

УДК 532.59

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН  
НАД ПОДВОДНЫМИ ХРЕБТАМИ**

**БАХОЛДИН И. Б.**

Исследование распространения уединенных волн ведется на основе нелинейной системы уравнений гиперболического типа, описывающей движение гребня уединенной волны по поверхности жидкости переменной глубины [1]. Допускается наличие решений с разрывами, граничные условия на которых введены на основе работ [2, 3]. В случае бесконечного цилиндрического хребта имеются как одиночные, так и периодические захваченные волны. В случае набегания однородной волны на полубесконечный хребет в зависимости от высоты хребта и параметров волны имеются качественно различные решения — непрерывные и разрывные, где основная волна расслаивается хребтом на несколько уединенных волн. Возможно как повышение, так и понижение амплитуды волны над хребтом.

**1. Исходные уравнения, разрывные решения.** Рассмотрим распространение слабонелинейных, слабодиспергирующих уединенных волн в слое жидкости медленно меняющейся глубины. Если радиус кривизны фронта достаточно велик по сравнению с длиной волны и по нормали к фронту на участке порядка длины волны относительное изменение глубины мало, то в сечении по нормали волна представляется солитоном и энергия ее участка, заключенного в лучевой трубке, сохраняется в процессе движения. Под лучами понимаются траектории точек фронта волны в предположении, что они движутся по нормали к нему. Распространение уединенных волн описывается следующей системой [1]:

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\sin \alpha}{V(E, h)} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\cos \alpha}{V(E, h)} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} (E \cos \alpha) - \frac{\partial}{\partial x} (E \sin \alpha) = 0 \quad (1.1)$$

Здесь  $x, y$  — горизонтальная система координат;  $\alpha$  — угол между касательной к фронту и осью  $x$ ;  $E$  — плотность энергии волны, т. е. энергия, приходящаяся на единицу длины фронта;  $V$  — скорость волны;  $h$  — глубина жидкости. Для солитонов малой амплитуды

$$V(E, h) = \sqrt{gh} \left( 1 + \frac{3E^{\eta_0}}{8h(\rho g)^{\eta_0}} \right), \quad E = \left( \frac{4}{3} \right)^{\eta_0} \rho g h^3 \left( \frac{\eta_0}{h} \right)^{\eta_0} \quad (1.2)$$

где  $\rho$  — плотность жидкости;  $g$  — ускорение силы тяжести;  $\eta_0$  — амплитуда солитона.

Поскольку  $V_E = \partial V / \partial E > 0$ , то система (1.1) гиперболического типа и может быть записана в характеристической форме

$$\begin{aligned} \left( c \frac{\partial \alpha}{\partial n} + \frac{\beta}{2} \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right) - \frac{1,5}{c} \left( c \frac{\partial \beta}{\partial n} + \frac{\beta}{2} \frac{\partial \beta}{\partial s} \right) &= 0,5 \frac{c}{h} \frac{\partial h}{\partial s} + 1,5 \frac{\beta}{h} \frac{\partial h}{\partial n} \\ \left( c \frac{\partial \alpha}{\partial n} - \frac{\beta}{2} \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right) + \frac{1,5}{c} \left( c \frac{\partial \beta}{\partial n} - \frac{\beta}{2} \frac{\partial \beta}{\partial s} \right) &= 0,5 \frac{c}{h} \frac{\partial h}{\partial s} - 1,5 \frac{\beta}{h} \frac{\partial h}{\partial n} \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\beta = \frac{E^{\eta_0}}{h(\rho g)^{\eta_0}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \frac{\eta_0}{h} \right)^{\eta_0}, \quad c = 1 + \frac{3}{8} \beta^2$$

где  $\partial/\partial n$  — производная по нормали,  $\partial/\partial s$  — по касательной к фронту,  $\beta$  — безразмерная величина, приблизительно равная углу между характеристиками. Поскольку рассматриваются солитоны малой амплитуды, то  $\beta \ll 1$ . Система (1.3) не меняет своего вида при независимом изменении горизонтального масштаба и масштаба глубины. В дальнейшем считается, что все величины безразмерны ( $\rho=1, g=1$ ).

Непрерывные решения системы (1.1) существуют не всегда. Допускается наличие двух типов разрывов, введенных на основе работ [2, 3]. Разрыв первого типа вводится при рассмотрении решения, представляющего собой конфигурацию из трех волн, фронты которых пересекаются в одной точке. В системе координат, где траектория точки пересечения движется параллельно оси  $y$ , параметры волн связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \beta_3 &= \beta_2 - \beta_1, & \alpha_1 &= 0,5(2\beta_2 - \beta_1) \\ \alpha_2 &= 0,5(2\beta_1 - \beta_2), & \alpha_3 &= -0,5(\beta_2 + \beta_1) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Как видно из соотношений (1.4), параметры третьей волны, которая движется позади первой, полностью определяются по параметрам первых двух волн. Поэтому распространение первых двух волн может быть исследовано независимо от третьей.

Второй тип разрыва — пересечение волн, которое существует, если угол между пересекающимися волнами  $\psi > 1,5$  ( $\beta_1 + \beta_2$ ). Такая конфигурация фактически содержит четыре волны.

Пересечение происходит так, что две передние волны пересекаются, как бы не взаимодействуя друг с другом, и образуют волны, идущие сзади и имеющие те же параметры, что и передние волны. Если отвлечься от исследования волн, идущих сзади, то излом фронта, составленный из фронтов первых двух волн, в обоих случаях можно рассматривать как разрыв в решении системы (1.1), на котором терпят скачок величины  $E$  и  $\alpha$ .

Траектория точки пересечения волн может быть определена из соотношения найденного путем интегрирования первого уравнения системы (1.1), носящего кинематический характер [4]

$$\left[ \frac{\sin \alpha}{V} \right] U + \left[ \frac{\cos \alpha}{V} \right] = 0, \quad U = \frac{dx}{dy} \quad (1.5)$$

где  $U$  — наклон траектории к оси  $y$ .

**2. Стационарные решения над цилиндрическим подводным хребтом.** При  $h=h(x)$  система (1.4) имеет решения, не зависящие от  $y$ , которые ниже называются стационарными. Они описываются соотношениями [4]

$$\cos \alpha / V = C_1, \quad E \sin \alpha = C_2 \quad (2.1)$$

где  $C_1, C_2$  — некоторые константы.

Среди стационарных решений имеются такие, что  $dE/dx \, dh/dx < 0$  и  $\alpha \, d\alpha/dx \, dh/dx > 0$ , при этом характеристики направлены по разные стороны от оси  $y$ , и такие, что неравенства имеют противоположный смысл, а характеристики направлены по одну сторону. По аналогии с газовой динамикой, если характеристики расположены по разные стороны от линии постоянной глубины, решения называются дозвуковыми, а в противоположном случае — сверхзвуковыми. В силу выписанных выше неравенств у волны, имеющей вне цилиндрического хребта прямолинейный фронт, в первом случае по мере продвижения к гребню хребта амплитуда повышается, а во втором понижается [4].

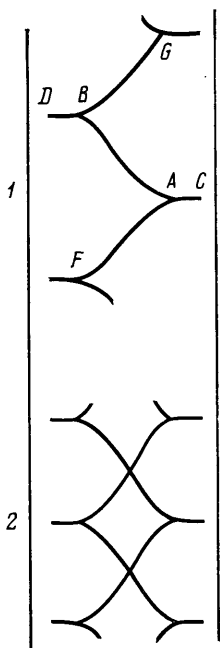
Отметим, что существуют такие стационарные решения, у которых волна вне хребта отсутствует. Они описываются соотношениями  $V(E, h) = \sqrt{h_1}$ ,  $\alpha = 0$ ,  $h_1 \leq h_0$ , где  $h_0$  — глубина вне хребта. Волна имеется только

над той частью хребта, где  $h < h_1$ . Решение такого типа ( $h_1 = h_0$ ) впервые получено в [5]. В этих случаях хребет является волноводом.

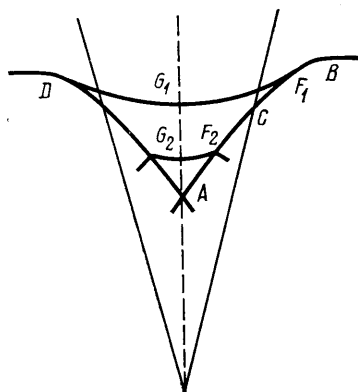
Построим, пользуясь изложенной выше моделью распространения уединенных волн, стационарное периодическое решение над подводным хребтом, зависящее от параметров  $h_1$  и  $h_2$ . Система фронтов волн (фиг. 1, кривая 1) в каждом периоде состоит из фронтов волн дозвуковых решений  $AC$  и  $DB$ , описываемых соотношениями  $V(E, h) = \sqrt{h_1}$ ,  $\alpha = 0$ ,  $h_1 \leq h_0$ , и фронтов волн сверхзвуковых решений  $AB$  и  $BG$ , описываемых соотношениями

$$\begin{aligned} \cos \alpha / V(E, h) &= \cos \alpha_i / V(E_i, h_2), \\ \sin \alpha E &= \sin \alpha_i E_i, \\ \beta_i &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8}{3} \left[ \sqrt{\frac{h_1}{h_2}} - 1 \right]}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\alpha_i = -(-1)^i 1,5\beta_i, \quad E_i = (\beta_i h_2)^3$$



Фиг. 1



Фиг. 2

где  $h_2$  — глубина в точках  $A$  и  $B$ ,  $i=1, 2$ , для первого и второго решения соответственно.

Условия (2.2) обеспечивают стационарность трехсолитонной конфигурации, т. е. параллельность оси  $y$  траектории точки пересечения солитонов. Трехсолитонная конфигурация играет здесь роль каустики. Вся система волн движется как единое целое со скоростью  $\sqrt{h_1}$  вдоль хребта.

Сместим построенное решение на некоторое произвольное расстояние по оси  $y$  не кратное расстоянию между волнами, соответствующими разным периодам. Рассмотрим систему волн, составленную из волн исходного и смешанного решений (фиг. 1, кривая 2). Это также стационарное решение, поскольку смещенная и исходная системы волн пересекаются только в сверхзвуковых участках и при этом угол между фронтами волн больше  $1,5 (\beta_1 + \beta_2)$ , где  $\beta_1$  и  $\beta_2$  — значения параметра  $\beta$  пересекающихся волн, что следует из свойств сверхзвуковых решений (2.1) с учетом соотношений (2.2). Система из  $n$  смешанных решений также является стационарным решением. Если хребет симметричный, то система волн двух решений, сдвинутых друг относительно друга на половину периода вдоль оси  $y$ , симметрична. Поэтому ничего не изменится, если вдоль гребня хребта поместить вертикальную стенку. Систему волн, находящихся по одну сторону от стенки, можно рассматривать как волну, захваченную берегом.

**3. Распространение волн над полубесконечным расширяющимся хребтом с линейчатой поверхностью.** Пусть рельеф дна имеет вид  $h = h(\varphi)$ , где

$\varphi$  — полярный угол, отсчитываемый от оси  $y$  по часовой стрелке ( $\varphi = \arctg(x/y)$ ). Пусть  $dh/d\varphi \leq 0$  при  $\varphi_1 < \varphi < 0$ ,  $dh/d\varphi \geq 0$  при  $0 < \varphi < \varphi_2$  и  $h(\varphi) = h_0$  вне интервала  $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$ . Такой рельеф дна можно рассматривать как модель полубесконечного подводного хребта. Он сходен с подводной частью мыса или выступа береговой линии. Пусть на хребет набегают волна с прямолинейным фронтом и постоянной амплитудой. Будем искать автомодельные решения  $E = E(\varphi)$ ,  $\alpha = \alpha(\varphi)$ . Через  $\gamma$  обозначим угол между нормалью к фронту и полярным радиусом:  $\gamma = \alpha + \varphi$ .

Для автомодельных решений уравнения (1.1) запишем в виде

$$\frac{dE}{d\varphi} = - \frac{dh}{d\varphi} \frac{VV_h E \cos^2 \gamma}{VV_h E \cos^2 \gamma - V^2 \sin^2 \gamma} \quad (3.1)$$

$$\frac{d\gamma}{d\varphi} = 1 + \frac{d\alpha}{d\varphi} = 1 + \frac{dh}{d\varphi} \frac{VV_h \cos \gamma \sin \gamma}{VV_h E \cos^2 \gamma - V^2 \sin^2 \gamma}$$

При положительном знаменателе решение дозвуковое, а при отрицательном — сверхзвуковое. Если при малых изменениях угла глубина меняется значительно, то единицей в нижнем уравнении можно пренебречь и, заменяя  $\gamma$  на  $\alpha$ , получить интегралы (2.1). Поэтому решения (3.1) во многом сходны со стационарными решениями. Однако в решениях (2.1) величина  $\alpha$  не меняет своего знака, в то время как в решениях (3.1) знак  $\gamma$  может меняться. Кроме того, параметры волны в точках, находящихся на одной глубине по разные стороны от гребня хребта, для решений (3.1) различны. Поэтому автомодельное решение задачи о набегающей однородной волне на хребет не может состоять только из решений (3.1).

Автомодельными решениями над плоским дном помимо однородных волн являются также центрированные простые волны, задаваемые условиями [6]

$$VV_h E \cos^2 \gamma - V^2 \sin^2 \gamma = 0, \quad \alpha \pm J = \text{const}$$

$$J = \int \sqrt{\frac{V_h}{VE}} dE \quad (3.2)$$

которые для волн малой амплитуды и малых величин  $\gamma$  имеют вид

$$\gamma = \mp \beta/2, \quad \alpha \pm 1,5\beta = \text{const} \quad (3.3)$$

Очевидно, автомодельное решение в общем случае может состоять из решений (3.1), центрированных простых волн вне хребта, разрывов, у которых траектории точек пересечения прямые линии, исходящие из начала координат, а также участков, где волна отсутствует (зоны тени).

Рассмотрим случай, когда хребет симметричен относительно оси  $y$ , а набегающая волна движется параллельно гребню хребта. Докажем существование решения, указав способ его построения.

Пусть набегающая волна дозвуковая. Проведем линию фронта волны (кривая  $AB$  на фиг. 2), соответствующую непрерывному автомодельному решению:  $BC$  — простой волне (3.2),  $AC$  — сверхзвуковому решению над хребтом (3.1). Из каждой точки кривой  $CB$  проведем касательную, соответствующую однородному участку, переходящую над хребтом в фронт дозвукового решения (кривая  $F_1G_1$ ). Введем в каждой точке кривой  $AC$  автомодельную трехсолитонную конфигурацию и продолжим фронт ее второй волны фронтом дозвукового решения (кривая  $F_2G_2$ ). Чтобы найти решение задачи, среди построенного семейства решений, нужно найти такое, что  $\alpha_G = 0$ , и продолжить его за гребень хребта симметричным образом.

Можно доказать, пользуясь (3.1), что если точка  $F$  совпадает с точкой  $B$ , то  $\alpha_G < 0$ . Допустим  $\alpha_G > 0$ , когда точка  $F$  совпадает с точкой  $A$ . Тогда из соображений непрерывности следует, что существует такое положение точки  $F$  на кривой  $AB$ , когда  $\alpha_G = 0$ , а значит, существует реше-

ние одного из двух типов, фронты волн которых на фиг. 2 соответствуют кривым  $BG_1D$  и  $BG_2D$ . Решение первого типа непрерывное, второе — с разрывами на склоне хребта. В обоих случаях происходит захват энергии волны хребтом. Если же  $\alpha_c > 0$ , когда точка  $F$  совпадает с точкой  $A$ , то из соотношений (1.4) следует, что в точке  $A$  можно ввести пересечение волн и получить решение третьего типа (кривая  $BAD$ ). В этом случае хребет как бы разрезает волну и ее амплитуда над хребтом понижается. В случае сверхзвукового набегающая волна вне хребта и решение первого типа отсутствуют. При доказательстве предполагалось, что отношение глубины вне хребта к глубине над хребтом не слишком велико и полярный угол, в котором заключен хребет, не слишком велик по сравнению с углом между характеристиками, что требуется для выполнения предположений о малости амплитуды солитона.

Очевидно, узким низким хребтам соответствуют решения первого типа, а широким и высоким — второго и третьего типа. Рассмотрим детальнее вопрос о зависимости типа решения от высоты хребта, угла, в котором он заключен, и амплитуды набегающей волны. Рассмотрим сначала предельный случай — хребет почти цилиндрический, т. е. изменением полярного угла над хребтом можно пренебречь и использовать соотношения (2.1) в качестве приближенных решений уравнений (3.1). Был аналитически применен описанный выше алгоритм. Пусть  $H = (h_0 - h)/h_0$  — относительное возвышение хребта. Существует некоторое критическое значение  $H = H_*(\beta_0)$ , где  $\beta_0$  — параметр  $\beta$  набегающей волны, которое находится из системы соотношений

$$\begin{aligned} \sin \alpha E &= \sin \alpha_c E_c, & E &= (\beta h_*)^3, & E_c &= (\beta_c h_0)^3 \\ \frac{\cos \alpha}{V(E, h_*)} &= \frac{\cos \alpha_c}{V(E_c, h_0)}, & \alpha &= 1,5\beta, & \beta_c &= 0,75\beta_0, & \alpha_c &= 0,375\beta_0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

При  $H < H_*(\beta_0)$  имеется только непрерывное решение  $\alpha = 0$ ,  $V(E, h) = V(E_0, h_0)$ . При  $H > H_*(\beta_0)$  помимо решения первого типа имеются решения второго и третьего типа, фронты волн которых изображены на фиг. 3 полностью, т. е. вместе с фронтами волн, отслоившихся в трехсолитонных конфигурациях и пересечении (решение третьего типа показано штриховой линией),  $h_*$  — глубина в точках  $F$  и  $N$ . Кривые  $E_2L_2$ ,  $K_2M_2$  и  $E_3L_3$ ,  $K_3M_3$  соответствуют фронтам простых волн, где энергия падает до нуля. Для наглядности хребет на фигуре расширен. Полученные автомодельные решения можно рассматривать как решения, возникшие на значительном удалении от конца полубесконечного цилиндрического хребта. Полагая  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $H_*$  малыми величинами, из (3.4) получаем

$$H = \frac{21}{16} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) A_0 \approx 0,555 A_0$$

где  $A_0 = 0,75\beta_0^2$  — относительная амплитуда солитона.

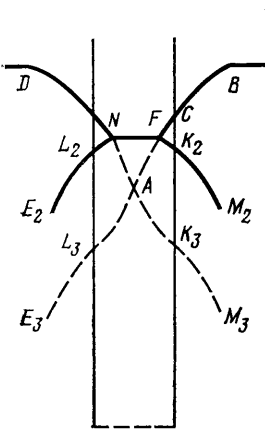
Таким образом, единственность решения достигается только в случае низких хребтов.

Пусть хребет имеет плоскую вершину, а его края круто обрываются так, что можно полагать  $h(\varphi) = 1$  при  $|\varphi| > \varphi_0$ ,  $h(\varphi) = h_1$  при  $|\varphi| < \varphi_0$ . Случай  $\varphi_0 = 0$  уже рассмотрен выше. При  $\varphi_0 \neq 0$  решения искались численно с использованием описанного выше алгоритма. Разделим решения типа 2 на подтипы: 2а, когда трехсолитонные конфигурации на склоне хребта, и 2б — на плоской части. Зафиксировав параметры  $\beta_0$  и  $H$ , будем изменять  $\varphi_0$ . Численный анализ показал следующее.

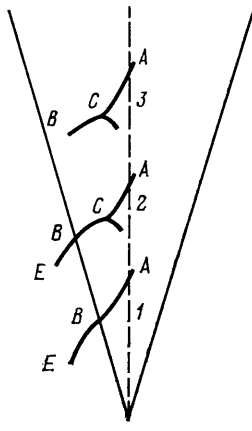
Пусть  $H < H_*(\beta_0)$ . При  $\varphi_0 = 0$  имеем решение типа 1. По мере увеличения  $\varphi_0$  достигается такое его значение, где появляется еще одно решение типа 2 с трехсолитонной конфигурацией на верхнем краю склона, которое переходит в два решения типов 2а и 2б. Затем решение типа 2а переходит

в решение типа 1. При дальнейшем увеличении  $\varphi_0$  последнее сливается с первоначальным решением типа 1 и исчезает, остается решение типа 2б.

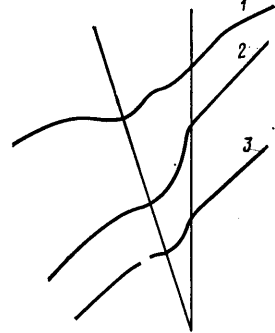
Пусть  $H > H_*(\beta_0)$ . При  $\varphi_0 = 0$  имеется три решения следующих типов: 1, 2а, 3. При увеличении  $\varphi_0$  первое и второе решения при некотором его значении  $\delta$  сливаются в одно решение типа 1, которое затем пропадает. При больших значениях угла есть решение типа 3, которое затем переходит в решение типа 2б. При более низких хребтах решение типа 2б появляется раньше, а первое и второе решения сохраняются дольше. Расчеты показывают, что величина  $\delta$  обычно значительно меньше угла между характеристиками. Аналитическое исследование применения алгоритма для хребтов, относительная высота которых велика по сравнению с



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

относительной амплитудой волны, дает следующее значение этого угла:

$$\delta = 0,5(0,75)^{5,5} \beta_0^4 h_0^3 [h_1(h_0 - h_1)]^{-1,5} \quad (3.5)$$

Заметим, что для хребтов с функцией  $h(\varphi)$  общего вида угол, занимаемый дозвуковым решением, не может быть больше величины порядка  $\beta_0^4/H^{1,5}$  ( $H$  — относительное возвышение), что согласуется с формулой (3.5), так как в противном случае энергии, поступающей на хребет, не хватит для формирования решения.

Таким образом, при  $H > H_*(\beta_0)$  нелинейный захват возможен, если хребет узкий. Кроме того, участок с повышенной амплитудой может возникать и при широком хребте (решение типа 2б). Однако повышение амплитуды волны здесь не более чем в 4 раза по сравнению с остальными участками, что следует из рассмотрения соотношений (1.4) с учетом (1.3).

Наличие неединственности решения в большинстве случаев объясняется тем, что при рассмотрении хребта с линейчатой поверхностью осуществляется абстрагирование от стадии формирования решения на конце хребта. Очевидно, если сгладить функцию  $h(x, y)$  на конце хребта, то автомодельное решение сформируется на значительном удалении от конца и будет единственным. Если конец заострен и высота набирается медленно, то сформируется решение типа 1 или 2. Если конец хребта тупой или происходит быстрый набор высоты, то сформируется решение третьего типа.

**4. Отслоившиеся волны и их отражение.** Можно доказать методом, сходным с использованием в предыдущем пункте, что для волн, отслоившихся в трехсолитонных конфигурациях и возникших после пересечения, всегда существует один из трех вариантов продолжения. Фронты волн, соответствующие решениям трех типов, изображены на фиг. 4. В первом случае волна полностью выходит с хребта с последующим образованием простой волны (кривая  $BE$ ), где энергия падает до нуля, волна рассеивается. Во втором случае решение содержит простую волну, участок до-

звукового решения (кривая  $BC$ ) и трехсолитонную конфигурацию в точке  $C$ . Энергия волны частично уходит с хребта и рассеивается, частично захватывается на склоне и частично отражается. Третий тип содержит дозвуковое решение (кривая  $BC$ ), такое, что в точке  $B$  энергия волны равна нулю, и трехсолитонную конфигурацию в точке  $C$ . Волна отражается, при этом часть ее энергии захватывается хребтом за счет расширения участка дозвукового решения.

В построенных симметричных решениях отраженные волны взаимодействуют друг с другом. Для исследования их взаимодействия можно применять описанный ранее алгоритм построения решения и затем снова продолжить отслоившиеся волны, получив решения, сходные с периодической захваченной волной. Проведение детального исследования здесь затруднительно. В случае хребта с обрывистыми склонами можно доказать, что число отражений  $n$  конечно, и оценить возможное число  $n$ . Введем величину  $I = |\alpha| + 1,5\beta$ . Пусть  $I_i$  — ее значение в набегающей на склон волне перед  $i$ -м отражением от склона. Можно проверить, что в случае отражения без потери энергии  $I_{i+1} = I_i - 2\varphi_0$ , а в случае отражения с рассеянием или при наличии участка дозвукового решения над плоской частью  $I_{i+1} < I_i - 2\varphi_0$ . Поэтому  $n < I_i / 2\varphi_0$ , а, значит, в случае узкого хребта число отражений может быть значительным.

**5. Косое набежание на несимметричный хребет.** Случай косого набега на несимметричный хребет был рассмотрен в упрощенной постановке, когда угол, в котором заключен хребет, мал. Из соотношений (3.1) следует, что решение представимо в виде  $E = E_0 + E_1 + o(E_1)$ ,  $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 + o(\alpha_1)$ , где  $E_0$  и  $\alpha_0$  удовлетворяют (2.1), а поправки к стационарному решению  $E_1$ ,  $\alpha_1$  находятся из уравнений

$$\frac{dE_1}{d\varphi} = -\varphi \frac{d}{d\varphi} \frac{VV_h E V^2 \sin 2\alpha}{VV_E E \cos^2 \alpha - V^2 \sin^2 \alpha}$$

$$\frac{d\alpha_1}{d\varphi} = \varphi \frac{d}{d\varphi} \frac{VV_h [(VV_E E + V^2) + (VV_E E - V^2) \cos 2\alpha]}{VV_E E \cos^2 \alpha - V^2 \sin^2 \alpha}$$

$$\alpha = \alpha_0, \quad E = E_0$$

Если положить  $dh/d\varphi > 0$  при  $\varphi > 0$  и  $dh/d\varphi < 0$  при  $\varphi < 0$ , то  $dE_1/d\varphi < 0$ ,  $d\alpha_1/d\varphi > 0$ . Поэтому значение величины  $\alpha$  слева от хребта меньше, чем справа, а величины  $E$  слева больше, чем справа. Введя вне хребта две центрированные простые волны (фиг. 5), можно так подобрать их интенсивность, что параметры волны по разные стороны от хребта совпадут. При дозвуковом набегаании простые волны расположены по разные стороны от хребта (кривая 1), а при сверхзвуковом — по одну сторону (кривая 2). Между простыми волнами в сверхзвуковом решении имеется участок с пониженной амплитудой. Если энергия набегающей волны невелика, то образуется зона тени (кривая 3). При исследовании предполагалось, что простые волны не достигают склона хребта, т. е. набежание волны не близко к звуковому. В случае околосзвукового набегаания, по-видимому, имеются решения с разрывами.

Таким образом, система (1.1) с учетом возникающих при ее решении трехсолитонных конфигураций и пересечений позволяет описать распространение волн над подводными хребтами. Имеются как одиночные, так и периодические захваченные волны. Если угол между направлением распространения волны и гребнем хребта велик по сравнению с углом между характеристиками, то волна сильно разворачивается хребтом, растягивается и ее амплитуда падает, захвата не происходит. Если угол мал, то в зависимости от соотношения между относительной высотой хребта и относительной амплитудой волны имеются два качественно различных решения. Если высота хребта невелика, то происходит увеличение амплитуды волны, нелинейный захват. Если хребет высокий, то волна как бы разрезается хребтом, расслаивается на несколько волн. За счет этого их амплитуды меньше, чем вне хребта, за исключением, быть может, точек пересечения волн.

Автор благодарит А. Г. Куликовского и А. А. Бармина за внимание к работе, полезные обсуждения и ценные замечания при подготовке статьи к печати.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Grimshaw R.* The solitary wave in water of variable depth. Pt 2.— *J. Fluid Mech.*, 1971, v. 46, № 3, p. 611—622.
2. *Miles J. W.* Obliquely interacting solitary waves.— *J. Fluid Mech.*, 1977, v. 79, № 1, p. 157—169.
3. *Miles J. W.* Resonantly interacting solitary waves.— *J. Fluid Mech.*, 1977, v. 79, № 1, p. 171—179.
4. *Куликовский А. Г., Реутов В. А.* Распространение нелинейных волн над полубескопечными подводными впадинами и хребтами.— *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1980, № 2, с. 53—61.
5. *Биченков Е. П., Гарипов Р. М.* Распространение волн на поверхности тяжелой жидкости в бассейне с неровным дном.— *ПМТФ*, 1969, № 2, 21—26.
6. *Реутов В. А.* О поведении возмущений уединенной и периодических волн на поверхности тяжелой жидкости.— *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1976, № 5, с. 156—159.

Москва

Поступила в редакцию  
10.IV.1984