**МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 · 1985**

УДК 532.546

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ С ПРЕДЕЛЬНЫМ ГРАДИЕНТОМ

БАСАК Н. К., ДОМБРОВСКИЙ Г. А.

Для рассмотренного ранее [1] закона фильтрации с предельным градиентом получено точное решение сформулированной в [2] задачи о плоском стационарном движении несжимаемой жидкости в канале с прямоугольным уступом. Отмечены частные случаи полученного решения, представляющие собой решения задач об обтекании ломаной стенки и о движении от точечного источника в полосе.

Пусть x, y – прямоугольные декартовы координаты точки плоскости движения; $z=x+iy$ $(i=\sqrt{-1})$; v – модуль вектора скорости фильтрации; θ – угол наклона вектора скорости фильтрации к оси x; $\varphi=-H+\text{const}$, где H – напор; ψ – функция тока; $\Phi(v)$ – функция, характеризующая закон фильтрации [3].

Задача решается в предположении, что функция $\Phi(v)$ определена параметрически (параметр σ, $\sigma\geqslant 0$) формулами

$$\Phi=\frac{\lambda e^\sigma}{\sigma+1},\qquad v=\frac{\lambda\sigma e^\sigma}{a}$$

где λ и a – произвольные положительные постоянные.

Для функций $\varphi(\sigma,\theta)$, $\psi(\sigma,\theta)$ имеем в этом случае систему уравнений

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=\frac{a}{\sigma^2}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma},\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}=-\frac{a}{\sigma^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$$

решение которой допускает представление [4]

$$\varphi=a\sigma^{-1}\operatorname{Re}W(\omega),\qquad \psi=\operatorname{Im}\left[\int_0^\omega W(\omega)\,d\omega-\sigma W(\omega)\right]$$

где $W(\omega)$ – произвольная аналитическая функция комплексного переменного $\omega=\sigma+i\theta$.

Связь между координатами соответствующих точек плоскостей ω и z осуществляется по формуле перехода

$$\frac{\lambda}{a}\bar{z}=\frac{1}{2\sigma}[W(\omega)+\overline{W(\omega)}]e^{-\omega}+\int e^{-\omega}W'(\omega)\,d\omega$$

которую можно получить из формулы (1.6) работы [1].

Исследованию подлежит фильтрационное движение между прямой $y=h$ ($h=\text{const}>0$) и ломаной, состоящей из полупрямой $y=l$, $x\leqslant 0$ ($l=\text{const}>0$, $l<h$), отрезка $(0, l)$ оси y и полупрямой $y=0$, $x\geqslant 0$. Границы канала, в котором происходит движение, непроницаемые. Модуль вектора скорости в бесконечности слева принимает значение $v_1=q/(h-l)$, в бесконечности справа – значение $v_2=q/h$. Соответствующие значения σ обозначим σ_1 и σ_2. В окрестности начала координат образуется застойная зона.

Рассматриваемому потоку в плоскости ω соответствует полуполоса $-\pi/2\leqslant\theta\leqslant 0$, $\sigma\geqslant 0$, на границе которой имеем следующее условие для функции тока:

$$\psi(\sigma,-\pi/2)=0 \quad (\sigma\geqslant 0), \quad \psi(0,\theta)=0 \quad (-\pi/2\leqslant\theta\leqslant 0)$$
$$\psi(\sigma,0)=0 \quad (0\leqslant\sigma<\sigma_2), \quad \psi(\sigma,0)=q \quad (\sigma_2<\sigma<\sigma_1)$$
$$\psi(\sigma,0)=0 \quad (\sigma>\sigma_1)$$

Записанное граничное условие выполняется, если

$$\operatorname{Im} W=0 \quad (\theta=-\pi/2,\ \sigma\geqslant 0), \quad \operatorname{Re} W=0 \quad (\sigma=0,\ -\pi/2\leqslant\theta\leqslant 0)$$
$$\operatorname{Im} W=q(\sigma_2^{-1}-\sigma_1^{-1}) \quad (\theta=0,\ 0\leqslant\sigma<\sigma_2)$$
$$\operatorname{Im} W=-q\sigma_1^{-1} \quad (\theta=0,\ \sigma_2<\sigma<\sigma_1), \quad \operatorname{Im} W=0 \quad (\theta=0,\ \sigma>\sigma_1)$$

При помощи преобразования $\zeta=-\operatorname{ch} 2\omega$ отобразим полуполосу $-\pi/2\leqslant\theta\leqslant 0$, $\sigma\geqslant 0$ на верхнюю полуплоскость комплексного переменного $\zeta=\xi+i\eta$. На границе $\eta=0$ будем иметь

$$\operatorname{Im} W=0 \quad (\xi\geqslant 1), \quad \operatorname{Re} W=0 \quad (-1\leqslant\xi\leqslant 1)$$
$$\operatorname{Im} W=q(\sigma_2^{-1}-\sigma_1^{-1}) \quad (-\operatorname{ch} 2\sigma_2<\xi\leqslant -1)$$
$$\operatorname{Im} W=-q\sigma_1^{-1} \quad (-\operatorname{ch} 2\sigma_1<\xi<-\operatorname{ch} 2\sigma_2)$$
$$\operatorname{Im} W=0 \quad (\xi<-\operatorname{ch} 2\sigma_1)$$

Для определения функции $W(\zeta)$ применяем формулу Келдыша — Седова [5, 6]

$$W(\zeta)=\frac{q}{\pi f(\zeta)}\left[-\frac{1}{\sigma_1}\int_{-\operatorname{ch} 2\sigma_1}^{-\operatorname{ch} 2\sigma_2}\frac{f(t)\,dt}{t-\zeta}+\left(\frac{1}{\sigma_2}-\frac{1}{\sigma_1}\right)\int_{-\operatorname{ch} 2\sigma_2}^{-1}\frac{f(t)\,dt}{t-\zeta}\right]+$$
$$+\frac{W(\infty)}{f(\zeta)}=\frac{q}{\pi f(\zeta)}\sum_{k=1}^{2}\frac{\delta_k}{\sigma_k}\int_{-1}^{-\operatorname{ch} 2\sigma_k}\frac{f(t)\,dt}{t-\zeta}+\frac{W(\infty)}{f(\zeta)}$$
$$f(\zeta)=\sqrt{\frac{\zeta-1}{\zeta+1}}, \qquad \delta_k=(-1)^{k+1}$$

После вычисления интегралов и определения постоянной $W(\infty)$ из условия ограниченности функции $W(\zeta)$ при $\zeta=1$ $(W(\infty)=0)$ приходим к следующему выражению для искомой функции $W(\omega)$:

$$W(\omega)=\frac{q}{\pi}\sum_{k=1}^{2}\frac{\delta_k}{\sigma_k}\ln\frac{\operatorname{sh}(\omega-\sigma_k)}{\operatorname{sh}(\omega+\sigma_k)}$$

Далее осуществляется переход к физической плоскости z. В результате вычисления входящего в формулу перехода интеграла и определения постоянной интегрирования из условия $z=il$ при $\sigma=\infty$ получаем

$$z+il=\frac{qa}{\pi\lambda}\sum_{k=1}^{2}\frac{\delta_k}{\sigma_k}\left[\frac{e^{-\omega}}{2\sigma}\ln\frac{\operatorname{ch} 2(\sigma-\sigma_k)-\cos 2\theta}{\operatorname{ch} 2(\sigma+\sigma_k)-\cos 2\theta}-\right.$$
$$\left.-e^{-\sigma_k}\ln\left(\operatorname{cth}\frac{\omega-\sigma_k}{2}\right)+e^{\sigma_k}\ln\left(\operatorname{cth}\frac{\omega+\sigma_k}{2}\right)\right]$$

причем величины l и q в этой формуле связаны соотношением

$$l=\frac{qa}{\lambda}\left(\frac{1}{\sigma_2 e^{\sigma_2}}-\frac{1}{\sigma_1 e^{\sigma_1}}\right)$$

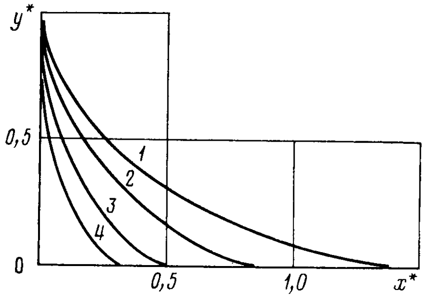
вытекающим из равенства

$$l=\frac{q}{v_2}-\frac{q}{v_1}$$

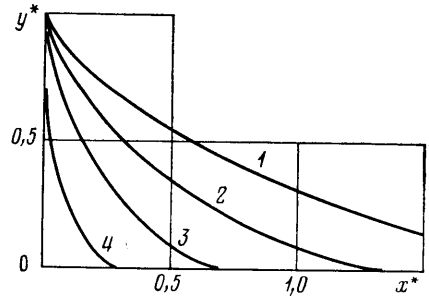
Уравнение границы застойной зоны получаем как уравнение линии, на которой $\sigma=0$, в виде

$$\frac{z(\theta)}{l}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\sigma_2 e^{\sigma_2}}-\frac{1}{\sigma_1 e^{\sigma_1}}\right)^{-1}\sum_{k=1}^{2}\frac{\delta_k}{\sigma_k}\left[\operatorname{sh}\sigma_k \ln\frac{\operatorname{ch}\sigma_k+\cos\theta}{\operatorname{ch}\sigma_k-\cos\theta}-\right.$$
$$\left.-\frac{\operatorname{sh}2\sigma_k e^{i\theta}}{\operatorname{sh}^2\sigma_k+\sin^2\theta}+2i\operatorname{ch}\sigma_k \operatorname{arctg}\frac{\sin\theta}{\operatorname{sh}\sigma_k}\right]$$

На фиг. 1 представлены в координатах $x^*=0{,}1\pi x/l$, $y^*=y/l$ результаты проведенного по этой формуле расчета. В качестве параметров, от которых



Фиг. 1



Фиг. 2

зависит вид границы застойной зоны, приняты величины $b_1=av_1/\lambda=\sigma_1 e^{\sigma_1}$ и $b_2=av_2/\lambda=\sigma_2 e^{\sigma_2}$. Кривые *1–4* рассчитаны при $b_1=4$ и значениях параметра b_2, равных 0,2; 0,4; 1; 3.

Если в полученных формулах осуществить предельный переход при $\sigma_2\to\sigma_1$ и $l=\text{const}$, то придем к формулам, решающим задачу об обтекании фильтрационным потоком со скоростью v_1 в бесконечности стенки с прямоугольным уступом. В частности, получаем следующее уравнение границы застойной зоны:

$$\frac{z(\theta)}{l}=\frac{e^{\sigma_1}}{\pi(\sigma_1+1)}\left\{(\sigma_1\operatorname{ch}\sigma_1-\operatorname{sh}\sigma_1)\ln\frac{\operatorname{ch}\sigma_1+\cos\theta}{\operatorname{ch}\sigma_1-\cos\theta}+\right.$$
$$+\left[\frac{\operatorname{sh}2\sigma_1-3\sigma_1\operatorname{ch}2\sigma_1+\sigma_1}{\operatorname{sh}^2\sigma_1+\sin^2\theta}+\frac{\sigma_1\operatorname{sh}^2 2\sigma_1}{(\operatorname{sh}^2\sigma_1+\sin^2\theta)^2}\right]e^{i\theta}-$$
$$\left.-i\left[\frac{2\sigma_1\sin\theta}{\operatorname{sh}^2\sigma_1+\sin^2\theta}+2(\operatorname{ch}\sigma_1-\sigma_1\operatorname{sh}\sigma_1)\operatorname{arctg}\frac{\sin\theta}{\operatorname{sh}\sigma_1}\right]\right\}$$

Результаты проведенного по этой формуле расчета в координатах x^*, y^* представлены на фиг. 2. Кривые *1–4* соответствуют значениям параметра b_1, равным 0,2; 0,4; 1; 4.

Отметим, что частный случай полученного решения при $\sigma_1=\infty$ ($h=l$) представляет собой решение задачи о точечном источнике в полосе [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Басак Н. К., Домбровский Г. А.* Об одном законе фильтрации с предельным градиентом.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1983, № 3, с. 83–85.
2. *Бернадинер М. Г., Ентов В. М.* Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. М.: Наука, 1975. 199 с.
3. *Христианович С. А.* Движение грунтовых вод, не следующее закону Дарси.– ПММ, 1940, т. 4, № 1, с. 33–52.
4. *Домбровский Г. А.* Метод аппроксимаций адиабаты в теории плоских течений газа. М.: Наука, 1964. 158 с.
5. *Келдыш М. В., Седов Л. И.* Эффективное решение некоторых краевых задач для гармонических функций.– Докл. АН СССР, 1937, т. 16, № 1, с. 7–10.
6. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.

Харьков

Поступила в редакцию
30.I.1984