МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 1985

УДК 532.5

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СВЕРХЗВУКОВЫХ ПОТОКОВ ГАЗА В ЛИНЕЙНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

КОЛЫХАЛОВ П. И.

Важным результатом линейной теории гидродинамической устойчивости плоскопараллельных потоков невязкой жидкости является теорема, согласно которой необходимым условием неустойчивости является наличие точки перегиба у профиля скорости потока [1]. Для сжимаемого газа, т. е. тогда, когда изменение скорости потока сравнимо со скоростью звука a, эта теорема несправедлива. Другое важное свойство газовых потоков – наличие в них собственных колебаний – звуковых волн, не существующих в рамках гидродинамики. Эти два обстоятельства позволяют предположить, что некоторые течения, устойчивые в линейном приближении при малых числах Маха ($M=u/a\to 0$), будут неустойчивы при $M\gtrsim 1$, а эта неустойчивость связана с особенностями распространения звуковых волн в потоках, движущихся с переменной ($V_y=u(x)$) скоростью.

В данной работе доказана линейная неустойчивость некоторых течений, заведомо устойчивых в случае несжимаемой невязкой жидкости. Время нарастания неустойчивости пропорционально времени, за которое звуковые возмущения проходят расстояние порядка характерного масштаба в потоке. Показано также, что неустойчивые возмущения – действительно звуковые волны в движущемся потоке.

Физическая причина неустойчивости состоит в следующем: пусть звуковая волна $\delta P \propto \exp(ik(y-ct))$ распространяется в потоке с переменной скоростью, такой, что существует критическая точка x_c (для простоты – единственная), в которой фазовая скорость волны совпадает со скоростью потока $u(x_c)=c$. Если при $x>x_c$ существует только убегающая звуковая волна (групповая скорость $w_x>0$), то при $x<x_c$ должны существовать две волны: одна с положительной групповой скоростью, другая – с отрицательной, т. е. слой, содержащий точку x_c, отражает набегающую на него звуковую волну. Нетривиально то, что амплитуда отраженной волны больше амплитуды набегающей волны – при отражении волна усиливается. Если на некотором расстоянии L от критического слоя находится твердая стенка, то звуковая волна, последовательно отражаясь от стенки и от критического слоя, будет экспоненциально набирать энергию с характерным временем $\sim L/a$. Похожую ситуацию описал Я. Б. Зельдович [2], отмечая, что если каким-либо образом доказано усиление волн (любой природы) при отражении от объекта, то, окружив этот объект отражающей оболочкой, можно получить неустойчивую систему.

Результаты данной работы напоминают результаты работ [3, 4]. Рибнер [3] показал, что звуковые волны могут отражаться от тангенциального разрыва с усилением. Колыхалов [4] рассмотрел устойчивость тангенциального разрыва в газе, движущемся вблизи твердой стенки, и показал, что двумерные возмущения, устойчивые в случае отсутствия стенки [5], неустойчивы с характерным временем $\sim L/a$. В этой же работе отмечалось, что такой механизм может привести к неустойчивости (при $M\gtrsim 1$) потоков, устойчивых в рамках гидродинамики.

1. Основное уравнение. Рассмотрим плоскопараллельный поток газа, движущийся вдоль оси Y со скоростью $V_y=u(x)$, зависящей только от координаты X. Будем считать, что в невозмущенном потоке $V_x=0$, $V_z=0$, а давление, плотность и скорость звука ρ_0, P_0, a постоянны. Запишем возмущения в виде

$$\delta V_x=v_x(x)e^{is},\ \delta V_y=v_y(x)e^{is}$$

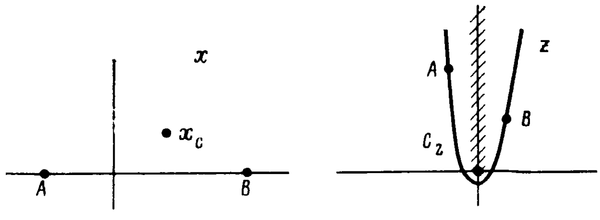
$$\delta V_z=v_z(x)e^{is},\ \delta P=p(x)e^{is},\ \delta\rho=\rho(x)e^{is}$$

Здесь $s=ky+k_zz-kct$ и $c=c_R+ic_i$ – фазовая скорость возмущения.

Ограничившись адиабатическими (или баротропными) возмущениями ($\delta P=a^2\delta\rho$), запишем линеаризованное уравнение для возмущения давления [6]

$$\frac{d^2p}{dx^2}-\frac{2u'}{u-c}\frac{dp}{dx}+k^2\left[\left(\frac{u-c}{a}\right)^2-1-\frac{k_z^2}{k^2}\right]p=0 \qquad (1.1)$$

Уравнение (1.1) и граничные условия (условия непротекания на твердых стенках $v_x \sim k^{-1}(u-c)^{-1}dp/dx$ или условия затухания возмущений в неограниченных областях p, $v\to 0$ при $x\to\infty$) образуют краевую задачу, определяющую собственные функции $p(x, c)$ и собственные значения $c=$ $=c_R+ic_i$, вообще говоря, комплексные. Если мнимая часть фазовой скорости положительна $c_i>0$, то возмущения растут со временем $\sim\exp(kc_it)$



Фиг. 1

и инкремент неустойчивости равен $q=kc_i$. Легко показать [4], что если $\mathrm{Im}\,(c)\neq 0$, то $\min u(x)<\mathrm{Re}\,(c)<\max u(x)$. Исходя из того, что для растущих мод не возникает трудностей, связанных с тем, что рассматриваются возмущения в пределе исчезающе малой вязкости [1], будем рассматривать только растущие возмущения с $c_i>0$. Отметим, что если $u(x)$ — аналитическая функция, то (1.1) можно исследовать в комплексной плоскости X. В некоторых точках плоскости X, где $u(x_c)=c$, уравнение (1.1) имеет особые точки. В дальнейшем будем определять x так, что $|\arg x|<\pi$.

Предположим, что в достаточно большой окрестности точки x_c градиент скорости постоянен и не равен нулю, т. е. $u=u_0+u'x$. Обозначим $\varkappa^2=1+$ $+k_z^2/k^2$, $x_c=(c-u_0)/u'$, $x_a=a/u'$ и запишем (1.1) в виде

$$p''-\frac{2}{x-x_c}p'+k^2\left[\left(\frac{x-x_c}{x_a}\right)^2-\varkappa^2\right]p=0 \qquad (1.2)$$

Преобразование $p=z^{3/4}e^{-z/2}y(z)$, $z=ik(x-x_c)^2/x_a$ сводит (1.2) к вырожденному гипергеометрическому уравнению. Такое преобразование переводит критическую точку x_c в начало координат, а прямую $\mathrm{Im}\,(x)=0$ (на которой определены уравнения) — в контур C_z комплексной плоскости Z с разрезом по оси $[0, \infty]$ (фиг. 1). Определение аргумента z зависит от положения критической точки x_c в плоскости X. Будем считать, что $u'>0$, тогда $\mathrm{Im}\,(x_c)>0$ и $-3\pi/2<\arg z<\pi/2$. Обозначим $\gamma={}^5/_2$, $\alpha={}^5/_4-i\beta$, $\beta=\varkappa^2kx_a/4$ и запишем общее решение (1.2), используя вырожденную гипергеометрическую функцию первого рода

$$p(z)=z^{3/4}e^{-z/2}\{C_1M(\alpha, \gamma, z)+C_2z^{1-\gamma}M(\alpha-\gamma+1, 2-\gamma, z)\} \qquad (1.3)$$

Если $|z|\gg 1$ $k|x-x_c|^2\gg x_a$, то можно воспользоваться асимптотическим разложением [8]

$$M(\alpha,\gamma,z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}(-z)^{-\alpha}+\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}e^zz^{\alpha-\gamma}$$

Здесь $\Gamma(t)$ — гамма-функция, $|\arg(\pm z)|<\pi$. В этом случае удобно переопределить $z\to z^\circ$ так, что z° будет отличаться от z только областью определения аргумента $|\arg z^\circ|<\pi$. Для того чтобы функция $p^\circ(z^\circ)$ совпадала с $p(z)$, на контуре C_z введем функцию $\theta(z^\circ)$, такую, что $\theta=1$ в I, III, IV четвертях плоскости Z и $\theta=-1$ во II четверти ($\mathrm{Im}\,(z)>0$, $\mathrm{Re}\,(z)<0$).

Тогда асимптотики $p(z)$ имеют вид

$$p\approx\left\{\theta C_1\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}+\frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}\right\}(z^\circ)^{1/4-i\beta}\exp\left(\frac{z^\circ}{2}\right)+$$
$$+\left\{\theta C_1\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}e^{i\pi\alpha}+C_2\frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(1-\gamma)}e^{i\pi(\alpha-\gamma+1)}\right\}(z^\circ)^{1/4+i\beta}\exp\left(-\frac{z^\circ}{2}\right) \tag{1.4}$$

Пользуясь формулой дифференцирования $M(\alpha, \gamma, z)$, легко доказать, что при параметрах $\alpha={}^5/_4-i\beta$, $\gamma={}^5/_2$ асимптотическое выражение для dp/dz можно получить дифференцированием (1.4), отбрасывая малые (по степеням $1/z$) члены. Следовательно, асимптотика dp/dz отличается от (1.4) только коэффициентом $+{}^1/_2$ перед первой скобкой и $-{}^1/_2$ перед второй скобкой.

2. Устойчивость течений с постоянным градиентом скорости. Рассмотрим поток газа с постоянным градиентом скорости $u=u'x$, движущегося между двумя твердыми стенками, расположенными в точках $x_{2,1}=\pm L$. Хорошо известно, что в пределе несжимаемой жидкости течение Куэтта устойчиво в линейном приближении [9]. Используя (1.3), формулу для dM/dz и условия $dp(\pm L)/dx=0$, легко получить дисперсионное соотношение для нахождения x_c: $F(z_1, z_2, \beta)=0$, где $z_{1,2}=ik(\mp L-x_c)^2/x_a$. Учитывая симметрию задачи относительно замены $x\to-x$, разумно предположить отсутствие бегущих по оси Y возмущений, т. е. $c_R=0$, $x_c=ix_i$, $z_1^*=-z_2$. В этом случае $\operatorname{Re}(z_2)=2kLx_i/x_a=2qL/a\equiv2q_0$. Уравнение $F(z_1, z_2, \beta)=0$ нетрудно решить численно, но для прояснения характера неустойчивости достаточно воспользоваться асимптотическим разложением p и dp/dz. Предполагая, что $x_i\ll L$, т. е. $q_0\ll kLu(L)/a=kLM$, а величина $\beta=kx_a\varkappa^2/4=$ $=\varkappa^2kL/M$ не слишком велика, получим уравнение для $q_0=q(a/L)^{-1}$

$$\operatorname{ch}(2q_0)=-\sqrt{1+e^{-4\pi\beta}}\sin(\psi(kL)-\psi_1) \tag{2.1}$$

$$\psi(kL)\cong\operatorname{Im}z_{1,2}\approx\frac{kL^2}{x_a}=kLM\gg1;\qquad \psi_1=\arg\left[\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+\alpha-\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\right]$$

Легко видеть, что (2.1) имеет действительные положительные решения, если $(2m-1)\pi<\psi-\psi_1<2m\pi$, где m — целое, достаточно большое число, так как рассматривается случай $\psi\gg1$. Максимум инкремента равен

$$q_m=\frac{a}{2L}\operatorname{arch}[\sqrt{1+\exp(-4\pi\beta)}]=\frac{a}{2L}\operatorname{arch}[\sqrt{1+\exp(-\pi\varkappa^2kx_a)}] \tag{2.2}$$

Значение q_m очень быстро падает при $kx_a\geqslant1$, что отражает исчезновение неустойчивости в дозвуковом пределе, когда изменение скорости на масштабе порядка длины волны возмущения $\lambda=2\pi/k$ меньше скорости звука. Так, если в пределе больших длин волн $q_m\to0{,}44a/L$ ($\varkappa=1$), а при $\lambda u'/a=10$ имеем $q_m=0{,}18a/L$, то при $\lambda u'/a=4$ получим всего лишь $q_m=$ $=4{,}2\cdot10^{-2}$ a/L. Условие $\pi\beta\leqslant1$ носит физический характер, не связано с предположением $|z|\gg1$ и должно выполняться для всех решений дисперсионного соотношения. Отметим, что двумерные возмущения обладают большим инкрементом по сравнению с трехмерными.

Рассмотрим теперь случай, когда стенка находится в точке $x=0$, а другая расположена достаточно далеко, в пределе на бесконечности, и решение должно затухать при $x\to\infty$. Существование такого решения — факт в некотором смысле удивительный, поскольку на бесконечности имеется физически бессмысленная особенность $u\to\infty$. Однако легко понять, что характер течения на достаточном удалении от стенки вообще не влияет на устойчивость течения вблизи стенки. Этот факт отражает конечность скорости распространения информации (возмущений) в газовой среде.

Если в (1.3) выбрать $C_1=\Gamma(1-\gamma)/\Gamma(\alpha-\gamma+1)$ и $C_2=\Gamma(\gamma-1)/\Gamma(\alpha)$, то решение (1.3) выражается через вырожденную гипергеометрическую функцию второго рода $p=z^{1/2}e^{-z/2}U(\alpha, \gamma, z)$. В I четверти комплексной плоскости асимптотическое представление $U(\alpha, \gamma, z)$ при $z\to\infty$ есть $z^{-\alpha}$ и на достаточном удалении от стенки $p\infty\exp\{-k(x-x_R)x_i/x_a\}$ экспоненциально затухает ($u'>0$, $x_i>0$). Функция $U(\alpha, \gamma, z)$ имеет точку ветвления $z=0$ и ее аналитическое продолжение во II четверть ($-3\pi/2<\arg z<\pi/2$) по контуру C_z есть [7]

$$U(\alpha,\gamma,ze^{-2\pi i})=(1-e^{2\pi i\gamma})\frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}M(\alpha,\gamma,z)+e^{2\pi i\gamma}U(\alpha,\gamma,z) \qquad (2.3)$$

Условие $dp(x=0)/dx=0$ дает дисперсионное уравнение $F(z_0, \beta)=0$, $z_0=i(-x_c)^2/x_a$ для определения $x_c=x_R+ix_i$. Прежде всего воспользуемся асимптотическим разложением функции M при $|z|\gg1$ и, предполагая, как и ранее, $x_i\ll L$, $\beta\pi\leqslant1$, получим уравнение для определения x_R и x_i

$$\exp\left(2kx_i\frac{x_R}{x_a}\right)=\sqrt{1+e^{-4\pi\beta}}\exp(i\psi+i\psi_2) \qquad (2.4)$$

$$\psi\approx\operatorname{Im} z_0\gg1;\quad \psi_2\sim1$$

Комплексное уравнение (2.4) содержит два уравнения: для действительной и мнимой части. Легко видеть, что поскольку в левой части (2.4) стоит действительная и положительная величина, то (2.4) справедливо только для таких x_R, когда $\psi+\psi_2=2m\pi$ (m — большое целое число). В этом случае время развития неустойчивости пропорционально времени пробега звуковой волны от стенки до критического слоя с $x=x_R$

$$q=\frac{1}{2}\frac{a}{x_R}\ln\sqrt{1+\exp(-4\pi\beta)} \qquad (2.5)$$

В пределе длинных волн $kx_a\ll1$ (но $k\gg x_a/x_R^2$) значение $q_0=qx_R/a=0{,}17$ максимально; в случае $\lambda u'/a=10$ получим $q_0=3{,}3\cdot10^{-2}$, а в случае $\lambda u'/a=4$ инкремент очень мал: $q_0=1{,}8\cdot10^{-3}$. Тот факт, что значение q_0 в этой задаче меньше, чем для течения Куэтта между двумя пластинами, связан в основном с затратой энергии не только на развитие неустойчивости между стенкой и критическим слоем, но и на рост возмущений при $x>x_R$. Легко видеть, что при $x\gg x_R$ имеем $\delta P\infty\exp\{q(t-x/a)\}$, т. е. масштаб затухания возмущений ($t=\mathrm{const}$, $x\to\infty$) равен $x_q=x_R/q_0$.

Соотношения, полученные в случае задачи Куэтта, позволяют достаточно точно ответить на вопрос о максимальном значении инкремента ($q\approx\approx a/L$). Однако в случае решения (2.5) ответ $q\approx a/x_R$ не дает сколько-нибудь конкретного числа, так как минимальное x_R неизвестно. Поскольку в области $kx_R\sim1$, $kx_a\sim1$ использование асимптотических выражений для p и dp/dz неоправданно, то дисперсионное соотношение $F(z_0, \beta)=0$ было исследовано численно. Результаты вычислений (в случае $\varkappa=1$) приведены ниже:

$kx_a=1{,}00$	0,50	0,20	0,10	0,05
$kx_R=2{,}25$	1,56	0,98	0,63	0,49
$M=x_R/x_a=2{,}25$	3,12	4,9	6.9	9,8
$q_0=0{,}01$	0.05	0,11	0,14	0,15

Полученные значения kx_R и kx_i проверены непосредственно численным интегрированием уравнения (1.2) с условием $dp/dx=0$ при $x=0$. Во всех случаях численное решение при $x\gg x_R$ совпадало с аналитическим решением (1.3) и экспоненциально спадало при достаточно больших x.

3. Усиление звуковых волн при отражении от критического слоя. Запишем решение (1.1) в виде $p=\exp\{ik\int Sdx\}$. Для функции $S(x)$ получим уравнение, которое будем решать методом последовательных приближений. Полученное асимптотическое решение (ВКБ-приближение) имеет вид

$$p=\sqrt{\frac{(u-c)^2}{\pm S}}\exp\left(\pm ik\int S(x)\,dx\right);\quad S=\sqrt{\left(\frac{u-c}{a}\right)^2-\varkappa^2} \tag{3.1}$$

$$\left|\frac{1}{k}\frac{d}{dx}\left(\ln\frac{S}{(u-c)^2}\right)\right|\ll|S| \tag{3.2}$$

Условие (3.2) применимости приближения ВКБ справедливо тогда, когда x достаточно далеко от точек поворота ($S=0$) и от критических точек ($u-c=0$). Для однозначности будем считать, что значение корня в выражении для S выбрано так, что $\operatorname{Im} S>0$. В случае $|u-c|\gg\varkappa a$ (3.1) имеет вид

$$p=\sqrt{u-c}\exp\left(\pm ik\int S^\circ\,dx\right);\quad S^\circ=-\left[\frac{u-c}{a}-\frac{1}{2}\frac{\varkappa^2 a}{u-c}\right] \tag{3.3}$$

Знак в S° определяется тем, что рассматривается только случай, когда $\operatorname{Im} c>0$. Нейтральные возмущения (не растущие и не убывающие во времени) следует рассматривать как предел растущих возмущений [1] $c=c_R+ic_i$, $c_i\to+0$. В случае $u=\mathrm{const}\neq c$ решение (3.1) описывает монохроматические волны. Тогда, записав дисперсионное уравнение $F(k_x, k_y, k_z, \omega)=0$, можно получить групповые скорости волн

$$w_x=\mp\frac{\sqrt{(u-c)^2/a^2-\varkappa^2}}{(u-c)/a}a;\quad w_y=u-\frac{a^2}{u-c};\quad w_z=-\frac{k_z}{k}\frac{a^2}{u-c}$$

Групповая скорость имеет смысл и в случае скорости $u(x)$, зависящей от x. Запишем возмущение давления в виде

$$\delta P=A(x)\exp(i\Phi_\pm)$$

$$\Phi_\pm=\pm k\int^x S\,dx+ky+k_z z-kct$$

Здесь $A(x)$ — медленно меняющийся амплитудный множитель. Рассматривая $\Phi_\pm(t, x, y, z, k, k_z, c)$ как действие (решение уравнения Гамильтона — Якоби) [10], для квазичастиц — волновых пакетов — получим те же выражения для групповой скорости волн $\mathbf{w}=(w_x, w_y, w_z)$. Естественно, что в каждой точке x в системе отсчета, движущейся со скоростью $u(x)$, скорость распространения возмущений равна скорости звука: $|\mathbf{w}-\mathbf{V}_0|=a$.

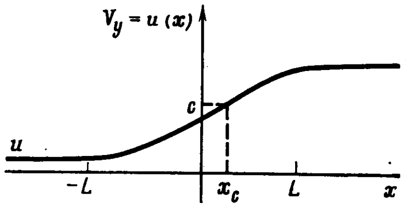
Предположим теперь, что $|u-c|\gg\varkappa a$, тогда $w_x\approx\pm a$; следовательно, верхний знак плюс в (3.1), (3.3) соответствует возмущениям, бегущим к $+\infty$, а нижний знак минус — возмущениям, бегущим к $-\infty$. Существенно, что нейтральные возмущения с $w_x>0$ являются пределом ($c_i\to+0$) возмущений, растущих во времени и затухающих при $x\to+\infty$: $\delta P\infty\exp\{kc_i(t-x/a)\}$, а возмущения с $w_x<0$ — предел возмущений, затухающих при $x\to-\infty$: $\delta P\infty\exp(kc_i(t+x/a))$, т. е. возмущение переносится из области большой амплитуды в область малой амплитуды.

Рассмотрим течение со скоростью $u(x)$, монотонно меняющейся при $-L<x<L$ от значения $u_-=u(x<-L)$ до $u_+=u(x>L)$ (фиг. 2). Пусть критическая точка $x_c(u(x_c)=c_R+i0)$ принадлежит интервалу $(-L, L)$ и $|u_\pm-c|\gg\varkappa a$. На достаточно большом удалении от x_c решение (1.1) асимптотически представимо в виде звуковых возмущений (3.1), а при $|x|>L$ это точное решение. Решение ВКБ нельзя продолжить аналитически в комплексной плоскости X от $x<x_c$ до $x>x_c$ [11, 12]. Поэтому в окрестности точки x_c необходимо построить решение, асимптотически выходящее на

$$p_1=\sqrt{u-c}\left\{A_1\exp\left(+ik\int^x S^\circ\,dx\right)+A_2\exp\left(-ik\int^x S^\circ\,dx\right)\right\},\quad x<x_c \quad (3.4)$$

$$p_2=\sqrt{u-c}\left\{A_3\exp\left(+ik\int^x S^\circ\,dx\right)+A_4\exp\left(-ik\int^x S^\circ\,dx\right)\right\},\quad x>x_c \quad (3.5)$$

Если при $x>L$ имеем только уходящую ($w_x>0$) волну ($A_4=0$), то продолжение решения через точку x_c в область $x<-L$ даст нам связь коэффициентов $A_3=f_3(A_1)$, $A_2=f_2(A_1)$, а величина $R=|A_2/A_1|^2$ есть коэффициент усиления амплитуды волны при отражении от критического слоя.



Фиг. 2

В достаточно малой окрестности критической точки $x_c=x_R+i0$ скорость потока аппроксимируется линейной функцией $u(x)=c+u'(x-x_c)$ и (1.3) аппроксимирует решение уравнения (1.1) (так называемое внутреннее разложение). С другой стороны, при достаточно больших $|x-x_c|$ решение (1.1) представимо в виде (3.1) (внешнее разложение). Легко убедиться, что если $x_a|u''|\infty\infty x_a\Delta u/L^2\ll u'$ (т. е. $L/x_a\infty\Delta u/a=M\gg 1$), то для достаточно больших значений k области применимости решения (3.1) и асимптотик (1.4) ($k|x-x_c|^2\gg x_a$) перекрываются. В этом случае можно установить правило перехода

$$\sqrt{u-c}\exp\left(\pm ik\int^x S^\circ\right)\rightleftarrows C_\pm z^{1/4\pm i\beta}\exp\left(\mp\frac{z}{2}\right)$$

Предположим, что в области $x>L$ звуковая волна бежит вправо (фиг. 2) $w_x>0$. Рассматривая волну как предел растущего во времени и убывающего при $x\to+\infty$ возмущения, устанавливаем, что в области $x>x_c$ (но там, где градиент еще можно считать постоянным) волна описывается решением $p=z^{1/4}e^{-z/2}U(\alpha,\gamma,z)$, а в области $x<x_c$ набегающая и отраженная волны описываются с помощью аналитического продолжения (2.3). Пользуясь асимптотическим разложением при $|z|\gg 1$ и сшивая с ВКБ-решением, можно получить коэффициент отражения волны от критического слоя

$$F=|A_2/A_1|^2=1+\exp(-4\pi\beta)=1+\exp(-\pi\varkappa^2 kx_a)$$

В заключение отметим, что, используя технику внешних и внутренних разложений [13], результаты п. 2 легко обобщить на широкий класс течений. Внутреннее разложение (1.3) применимо тогда, когда расстояние до критической точки много меньше масштаба изменения градиента скорости $|x-x_c|\ll L\sim|u'/u''|$. Асимптотическое разложение этого решения (внешний предел) справедливо, если $k|x-x_c|^2\gg x_a$. Внешнее разложение (3.1) справедливо на достаточном удалении от x, но если $k\gg x_a/|x-x_c|^2$, то области применимости (1.3) и (3.1) перекрываются. При условии $|x-x_c|\gg\varkappa x_a$ внутренний предел внешнего разложения (3.3) совпадает с внешним пределом внутреннего разложения (1.4), т. е. разложения сращиваются [13]. Из двух условий, позволяющих срастить приближенные решения (*1* — $kL^2/x_a\sim kLM\gg 1$, *2* — $L/x_a\sim M\gg 1$), первое имеет только математическое значение и может быть отброшено, если известно решение уравнения (1.1). Второе условие, означающее, что рассматривается сверхзвуковое течение, может быть только ослаблено ($M\geqslant 1$), но не отброшено совсем. К этим ограничителям, по-видимому, следует добавить еще одно: $ka/u'\sim L/\lambda M\leqslant 1$. Это условие проявилось при исследовании аналитических выражений для инкремента неустойчивости и утверждает, что если на масштабе порядка λ изменения скорости малы по сравнению с a, то неустойчивость экспоненциально мала. Отметим, что при $M \gg 1$ можно срастить возмущения с большой длиной волны $\lambda \gtrsim L$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Линь Ц. Ц.* Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 196 с.
2. *Зельдович Я. Б.* Усиление цилиндрических электромагнитных волн при отражении от вращающегося тела.– ЖЭТФ, 1972, т. 62, № 6, с. 2076–2081.
3. *Ribner H. S.* Reflection, transmission and amplification of sound by a moving medium.– J. Acoust. Soc. Amer., 1957, v. 29, № 4, p. 435–441.
4. *Колыхалов П. И.* Неустойчивость тангенциального разрыва в газе, движущемся вблизи твердой стенки. М., Ин-т косм. исслед. АН СССР, Препринт № 824, 1983.
5. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1953. 788 с.
6. *Бетчов Р., Криминале В.* Вопросы гидродинамической устойчивости. М.: Мир, 1971. 352 с.
7. Справочник по специальным функциям/Ред. Абрамовиц М. и Стиган И. М.: Наука, 1979. 830 с.
8. *Никифоров А. Ф., Уваров В. Б.* Основы теории специальных функций. М.: Наука, 1974. 304 с.
9. *Гольдштик М. А., Штейн В. Н.* Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск, 1977, 360 с.
10. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика. М.: Наука, 1973. 208 с.
11. *Олвер Ф.* Введение в асимптотические методы и специальные функции. М.: Наука, 1978. 375 с.
12. *Федорюк М. В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983. 352 с.
13. *Найфэ А. Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.

Москва

Поступила в редакцию
29.II.1984