

УДК 536.6.011

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВХОДА ПЛАСТИНЫ И ДИСКА В СЖИМАЕМУЮ ЖИДКОСТЬ

ТЕРЕНТЬЕВ А. Г., ЧЕЧНЕВ А. В.

Получены зависимости силы сопротивления от времени и числа Маха, распределение давления, форма свободной поверхности. Показано, что с течением времени сила сопротивления быстро приближается к асимптотическому значению, соответствующему обтеканию сжимаемой жидкостью по схеме Кирхгофа. Показано также, что с увеличением числа Маха размеры каверны уменьшаются, при этом нестационарная каверна всегда уже кирхгофовой.

Теоретическое исследование входа тупых тел в жидкость из-за нелинейности и нестационарности задачи представляет большие трудности. Аналитическое решение удается получить лишь в акустическом приближении [1–4]. Следует обратить внимание также на сложность проведения экспериментов [5–6]. К настоящему времени в механике сплошных сред разработан достаточно широкий круг численных методов решения задач с большими деформациями. Описание и анализ некоторых из них даны в [7, 8]. Как показали конкретные расчеты безотрывного обтекания тел газовым потоком, наиболее простым для реализации и достаточно надежным является метод крупных частиц [9]. К задачам со свободными границами этот метод был применен в [10].

В настоящей работе методом крупных частиц изучается погружение в сжимаемую жидкость пластины и диска, находящихся в начальный момент в контакте со свободной поверхностью. В отличие от [10] деформация свободной поверхности рассчитывается методом маркеров [8], который проще реализуется и обеспечивает гладкость границ. Вязкость и весомость среды не учитываются.

**1. Постановка задачи.** Пусть пластина шириной  $2l$  (диск радиуса  $l$ ) находится на поверхности неподвижной жидкости плотности  $\rho_0$  при давлении  $p_0$ . Скорость звука в невозмущенной среде обозначена через  $c_0$ . Начиная с момента времени  $t=0$  пластина (диск) погружается в жидкость с постоянной скоростью  $V$ . За пластиной (диск) образуется вентилируемая каверна, в которой поддерживается постоянное давление  $p_0$ .

Вычислительный алгоритм проще реализовать в декартовой (цилиндрической) системе координат, жестко связанной с пластиной (диск). Ось  $x$  параллельна пластине, ось  $y$  направлена в противоположную от жидкости сторону и совпадает с осью симметрии. Гидродинамическая задача сводится к решению следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u \mathbf{W}) + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v \mathbf{W}) + \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{W}) &= 0, \quad p = f(\rho) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $x, y$  — пространственные координаты;  $t$  — время;  $\mathbf{W} = (u, v)$  — вектор скорости;  $\rho$  — плотность;  $p$  — избыточное давление.

Уравнения (1.1) записаны в безразмерном виде, т. е. координаты отнесены к длине  $l$ , время — к  $l/c_0$ , вектор скорости — к  $c_0$ , плотность среды — к  $\rho_0$ , давление — к  $\rho_0 c_0^2$ .

К системе уравнений (1.1) необходимо добавить граничные условия: на свободной границе  $p=0$ , на оси симметрии  $u=0$ , на пластине (диске)  $v=0$ ; начальное условие:  $\rho=1$ ,  $p=0$ ,  $u=0$ ,  $v=M$  ( $M=V/c_0$  — число Маха). Кроме того, необходимо задать начальное условие для давления на пластине  $p'$ . Оно может быть найдено из решения одномерной задачи о поршне при заданной зависимости  $p=f(\rho)$ .

В частности, для воды [11]

$$p = \frac{1}{m}(\rho^m - 1), \quad m=7$$

$$p' = M\sqrt{1+4M^2} + 2M^2 \quad (1.2)$$

**2. Алгоритм расчета.** Некоторая замкнутая область (здесь — прямоугольник) на плоскости  $(x, y)$ , содержащая внутри ось симметрии, пластину (диск) и свободную границу, разбивается на прямоугольные ячейки. Последние могут быть трех типов: пустые (свободные от жидкости), внутренние (полностью заполненные жидкостью) и граничные (частично заполненные), которым ставятся в соответствие числа 0, 1 и 2. В процессе движения жидкости из-за перемещения свободной границы типы ячеек могут меняться, поэтому на каждом шаге по времени производится перекодировка ячеек.

Положение свободной границы определяется путем слежения за маркерами (пронумерованными точками на границе). Скорость маркера находится с помощью линейной интерполяции (или экстраполяции) по значениям скорости в центрах четырех соседних ячеек [12].

Во внутренних и граничных ячейках все гидродинамические параметры определяются по методу крупных частиц [9]. Для улучшения устойчивости расчета и получения гладких решений в уравнения (1.1) вводится линейная искусственная вязкость аналогично [13].

Как известно, в методе крупных частиц скачок уплотнения распределяется примерно на три — четыре ячейки. При заданном ступенчатом начальном распределении давления вначале наблюдаются сильные осцилляции по времени гидродинамических параметров в центрах ячеек, прилегающих к пластине (дису). Для устранения осцилляций в начальный момент скачок давления (1.2) распределяется линейно на четырех ближайших к пластине (дису) слоях. Аналогично задается начальное изменение плотности и осевой составляющей скорости. Во всех остальных ячейках давление и плотность предполагаются равными 0 и 1 соответственно.

Полный цикл расчета на временном интервале  $(t^n, t^n + \Delta t)$  заключается в следующем: 1) вычисление предварительного значения скорости в центре ячейки  $(i, j)$ ; 2) нахождение массы и импульса жидкости в ячейке на основе законов сохранения; 3) вычисление окончательных значений параметров потока для нового момента времени; 4) определение скоростей и новых координат маркеров; 5) перекодировка ячеек, т. е. присвоение кодов 0, 1, 2 в соответствии с типами ячеек

$$W_{ij}' = W_{ij}^n - \Delta t (\text{grad } p)_{ij}^n / \rho_{ij}^n$$

$$M_{ij}^{n+1} = M_{ij}^n + \Delta M_b^n$$

$$P_{ij}^{n+1} = M_{ij}^n W_{ij}' + \Delta P_b^n \quad (2.1)$$

$$\rho_{ij}^{n+1} = M_{ij}^{n+1} / S_{ij}, \quad W_{ij}^{n+1} = P_{ij}^{n+1} / M_{ij}^{n+1}, \quad p_{ij}^{n+1} = f(\rho_{ij}^{n+1})$$

$$r_k^{n+1} = r_k^n + W_k^n \Delta t$$

Здесь  $\Delta W_b^n$ ,  $\Delta P_b^n$  — соответственно потоки массы и импульса через границу ячейки  $(i, j)$ ;  $S_{ij}$  — площадь (объем) ячейки;  $k$  — номер маркера;  $W_k$ ,  $r_k^n$  — соответственно скорость и вектор перемещения  $k$ -го маркера.

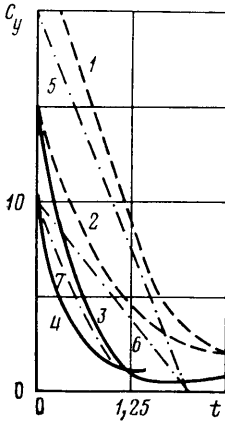
Потоки массы и импульса в (2.1) определяются по формулам первого порядка точности с учетом знака скорости [7].

**3. Численные расчеты.** Вычисления проводились на сетке с ячейками размеров  $\Delta x = \Delta y = 0,05$ . Шаг по времени выбирался из условия Куранта

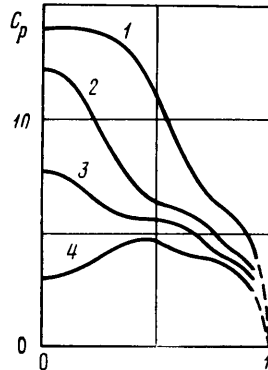
$$\Delta t = \mu \min \left\{ \frac{\Delta x}{\max_{i,j} (|u_{ij}^n| + c_{ij}^n)}, \frac{\Delta y}{\max_{i,j} (|v_{ij}^n| + c_{ij}^n)} \right\}$$

где  $c_{ij}^n$  — скорость звука в ячейке  $(i, j)$  для момента времени  $t^n$ . Число Куранта  $\mu$  принималось равным 0,4. Были просчитаны также примеры с меньшим значением  $\mu$ . Результаты при этом практически не изменились.

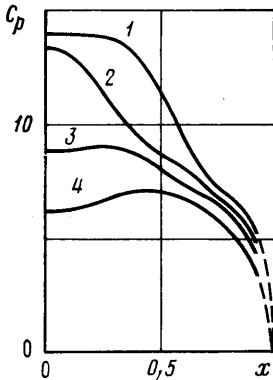
Результаты расчетов представлены на фиг. 1—4. На фиг. 1 показана зависимость коэффициента результирующей силы пластины  $C_y = Y/\rho_0 V^2 l$  (для диска  $C_y = 2\dot{Y}/\rho_0 V^2 \pi l^2$ ) от безразмерного времени. Штриховые ли-



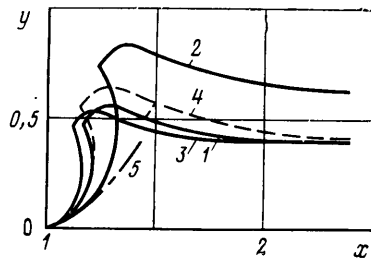
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

нии 1 и 2 соответствуют пластине при  $M=0,1; 0,2$ ; сплошные линии 3 и 4 — диску при  $M=0,2; 0,4$ . Штрихпунктирные линии 5, 6 (для пластины при  $M=0,1; 0,2$ ) и 7 (для диска при  $M=0,2$ ) заимствованы из [11] и отвечают линейной теории. При  $t=0$  как для пластины, так и для диска в соответствии с формулой (2)  $C_y = 4 + 2\sqrt{1 + 4M^2}/M$  (в рамках линейной теории  $C_y = 2/M$ ). В работе [5] была получена эмпирическая формула  $C_y^{\max} = 1,87 + 2,13/M$ . Различия между расчетными данными и экспериментом объясняются тем, что в реальных опытах между диском и поверхностью жидкости образуется воздушная прослойка, которая несколько понижает максимальную нагрузку.

Из фиг. 1 видно, что с течением времени кривые быстро (особенно для диска) выходят на асимптоты, отвечающие обтеканию сжимаемой жидкостью по схеме Кирхгофа. Ранее в работе [6] экспериментально было показано, что коэффициент сопротивления диска при входе в воду не зависит от глубины погружения. Этот факт не противоречит расчетам, поскольку измерения в [6] проводились при  $t > 30$ .

На фиг. 2 и 3 для  $M=0,2$  и различных моментов времени показано распределение давления  $c_p=2p/M^2$  вдоль радиуса диска (фиг. 2) и вдоль пластины (фиг. 3).

Кривые 1–4 на фиг. 2 отвечают моментам времени  $t=0,35; 0,55; 0,65; 0,75$ ; на фиг. 3 —  $t=0,35; 0,55; 0,75; 0,95$ . Из графиков видно, что от кромок диска и пластины распространяется разгрузка, затем в центре диска давление понижается и при малых числах Маха теоретически может принимать отрицательное значение. Это свидетельствует о том, что при ударном погружении в воду при малых значениях числа Маха в центре пластины и диска может образоваться каверна. Возможность образования каверны в жидкости была показана при исследовании удара капли по твердой поверхности в [14].

На фиг. 4 показана конфигурация каверны и свободной границы. Кривые 1 и 2 отвечают погружению диска при  $M=0,2$  на глубину  $h/l=0,4$  и 0,6 соответственно. Кривая 3 рассчитана для  $M=h/l=0,4$ . Штриховая линия 4 соответствует пластине при  $M=0,2$ ,  $h/l=0,4$ . Там же штрихпунктирной линией 5 обозначена граница стационарной кирхгофсовской каверны за пластиной в безграничной несжимаемой жидкости.

Общим для всех кривых является то, что каверны по сечениям уже стационарной каверны. Это противоречит выводам работы [6]. Указанное несоответствие может быть объяснено, по-видимому, тем, что здесь рассматривается равномерное погружение, в то время как в [6] наблюдения велись за свободно падающими и, следовательно, двигающимися с отрицательным ускорением телами. Сравнение кривых 1 и 3 показывает, что с увеличением числа Маха размеры каверны уменьшаются.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л. А. Удар по твердому телу, находящемуся на поверхности сжимаемой жидкости.— ПММ, 1947, т. 11, вып. 5, с. 547–550.
2. Егоров И. Т. Удар о сжимаемую жидкость.— ПММ, 1956, т. 20, вып. 1, с. 67–72.
3. Поручиков В. Б. Удар диска по поверхности идеальной сжимаемой жидкости.— ПММ, 1964, т. 28, вып. 4, с. 797–800.
4. Афанасьев Е. Ф. Удар тела о тонкую пластину, лежащую на поверхности сжимаемой жидкости.— ПММ, 1964, т. 28, вып. 5, с. 868–879.
5. Ерошин В. А., Романенков Н. И., Серебряков И. В., Якимов Ю. Л. Гидродинамические силы при ударе тупых тел о поверхность сжимаемой жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 6, с. 44–51.
6. Логвинович Г. В. Начальное движение тела в жидкости с развитой кавитацией. Сб. работ по гидродинамике. М.: ЦАГИ, 1959, с. 3–40.
7. Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М. Метод крупных частиц в газовой динамике. М.: Наука, 1982. 391 с.
8. Яненко Н. Н., Анучина Н. Н., Петренко В. Е., Шокин Ю. И. О методах расчета задач газовой динамики с большими деформациями.— В кн.: Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1970, т. 1, № 1, с. 40–62.
9. Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М. Нестационарный метод «крупных частиц» для газодинамических расчетов.— Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 1971, т. 11, № 1, с. 182–207.
10. Гриднева В. А., Кулешов В. Р., Шахтмейстер Л. И. Решение задачи об ударе со свободными и контактными границами методом «крупных частиц». Томск. ун-т, Томск, 1979. 13 с. Рукопись деп. в ВИНТИ 26.02.79, № 722-79 Деп.
11. Сагомоян А. Я. Проникание. М.: Изд-во МГУ, 1974. 299 с.
12. Ивандаев А. И. Об одном способе введения «псевдовязкости» и его применении к уточнению разностных решений уравнений гидродинамики.— Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 1975, т. 15, № 2, с. 523–527.
13. Анучина Н. Н. О методах расчета течений сжимаемой жидкости с большими деформациями.— В кн.: Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1970, т. 1, № 4, с. 3–84.
14. Гонор А. Л., Яковлев В. Я. Удар капли по твердой поверхности.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 5, с. 151–155.

Чебоксары

Поступила в редакцию  
5.1.1984