**МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 • 1985**

УДК 532.59

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ, ОБУСЛОВЛЕННОЙ КАПИЛЛЯРНО-ГРАВИТАЦИОННОЙ ВОЛНОЙ С ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ

ЛЕСНИКОВ В. П.

Волны с отрицательной энергией уже давно широко используются в различных усилительных устройствах в физике плазмы и электронике [1–3]. В последнее время определенный интерес к такого рода волнам и связанными с ними неустойчивостями проявляется в гидродинамике. В работе [4] показано, что капиллярно-гравитационные волны в стратифицированной жидкости могут быть изучены таким же образом, как в физике плазмы, поскольку формула для энергии этих волн аналогична электродинамической. Роль диэлектрической проницаемости теперь играет левая часть дисперсионного уравнения, описывающего распространение капиллярно-гравитационной волны. Из выражения для энергии можно искать условия возникновения у волны отрицательной энергии. В работах [5, 6] изучались гравитационные волны с отрицательной энергией и возможность их усиления за счет потери энергии.

Ниже рассмотрена непосредственная окрестность неустойчивости, обусловленной капиллярно-гравитационной волной с отрицательной энергией в стратифицированной жидкости, нижний слой которой вязкий и описана структура, возникающая в закритическом режиме.

1. Для устойчивости поверхности раздела двух слоев идеальных несжимаемых жидкостей бесконечной толщины, верхняя из которых (с плотностью ρ') движется относительно нижней (с плотностью $\rho>\rho'$), необходимо, чтобы скорость не превышала критического значения [7]

$$U_*=\sqrt[4]{4\alpha g(\rho-\rho')(\rho+\rho')^2/\rho^2\rho'^2} \tag{1.1}$$

где α — коэффициент поверхностного натяжения, g — ускорение свободного падения. Этот результат сразу получается из решения дисперсионного уравнения, описывающего распространение капиллярно-гравитационной волны

$$\omega=Vk\pm\Omega \tag{1.2}$$

здесь

$$V=\frac{\rho'}{\rho+\rho'}U,\qquad \Omega=\sqrt{\frac{nk}{\rho+\rho'}-\frac{\rho\rho' U^2k^2}{(\rho+\rho')^2}},\qquad n=g(\rho-\rho')+\alpha k^2 \tag{1.3}$$

Знак плюс в (1.2) соответствует быстрой волне, распространяющейся по направлению скорости U, знак минус — медленной волне, распространяющейся против направления скорости.

Медленная волна начинает обладать отрицательной энергией при перемене знака ω [8]. С учетом (1.2) это условие можно записать в виде

$$V>\Omega/k \tag{1.4}$$

что означает превышение скорости центра масс системы фазовой скорости волны. Используя (1.3), формулу (1.4) представим как

$$\rho' U^2k>n \tag{1.5}$$

Откуда найдем значение скорости, при которой медленная волна становится волной с отрицательной энергией

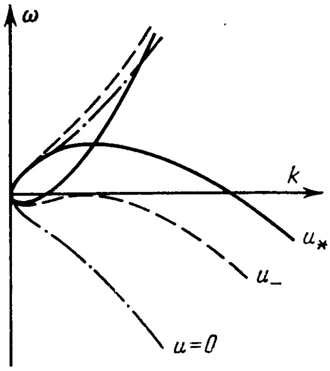
$$U_{-}=\sqrt{4\alpha g(\rho-\rho')/\rho'^2} \qquad (1.6)$$

Из (1.5) получим также, что волновой вектор медленной волны с нулевой энергией k_{-} равен волновому вектору волны, вызывающей неустойчивость поверхности идеальных жидкостей k_*

$$k_{-}=k_*=\sqrt{g(\rho-\rho')/\alpha} \qquad (1.7)$$

Величина U_{-} меньше U_*, поэтому неустойчивость, связанная с волной отрицательной энергии, наступит раньше при наличии какого-либо механизма отбора энергии.

На фигуре приведена зависимость $\omega(k)$, следующая из (1.2), для случаев неподвижных жидкостей и движущегося верхнего слоя со скоростями U_{-} и U_*. При скорости U_{-} нижняя ветвь касается оси абсцисс в точке k_{-}. При скоростях, больших U_{-}, часть нижней ветви заходит в область $\omega>0$. Этой части соответствуют волны с отрицательной энергией.



2. Если нижняя жидкость вязкая, то из уравнений движения, условия несжимаемости, а также кинематических условий, равенства давления и отсутствия тангенциальных напряжений на границе раздела для возмущений пропорциональных $\exp[i(kx-\omega t)]$ получается следующее дисперсионное уравнение

$$\rho'(\omega-Uk)^2-nk-\rho((2\nu k^2-i\omega)^2-$$
$$-4(\nu k^2)^2\Gamma)=0 \qquad (2.1)$$

где ν — кинематическая вязкость и $\Gamma=\sqrt{1-i\omega/(\nu k^2)}$.

Хотя аналитически представить решение этого уравнения нельзя, тем не менее из него также вытекает, что в момент возникновения неустойчивости $\omega=0$ и выполняется равенство (1.5). В самом деле, поскольку в момент возникновения неустойчивости мнимая часть ω равна нулю, то, положив это в (2.1), найдем из условия обращения в нуль мнимой части уравнения, что и действительная часть ω равна нулю. Для $\omega=0$ из (2.1) сразу следует, что при этом выполняется равенство (1.5).

В непосредственной близости состояния неустойчивости, сохраняя в дисперсионном уравнении члены первого порядка по ω, получим

$$\omega=\frac{1}{2}\frac{\rho'U^2k^2-nk}{\rho'Uk-i\rho\nu k^2} \qquad (2.2)$$

Отсюда видно, что при выполнении неравенства (1.5), определяющего условие наличия у медленной капиллярно-гравитационной волны отрицательной энергии, волновое возмущение границы раздела нарастает с инкрементом, определяемым мнимой частью (2.2).

3. При незначительном превышении скорости течения верхнего слоя величины U_{-} очевидно, что наиболее существенно поведение той моды, которая первая становится неустойчивой. Поэтому будем искать решение соответствующих нелинейных гидродинамических уравнений при $U>U$ в виде одной моды с волновым вектором k_{-} (индекс минус в дальнейшем будем опускать) в такой же форме, как и линейных, однако предполагая амплитуду немалой. Например, для смещения поверхности ξ и вертикаль-

ной компоненты скорости u_z в нижней жидкости

$$\xi = \frac{1}{2} A e^{i\theta} + \text{к. с} \tag{3.1}$$

$$u_z = \frac{1}{2}\left(C_1 e^{kz} + C_2 e^{k\Gamma z}\right) e^{i\theta} + \text{к. с.} \tag{3.2}$$

где $\theta = kx - \omega t$ и ω мало.

Величина амплитуды рассматриваемой моды в области $U > U_-$ будет определяться ее самодействием, обусловленным нелинейностями третьего порядка, которые возникают в граничных условиях на поверхности раздела $z = \xi$ при разложении экспоненциальных зависимостей от z объемных возмущений типа (3.2).

В результате такого подхода получим дисперсионное уравнение вида (2.1) с поправками, обусловленными конечной амплитудой. Важно то, что вместо члена $\rho'(\omega - Uk)^2$ появляется член $\rho'(\omega - Uk)^2(1 - k^2|A|^2)$, что соответствует известной поправке Стокса для частоты волн на поверхности жидкости, связанной с конечностью амплитуды волны.

Для малых ω вместо (2.2) получим

$$\omega = \frac{1}{2} \frac{\rho' U^2 k^2 (1 - X) - n'k}{\rho' Uk (1 - X) - i\rho\nu k^2 (1 + X/4)} \tag{3.3}$$

где $X = k^2 |A|^2$ и $n' = g(\rho - \rho') + \alpha k^2 (1 - 3/8X)$.

Здесь замена n на n' связана с учетом следующего члена в разложении энергии поверхностного натяжения. Поскольку значение ω действительно, то из (3.3) следует, что величина

$$\rho' U^2 k^2 (1 - X) - n'k = 0 \tag{3.4}$$

а вместе с ней и $\omega = 0$.

Условие (3.3) является уравнением для определения амплитуды смещения поверхности. Из него находим

$$|A| = \frac{1}{k} \sqrt{(U^2 - U_-^2)\left(U^2 - \frac{3}{16} U_-^2\right)} \tag{3.5}$$

Таким образом, в результате развития неустойчивости на поверхности возникает неподвижная решетка с амплитудой, определяемой формулой (3.4) и длиной волны $\lambda = 2\pi/k = 2\pi\sqrt{\alpha/[g(\rho - \rho')]}$. Последующий рост скорости верхней жидкости приводит к необходимости учета взаимодействия остальных мод и возникновению слабой турбулентности.

4. Полученные результаты нетрудно обобщить на случай слоев жидкости, границы которых находятся в плоскостях $z = l'$ и $-l$. Если граница в плоскости $z = -l$ свободная, то дисперсионное уравнение имеет вид

$$\rho' \operatorname{cth} \gamma' (\omega - Uk)^2 - nk - \rho\left((2\nu k^2 - i\omega)^2 \operatorname{cth} \gamma - 4(\nu k^2)^2 \Gamma \operatorname{cth} \Gamma\gamma\right) = 0 \tag{4.1}$$

где $\gamma = kl$, $\gamma' = kl'$.

Для твердой границы в плоскости $z = -l$

$$\begin{gathered}[\rho' \operatorname{cth} \gamma' (\omega - Uk)^2 - nk] (\operatorname{ch} \gamma \operatorname{sh} \Gamma\gamma - \Gamma \operatorname{sh} \gamma \operatorname{ch} \Gamma\gamma) - \\ - \rho(\nu k^2)^2 [4\Gamma(1 + \Gamma^2) + 4\Gamma(\Gamma \operatorname{sh} \gamma \operatorname{sh} \Gamma\gamma - \operatorname{ch} \gamma \operatorname{ch} \Gamma\gamma) - \\ - (1 + \Gamma^2)^2 (\Gamma \operatorname{ch} \gamma \operatorname{ch} \Gamma\gamma - \operatorname{sh} \gamma \operatorname{sh} \Gamma\gamma)] = 0\end{gathered} \tag{4.2}$$

Оба уравнения имеют своим корнем $\omega = 0$, соответствующий возникновению у медленной волны отрицательной энергии.

Значение скорости, при которой наступает неустойчивость, определится условием

$$\rho' \operatorname{cth} \gamma' U^2 k > n \tag{4.3}$$

а значение волнового вектора неустойчивости моды — уравнением $\partial U^2/\partial k=0$

$$\frac{\operatorname{sh} 2\gamma'}{2\gamma'}=\frac{g(\rho-\rho')+\alpha k^2}{g(\rho-\rho')-\alpha k^2} \tag{4.4}$$

Из (4.3) и (4.4) видим, что на величину скорости и волнового вектора влияет только толщина верхнего движущегося слоя и не влияет толщина нижнего.

В закритическом режиме, так же как и ранее, получим

$$|A|=\frac{1}{k}\sqrt{\frac{U^2-U_-^2}{U^2-rU_-^2}},\qquad r=\frac{3}{8}\frac{(\varepsilon-1)}{2\varepsilon},\qquad \varepsilon=\frac{\operatorname{sh} 2\gamma'}{2\gamma'}$$

где U_- и k определяются формулами (4.3) и (4.4).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Незлин М. В.* Волны с отрицательной энергией и аномальный эффект Допплера.— Успехи физ. наук, 1976, т. 120, № 3, с. 481–495.
2. *Кролл Н., Трайвелпис А.* Основы физики плазмы. М.: Мир, 1975. 525 с.
3. *Скотт Э.* Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике, М.: Сов. радио, 1977. 368 с.
4. *Cairns R. A.* The role of negative energy waves in some instabilities of parallel flows.— J. Fluid Mech., 1979, v. 82, № 1, p. 1–14.
5. *Островский Л. А., Цимринг Л. Ш.* Излучательная неустойчивость сдвиговых течений в стратифицированной жидкости.— Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1981, т. 17, № 7, с. 766–768.
6. *Островский Л. А., Степанянц Ю. А.* Нелинейная стадия сдвиговой неустойчивости в стратифицированной жидкости конечной глубины.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1982, № 4, с. 63–70.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1954. 795 с.
8. *Кадомцев Б. Б.* Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1976. 238 с.

Одесса

Поступила в редакцию
11.III.1984