

УДК 532.59:537.84

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛЬФВЕНОВСКИХ
ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН ПО ТАНГЕНЦИАЛЬНОМУ
МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОМУ РАЗРЫВУ
В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ**

РУДЕРМАН М. С.

Распространение волн в атмосфере с магнитной структурой рассматривалось во многих работах [1–6]. Во всех этих работах изучались наиболее простые примеры магнитной структуры: магнитный разрыв и изолированная магнитная трубка или слой. Термин «магнитный разрыв» применяется для обозначения частного случая тангенциального магнитогидродинамического разрыва, когда скорость по обе стороны от разрыва равна нулю, а разрыв терпят только магнитное поле, плотность и давление.

По-видимому, впервые распространение волн по магнитному разрыву рассматривалось в [7], где показано, что так называемые альфвеновские поверхностные волны могут распространяться по поверхности, отделяющей полубесконечную область с магнитным полем от области без поля. В [1] детально изучено распространение волн по поверхности магнитного разрыва в сжимаемой среде.

Исследование распространения волн по поверхности магнитного разрыва важно для многих приложений в лабораторной и космической физике и прежде всего для проблемы нагрева солнечной короны. Затухание поверхностных волн за счет вязкости и теплопроводности рассмотрено в [8]. Найдено, что поверхностные волны могут эффективно разогревать солнечную корону только в том случае, если их периоды меньше либо порядка нескольких десятых секунды, а индукция магнитного поля меньше либо порядка 10 Гс.

До сих пор распространение волн в атмосфере с магнитной структурой изучалось только в линейном приближении (за исключением [9], где обсуждается возможность существования солитонов в магнитных слоях и трубках). Учет нелинейности может привести ко многим интересным эффектам. Например, волны на поверхности магнитного разрыва являются недиспергирующими. Поэтому они могут укрупняться подобно нелинейным звуковым волнам, что должно приводить к образованию разрыва. Следовательно, эти волны могут диссипировать в среде с произвольно малыми вязкостью и теплопроводностью.

В настоящей работе рассматривается распространение нелинейных волн малой амплитуды по поверхности магнитного разрыва. Выведено уравнение для таких волн. Изучена эволюция синусоидального возмущения. Численно определено время образования разрыва.

1. Основные уравнения. Рассматривается идеальная несжимаемая жидкость с бесконечной проводимостью, описываемая уравнениями магнитной гидродинамики

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) + \frac{1}{4\pi\rho} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}); \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0; \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Здесь \mathbf{v} — скорость, \mathbf{B} — магнитная индукция, p — давление, ρ — плотность.

Введем декартову систему координат с осью z , перпендикулярной к поверхности магнитного разрыва. В дальнейшем предполагаем, что все переменные зависят только от x и z и $v_y = 0$, $B_y = \text{const}$.

В невозмущенном состоянии полагаем $B_z=0$, $\mathbf{v}=0$. При $z=0$ плотность ρ , а также невозмущенное магнитное поле \mathbf{B}_0 и давление p_0 терпят разрыв, причем $V_{A1}^2 \cos^2 \alpha_1 \neq V_{A2}^2 \cos^2 \alpha_2$, где α — угол между \mathbf{B}_0 и осью x , а индексы 1 и 2 относятся к областям $z < 0$ и $z > 0$ соответственно.

На возмущенной поверхности магнитного разрыва, определяемой уравнением $z = \eta(x, t)$, выполняются следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} w_1 = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \eta}{\partial x}; \quad \left[w - u \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] = 0 \\ B_z - \frac{\partial \eta}{\partial x} B_x = 0; \quad \left[p - \frac{B^2}{8\pi} \right] = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

где u и w обозначают x - и z -компоненты скорости, а квадратные скобки — скачок величины. Кроме того, все возмущения должны затухать при $|z| \rightarrow \infty$.

Введем векторные потенциалы для скорости и магнитного поля

$$\mathbf{v} = -\nabla \times (\psi \mathbf{e}_y); \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 - \sqrt{4\pi\rho} \nabla \times (\chi \mathbf{e}_y) \quad (1.3)$$

где \mathbf{e}_y — единичный вектор оси y . После этого уравнения (1.1) приводятся к виду

$$\Delta \frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{e}_y (\nabla \psi \times \nabla \Delta \psi) = \mathbf{V}_A \nabla \Delta \chi + \mathbf{e}_y (\nabla \chi \times \nabla \Delta \psi) \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = \mathbf{V}_A \nabla \psi + \mathbf{e}_y (\nabla \chi \times \nabla \psi); \quad \mathbf{V}_A = \frac{\mathbf{B}_0}{\sqrt{4\pi\rho}} \quad (1.5)$$

Произвольная аддитивная функция времени в правой части (1.5) включена в $\partial \chi / \partial t$.

Первые три граничных условия (1.2) могут быть приведены к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = 0 \\ [\psi] = 0; \quad [\chi + \eta V_A \cos \alpha] = 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Дифференцируя последнее граничное условие (1.2) по x и исключая ∇p с помощью (1.1), получим

$$\begin{aligned} \left[\rho \left\{ -\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial z} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x} + 1 \left(\nabla \psi \Delta \psi - \frac{1}{2} \nabla (\nabla \psi)^2 - \nabla \chi \Delta \chi + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \nabla (\nabla \chi)^2 + V_A \cos \alpha \nabla \frac{\partial \chi}{\partial z} \right) - V_A \cos \alpha \frac{\partial \eta}{\partial x} \Delta \chi \right\} \right] = 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$1 = (1; 0; \partial \eta / \partial x)$$

Производные функций ψ , χ и η должны стремиться к нулю при $|z| \rightarrow \infty$. Кроме того, в дальнейшем предполагаем, что либо ψ , χ , η являются периодическими функциями x , либо они стремятся к постоянным значениям при $x \rightarrow \pm \infty$.

Уравнения (1.4), (1.5) вместе с граничными условиями (1.6), (1.7) используются для вывода уравнения, описывающего распространение нелинейных волн малой амплитуды.

2. Уравнение для нелинейных волн малой амплитуды. Рассмотрим возмущения с малой безразмерной амплитудой $\epsilon \ll 1$. Поскольку скорость распространения таких возмущений близка к скорости распространения бесконечно малых возмущений c , а характерное время эволюции формы возмущения равно $L/\epsilon c$ (L — характерная длина возмущения), введем новые переменные $\xi = x - ct$, $\tau = \epsilon t$.

Переходя к новым переменным в уравнениях (1.4), (1.5). получим

$$\begin{aligned} \Delta \left(\varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial \tau} - c \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial z} \Delta \frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \Delta \frac{\partial \psi}{\partial z} = \\ = V_A \cos \alpha \Delta \frac{\partial \chi}{\partial \xi} + \frac{\partial \chi}{\partial z} \Delta \frac{\partial \chi}{\partial \xi} - \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \Delta \frac{\partial \chi}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\varepsilon \frac{\partial \chi}{\partial \tau} - c \frac{\partial \chi}{\partial \xi} = V_A \cos \alpha \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \chi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (2.2)$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial \xi}; 0; \frac{\partial}{\partial z} \right); \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Первое граничное условие (1.6) и (1.7) запишутся в виде

$$\varepsilon \frac{\partial \eta}{\partial \tau} - \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = 0 \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \left[\rho \left\{ -\varepsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial z} + c \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial z} + \varepsilon \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi} - c \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + I \left(\nabla \psi \Delta \psi - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \nabla (\nabla \psi)^2 - \nabla \chi \Delta \chi + \frac{1}{2} \nabla (\nabla \chi)^2 + V_A \cos \alpha \nabla \frac{\partial \chi}{\partial z} \right) - V_A \cos \alpha \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \Delta \chi \right\} = 0 \\ I = (1; 0; \partial \eta / \partial \xi) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Ищем решение уравнений (2.1), (2.2) с граничными условиями (1.6), (2.3), (2.4) в виде степенных рядов $f = \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \dots$. Собирая члены порядка ε в (2.1)–(2.4), получим уравнения и граничные условия при $z=0$

$$\Delta \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \xi} = 0; \quad \frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial \xi} = -\frac{V_A \cos \alpha}{c} \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \xi} \quad (2.5)$$

$$z=0: \frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial \xi} = \frac{\partial \psi_2^{(1)}}{\partial \xi} = c \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial \xi}; \quad \left[\rho \left(c \frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial \xi \partial z} + V_A \cos \alpha \frac{\partial^2 \chi^{(1)}}{\partial \xi \partial z} \right) \right] = 0 \quad (2.6)$$

Введем преобразование Фурье для функций, стремящихся к нулю на бесконечности и разложение в ряды Фурье для периодических функций (L – период)

$$\begin{aligned} f_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-ik\xi} d\xi \\ f(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{2\pi ik\xi/L}; \quad f_k = \frac{1}{L} \int_0^L f(\xi) e^{-2\pi ik\xi/L} d\xi \end{aligned}$$

Из первого уравнения (2.5), первого граничного условия (2.6) и условия убывания при $|z| \rightarrow \infty$ следует, что

$$\left(\frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial \xi} \right)_k = c \left(\frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial \xi} \right)_k e^{|k|z}; \quad \left(\frac{\partial \psi_2^{(1)}}{\partial \xi} \right)_k = c \left(\frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial \xi} \right)_k e^{-|k|z} \quad (2.7)$$

Используя второе уравнение (2.5) для исключения $\chi^{(1)}$ и подставляя (2.7) во второе граничное условие (2.6), находим

$$c^2 = \frac{\rho_1 V_{A1}^2 \cos^2 \alpha_1 + \rho_2 V_{A2}^2 \cos^2 \alpha_2}{\rho_1 + \rho_2} \quad (2.8)$$

Кроме того, (2.7) приводит к соотношению при $z=0$

$$\frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial z} = -\frac{\partial \psi_2^{(1)}}{\partial z} = cH\left(\frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial \xi}\right) \quad (2.9)$$

Здесь преобразование Гильберта $H(f)$ определяется первой формулой (2.10) для функций, убывающих на бесконечности (интеграл берется в смысле главного значения), и второй формулой (2.10) для периодических функций

$$H(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi') d\xi'}{\xi - \xi'} \quad (2.10)$$

$$H(f) = \frac{1}{L} \int_0^L \{f(\xi') - f(\xi)\} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{L} (\xi - \xi') d\xi'$$

Заметим, что в случае, когда среднее значение периодической функции f равно нулю, ее преобразование Гильберта может определяться с помощью первой формулы (2.10). В связи с этим отметим, что среднее значение за период $\partial \eta / \partial \xi$ равно нулю, поскольку η ограничена на бесконечности.

При выводе (2.9) использовалась формула

$$\left(H\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)\right)_k = |k| f_k \quad (2.11)$$

Собирая члены порядка ε^2 в (2.1)–(2.4) и используя (2.5), (2.6), получим уравнения и граничные условия

$$\Delta \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial \xi} = 0; \quad c \frac{\partial \chi^{(2)}}{\partial \xi} + V_A \cos \alpha \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial \xi} = \frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial \tau} \quad (2.12)$$

$$\psi_1^{(2)} + \eta^{(1)} \frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial z} = \psi_2^{(2)} + \eta^{(1)} \frac{\partial \psi_2^{(1)}}{\partial z} \quad (2.13)$$

$$\rho_1 \left(c \frac{\partial^2 \psi_1^{(2)}}{\partial \xi \partial z} + V_{A1} \cos \alpha_1 \frac{\partial^2 \chi_1^{(2)}}{\partial \xi \partial z} \right) - \rho_2 \left(c \frac{\partial^2 \psi_2^{(2)}}{\partial \xi \partial z} + V_{A2} \cos \alpha_2 \frac{\partial^2 \chi_2^{(2)}}{\partial \xi \partial z} \right) =$$

$$= (\rho_1 + \rho_2) \frac{\partial^2 \psi_1^{(1)}}{\partial \tau \partial z} + \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} (V_{A2}^2 \cos^2 \alpha_2 - V_{A1}^2 \cos^2 \alpha_1) F \quad (2.14)$$

$$F = 4 \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \eta^{(1)}}{\partial \xi^2} + 2 \eta^{(1)} \frac{\partial^3 \eta^{(1)}}{\partial \xi^3} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial z} \right)^2$$

С помощью (2.12) перепишем (2.14) в виде

$$\frac{\partial^2 \psi_1^{(2)}}{\partial \xi \partial z} - \frac{\partial^2 \psi_2^{(2)}}{\partial \xi \partial z} = 2q \frac{\partial^2 \psi_1^{(1)}}{\partial \tau \partial z} + cF \quad (2.15)$$

$$q = \frac{c(\rho_1 + \rho_2)^2}{\rho_1 \rho_2 (V_{A2}^2 \cos^2 \alpha_2 - V_{A1}^2 \cos^2 \alpha_1)}$$

Из первого уравнения (2.12) и условий на бесконечности следует

$$\left(\frac{\partial \psi_1^{(2)}}{\partial \xi}\right)_k = A_{1k} e^{ikz}; \quad \left(\frac{\partial \psi_2^{(2)}}{\partial \xi}\right)_k = A_{2k} e^{-|k|z} \quad (2.16)$$

Теперь, используя (2.9) и (2.13), легко получить при $z=0$

$$A_{1k} - A_{2k} = -2ik \left(\eta^{(1)} \frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial z} \right)_k \quad (2.17)$$

Фурье-преобразование (2.15) записывается в виде

$$|k| (A_{1k} - A_{2k}) = 2q \left(\frac{\partial^2 \psi_1^{(1)}}{\partial \tau \partial z} \right)_k + c F_k \quad (2.18)$$

Подставляя (2.17) в (2.18), получим

$$q \left(\frac{\partial^2 \psi_1^{(1)}}{\partial \tau \partial z} \right)_k - ik |k| \left(\eta^{(1)} \frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial z} \right)_k + \frac{c}{2} F_k = 0 \quad (2.19)$$

С учетом (2.11) обратное преобразование Фурье (2.19) дает следующее уравнение:

$$q \frac{\partial^2 \psi_1^{(1)}}{\partial \tau \partial z} + \frac{c}{2} F + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} H \left(\eta^{(1)} \frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.20)$$

Применяя к (2.20) преобразование Гильберта и используя равенства (2.9), коммутативность операторов H и $\partial/\partial \xi$ и формулы

$$H^2(f) = -f \quad (2.21)$$

$$H(fg) = H(H(f)H(g)) + fH(g) + gH(f)$$

получим уравнение

$$q \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \eta^{(1)} H \left(\frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial \xi} \right) - H \left(\eta^{(1)} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial \xi} \right) \right\} + \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial \xi} H \left(\frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial \xi} \right) = 0 \quad (2.22)$$

В правой части (2.22) должна стоять произвольная функция времени $\varphi(\tau)$, которая при $\eta^{(1)}$, стремящемся к постоянным не зависящим от времени значениям при $\xi \rightarrow \pm \infty$, равна нулю. Для периодической $\eta^{(1)}$ в дальнейшем будет показано, что

$$\langle \eta^{(1)} \rangle = \text{const}; \quad \left\langle \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial \xi} H \left(\frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial \xi} \right) \right\rangle = 0$$

где скобки означают среднюю величину за период. Таким образом, $\varphi(\tau) = 0$ и для периодической $\eta^{(1)}$.

Возвращаясь к t в (2.22) и полагая $\eta \approx \varepsilon \eta^{(1)}$, окончательно получим

$$q \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \eta H \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right) - H \left(\eta \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right) \right\} - \frac{\partial \eta}{\partial \xi} H \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right) = 0 \quad (2.23)$$

Полученное уравнение имеет довольно нестандартный вид, поскольку содержит интегральное преобразование. При описании распространения волн в жидкости ранее уже возникало уравнение, содержащее преобразование Гильберта. Это известное уравнение Бенъямина – Оно [10], описывающее распространение внутренних волн в бесконечно глубокой жидкости, содержащей область быстрого изменения плотности. Однако в ситуации, описываемой уравнением Бенъямина – Оно, нелинейные эффекты возникают лишь в узком слое с быстро меняющейся плотностью, поэтому нелинейные члены не содержат интегральных преобразований. Преобразование Гильберта появляется лишь при описании дисперсии, которая определяется всем бесконечным слоем жидкости. Поскольку дисперсионные эффекты учитываются в линейном приближении, преобразование Гильберта входит в уравнение линейно.

В ситуации, рассматриваемой в настоящей работе, нелинейность распределена по всему бесконечному слою жидкости. Поэтому преобразование Гильберта содержится в нелинейных членах.

3. Законы сохранения. Введем следующее обозначение для интегралов от функций, убывающих на бесконечности, и периодических функций

(L — период):

$$\int f d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f d\xi; \quad \int f d\xi = \int_0^L f d\xi$$

Используя формулу

$$\int f H(g) d\xi = - \int g H(f) d\xi \quad (3.1)$$

получим

$$\int \frac{\partial \eta}{\partial \xi} H\left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi}\right) d\xi = 0$$

после чего из (2.23) следует

$$\frac{dI_1}{dt} = 0, \quad I_1 = \int \eta d\xi \quad (3.2)$$

С помощью несложных, но громоздких выкладок можно вывести еще один закон сохранения

$$\frac{dI_2}{dt} = 0, \quad I_2 = \int \eta H\left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi}\right) d\xi \quad (3.3)$$

Из (2.11) и равенства Парсеваля следует, что для функций, убывающих на бесконечности, и периодических функций

$$I_2 = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |k| \eta_k^2 dk > 0, \quad I_2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k| \eta_k^2 > 0$$

В том случае, когда $\eta \rightarrow \eta_{\pm}$ при $\xi \rightarrow \pm\infty$ и $\eta_+^2 + \eta_-^2 > 0$, имеем

$$I_2 = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \eta_{\alpha} H\left(\frac{\partial \eta_{\alpha}}{\partial \xi}\right) d\xi > 0, \quad \eta_{\alpha} = \eta \exp(-\alpha^2 \xi^2)$$

Можно показать, что I_2 является (с точностью до умножения на положительную константу) энергией возмущений в первом приближении по ϵ . Таким образом, (3.3) — закон сохранения энергии.

4. Опрокидывание синусоидального возмущения. Рассмотрим эволюцию возмущения, определенного при $t=0$ формулой

$$\eta(\xi) = a \sin \frac{2\pi}{L} \xi \quad (4.1)$$

Определяя новые переменные, перепишем (2.23) в виде

$$\frac{\partial \xi}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \xi H\left(\frac{\partial \xi}{\partial X}\right) - H\left(\xi \frac{\partial \xi}{\partial X}\right) \right\} - \frac{\partial \xi}{\partial X} H\left(\frac{\partial \xi}{\partial X}\right) = 0 \quad (4.2)$$

$$T = \frac{4\pi^2 a}{|q| L^2} t; \quad X = \frac{2\pi}{L} \xi; \quad \xi = \frac{\operatorname{sgn} q}{a} \eta$$

Нетрудно видеть, что ξ — нечетная функция X при всех $T > 0$. Поэтому разложение ξ в ряд Фурье имеет вид

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(T) \sin nX \quad (4.3)$$

Подставляя (4.3) в (4.2) и используя формулы

$$H(\cos n\xi) = \operatorname{sgn} n \sin n\xi; \quad H(\sin n\xi) = -\operatorname{sgn} n \cos n\xi$$

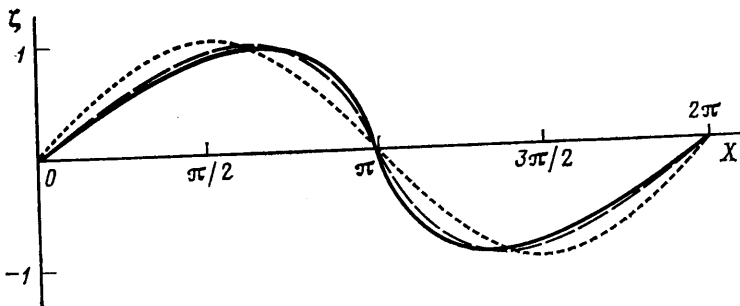
получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для b_n и закон сохранения энергии

$$\frac{db_n}{dT} = n \sum_{m=1}^{\infty} m b_m b_{m+n} - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n-1} m(n-m) b_m b_{n-m} \quad (4.4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n b_n^2 = \text{const} \quad (4.5)$$

Заметим, что уравнение (4.5) может быть получено непосредственно из (4.4).

Первый член в правой части (4.4) является коэффициентом ряда Фурье для выражения в фигурных скобках в (4.2), а второй — для последнего члена в (4.2). Интересно отметить, что первый член в правой части (4.4)



описывает воздействие высших гармоник на низшие, а второй — генерацию высших гармоник низшими. Таким образом, если бы в (4.4) отсутствовал последний член, решение можно было бы искать в виде конечной суммы синусов, содержащей произвольное число членов. В частности, $\zeta = b_1 \sin X$ было бы стационарным решением (4.2) при любом b_1 .

С другой стороны, если бы в (4.4) отсутствовал первый член в правой части, $b_n(T)$ можно было бы искать последовательно.

Для численного решения (4.4) производится обрезание ряда Фурье (4.3), т. е. полагается $b_n = 0$, если $n > N$. Вычисления были проведены при $N = 50$ и 100 . Результаты достаточно хорошо совпадают в обоих случаях. На фигуре представлены графики функции ζ для различных моментов времени. Точками изображен профиль возмущения при $T = 0$, пунктиром — при $T = 0,4$, сплошной линией — при $T = 0,55$. Получено, что $\partial \zeta / \partial X (X = \pi) \rightarrow -\infty$ при $T \rightarrow T_c \approx 0,55$, т. е. волна опрокидывается аналогично звуковым волнам в нелинейной акустике [11]. Но в отличие от нелинейной акустики амплитуда волны несколько уменьшается еще до момента опрокидывания.

Возвращаясь к t , видим, что опрокидывание волны и образование разрыва происходит в момент времени t_c , определяемый формулой

$$t_c = L^2 |q| T_c / 4\pi^2 a \quad (4.6)$$

Заметим, что разрыв формируется в области, определяемой условием $\partial \eta / \partial \xi < 0$, если $q > 0$, и в области, определяемой условием $\partial \eta / \partial \xi > 0$, если $q < 0$.

Полученные результаты позволяют определять расстояние от области генерации волны до точки опрокидывания в различных астрофизических приложениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Roberts B.* Wave propagation in a magnetically structured atmosphere. I. Surface waves at a magnetic interface.— *Solar Phys.*, 1981, v. 69, № 1, p. 27–38.
2. *Roberts B.* Wave propagation in a magnetically structured atmosphere. II. Waves in a magnetic slab.— *Solar Phys.*, 1981, v. 69, № 1, p. 39–56.
3. *Edwin P. M., Roberts B.* Wave propagation in a magnetically structured atmosphere. III; The slab in a magnetic environment.— *Solar Phys.*, 1982, v. 76, № 2, p. 239–359.
4. *Spruit H. C.* Propagation speeds and acoustic damping of waves in magnetic flux tubes.— *Solar Phys.*, 1982, v. 75, № 1, p. 3–17.
5. *Rae I. C., Roberts B.* Pulse propagation in a magnetic flux tube.— *Astrophys. J.*, 1982, v. 256, № 2, pt 1, p. 761–767.
6. *Rae I. C., Roberts B.* Wave diagrams for MHD modes in a magnetically structured atmosphere.— *Solar Phys.*, 1983, v. 84, № 1–2, p. 99–103.
7. *Parker E. N.* The nature of the sunspot phenomenon. II. Internal overstable modes.— *Solar Phys.*, 1974, v. 37, № 1, p. 127–144.
8. *Gordon B. E., Hollweg J. V.* Collisional damping of surface waves in the solar corona.— *Astrophys. J.*, 1983, v. 266, № 1, p. 373–382.
9. *Roberts B., Mangeney A.* Solitons in solar magnetic flux tubes.— *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 1982, v. 198, p. 7P–11P.
10. *Ono H.* Algebraic solitary waves in stratified fluids.— *J. Phys. Soc. Japan*, 1975, v. 39, p. 1082–1091.
11. *Руденко О. В., Солюн С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975, 287 с.

Москва

Поступила в редакцию
14.II.1984