambda_i} - 1 \right), \quad h_1 = (x_N - x_0) / \sum_{i=0}^{N-1} B_i$$

$$B_i = B_{i-1} \left(\frac{1}{\lambda_i} - 1 \right), \quad B_0 = 0, \quad i=1, \dots, N \quad (1.12)$$

Целесообразность введения этих параметров обусловлена фиксированной областью их изменения. Координаты x_0, x_N фиксированы. Аналогично вводятся параметры $0 < \Lambda_j < 1, j=1, \dots, N-1$, регулирующие размеры ячеек по координате y . Следует отметить, что число эффективно влияющих на функционал $F(\varphi^*)$ параметров $\{\lambda_i, \Lambda_j\}$ относительно невелико, так как невелико число зон с существенно различным поведением решения $\varphi(x, y)$ (значительно меньше, чем $2(N-1)$). Поэтому, предположительно зная число зон, можно варьировать лишь соответствующее число параметров. Значения остальных равны 0,5. Из (1.12) следует, что размеры ячеек могут различаться при необходимости весьма значительно.

Таким образом, минимизация функционала $F(\varphi^*)$ производится по параметрам $P = \{a_{21}^{11}, a_{22}^{11}, a_{23}^{11}, a_{31}^{11}, a_{32}^{11}, \lambda_\nu, \lambda_\mu\}$, число которых не зависит от N ; λ_ν, λ_μ — выборочные из всего множества $\{\lambda, \Lambda\}$ параметры с учетом предположительного числа качественно различных зон в решении.

Теперь, если воспользоваться методом штрафных функций и построить вспомогательный функционал в виде

$$J_1 = F_0(\varphi^*) (1 + \gamma (F(\varphi^*)/\epsilon)^2) \quad (1.13)$$

где ϵ — заданная точность невязки уравнения (1.1), γ — коэффициент штрафа, можно объединить процедуру решения задач (1.1), (1.2), (1.7) в единый вычислительный процесс и решение сводится к задаче конечномерной минимизации функционала J_1 по параметрам P и k . Минимизация функционала осуществляется методом случайного поиска.

2. В качестве применения изложенного метода рассматривалась следующая задача. Пусть задано множество тел вращения, составленных из полубесконечного цилиндра и носовой части, задаваемой следующим параметрическим семейством образующих:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0, \quad x \in [x_0, x_1], \quad f(x) = u(x, \alpha, \beta), \quad x \in (x_1, x_2] \\ f(x) &= 1, \quad x \in (x_2, x_N], \quad u(x, \alpha, \beta) = [1 - (z-1)^{2\alpha}]^\beta \\ z &= (x-x_1)/(x_2-x_1) \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $u(x, \alpha, \beta)$ — контур носовой части тела, x_1 — координата критической точки тела; x_2 — координата точки сопряжения контура носовой части с цилиндром; α, β — варьируемые параметры ($\alpha=1, 2, \dots$; $\beta > 2$).

В этом множестве нужно найти тело, которое при обтекании его дозвуковым потоком идеального газа под нулевым углом атаки имело бы минимальное сопротивление. Обтекание фиксированного контура сводится к решению следующей краевой задачи.

В прямоугольной области $\Omega = [x_0, x_N] \times [\psi_0, \psi_N]$ рассматривается задача

$$\begin{aligned} \Phi(r) &= \left(1 - \frac{M}{1+r_x^2}\right) r_{xx} - 2 \frac{r_x}{r_\psi} r_{x\psi} + \frac{1+r_x^2}{r_\psi^2} r_{\psi\psi} + \frac{1}{r} = 0 \\ r(x, \psi_0) &= u(x, \alpha, \beta); \quad x \in [x_0, x_N] \\ \frac{\partial r(x, \psi)}{\partial n} &= 0; \quad (x, \psi) \in \partial\Omega \setminus [x_0, x_N] \\ r(x_0, \psi) &= \sqrt{\frac{2\psi}{\rho_\infty w_\infty}}; \quad \psi \in [\psi_0, \psi_N] \end{aligned}$$

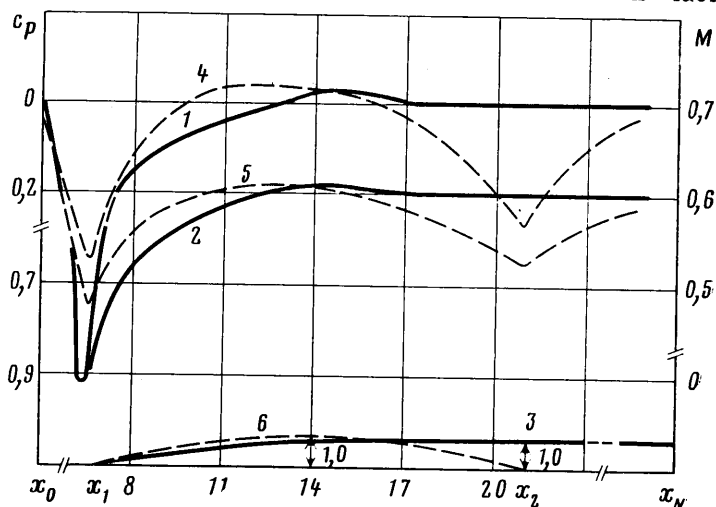
где $x \in [x_0, x_N]$ — продольная координата, $\psi \in [\psi_0, \psi_N]$ — функция тока, $r = r(x, \psi)$ — радиус линии тока, $w_\infty, \rho_\infty, M_\infty$ — параметры набегающего потока.

Функционалом F_0 оптимизационной задачи в данном случае является сопротивление носовой части тела вращения

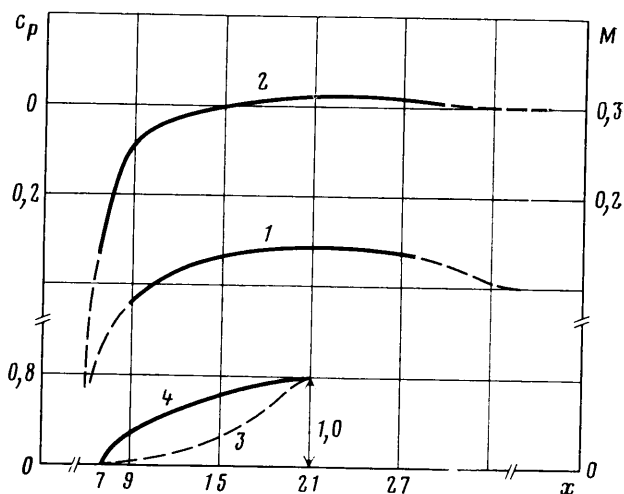
$$c_x = \int_{x_1}^{x_2} c_p r r_\psi dx, \quad c_p = \frac{2(p-p_\infty)}{\rho_\infty w_\infty^2}, \quad l_0 = x_2 - x_1 = \text{const}$$

где l_0 — длина носовой части, нормированная на радиус цилиндра, сопряженного с носовой частью тела, c_p — коэффициент давления.

Для проверки точности построения поля течения с помощью предлагаемого метода были проведены расчеты обтекания тел вращения с носовой частью, заданной в форме (2.1) при $\alpha=1$, $\beta=0,75$, $l_0=14$; хвостовая часть тела 1 — полубесконечный цилиндр; тело 2 — состоит из симметричных относительно плоскости миделя носовой и хвостовых частей. Были



Фиг. 1



Фиг. 2

приняты следующие значения параметров, задающих положение тела и границ расчетной области: $x_0=0$, $x_N=28$, $x_1=7$, $x_2=21$, $\psi_0=0$, $\psi_N=2$. В первом случае расчетная область была разбита на 10×10 ячеек, во втором — на 14×14 ячеек.

На фиг. 1 представлены расчетные эпюры коэффициентов давления c_p (кривые 1, 4), распределение числа Маха M (кривые 2, 5) и контуры тел (кривые 3, 6). Сплошные кривые относятся к телу 1 (индексы 1-3), штриховые — к телу 2 (индексы 4-6). Точками даны результаты работы [1] для тела 1. Число Маха набегающего потока $M_\infty=0,6$. Расчетный коэффициент сопротивления тела 2 $c_x=3,7 \cdot 10^{-7}$ также свидетельствует о хорошей точности согласования с теоретическим результатом.

Решение оптимизационной задачи проводилось при числе Маха набегающего потока $M_\infty=0,2$. Начальное значение параметров $\alpha=1$, $\beta=3$. Прочие входные параметры задачи соответствуют случаю обтекания тела 1. В процессе оптимизации получены оптимальные значения параметров, определяющих контур носовой части тела: $\alpha^*=6$, $\beta^*=6,6$; начальное и оптимальное значения сопротивления соответственно $c_x^0=0,047$ и $c_x^*=0,021$. На фиг. 2 показаны распределения числа Маха и коэффициента давления (индексы соответственно 1, 2) при $\psi=0$ для оптимального контура. Индексы 3, 4 соответствуют начальному и оптимальному контурам. В процессе расчета наблюдается сгущение сетки по координатам x и ψ в окрестности головной части тела.

Наличие при решении уравнения невязки, связанной с численным алгоритмом решения, можно трактовать как проявление своего рода «ап-проксимационной вязкости», что приводит к возрастанию энтропии и тем самым к потере работоспособности газа. Поэтому эффективной мерой точности расчета является величина

$$\delta = \max_{i,j} 2|\Delta S_{ij}| / (R\kappa_\infty M_\infty^2)$$

где δ — мера относительной необратимости как следствие наличия невязки уравнения при решении задачи обтекания, ΔS_{ij} — расчетная невязка энтропии в ячейке, R — газовая постоянная, $\kappa_\infty = c_p/c_v$. В приведенных расчетах эта величина не превосходит 10^{-4} .

ЛИТЕРАТУРА

1. Harris R. V., Landrum E. J. Drag characteristics of a series of low-drag bodies of revolution at mach numbers from 0.6 to 4.0.— NASA TN, 1965, № D-3163.

Новосибирск

Поступила в редакцию
11.XI.1983