МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 · 1985

УДК 532.546

ОСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ФИЛЬТРАЦИОННОГО ПЕРЕНОСА В СРЕДАХ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

ШВИДЛЕР М. И.

Нерегулярность реальных пористых структур и ее следствие – нерегулярность поля скоростей фильтрующейся жидкости или газа – являются причинами дисперсии жидких масс при фильтрационном переносе, существенно влияющей на качественные и количественные характеристики многих процессов в добыче нефти, химической технологии и т. п.

Исследования дисперсионных эффектов в фильтрационных течениях методологически разделяются в соответствии с масштабом рассматриваемого течения. Уравнения дисперсионного переноса на малых масштабах неизбежно носят феноменологический характер, параметры замыкающих соотношений определяются из эксперимента [1–4]. При рассмотрении течений существенно больших масштабов, для которых малыми являются характерные масштабы изменения таких фильтрационных параметров, как пористость и проницаемость среды, возможно определение всех статистических характеристик поля скорости переноса и формулировка уравнений переноса жидкости (примеси) полем случайной скорости [5–8]. Для получения таких уравнений может быть использована гипотеза о том, что процесс переноса жидких частиц – марковский. Из этого следует справедливость системы дифференциальных уравнений Колмогорова, связывающей плотность вероятностей – концентрацию с моментами поля скорости. Именно таким образом в [5] получены дифференциальные уравнения для средней концентрации и вычислены коэффициенты продольной и поперечной дисперсии, зависящие от параметров неоднородной пористой среды: коэффициента вариации проницаемости и пространственного масштаба неоднородности.

Однако анализ фильтрационной дисперсии с помощью марковской модели в определенной степени игнорирует то обстоятельство, что дисперсии подвержены макроскопические поля истинной концентрации, флуктуирующие из-за случайности поля скорости переноса. Это означает, что могут быть выписаны уравнения относительно концентрации и фильтрационных переменных (скорости фильтрации, давления) и может быть поставлена задача осреднения этой замкнутой системы уравнений. Основная трудность такого анализа дисперсии связана с реализацией осреднения полной системы уравнений фильтрационного переноса [6–8].

Далее рассматривается перенос динамически нейтральной примеси потоком, скорость фильтрации которого флуктуирует на неоднородностях поля проницаемости, в среде, пористость которой также является случайным полем, коррелирующим с полем проницаемости. Показано, что полученное в корреляционном приближении теории возмущений интегродифференциальное уравнение для средней концентрации [8] может быть точно локализованно для ряда полей с конечным масштабом корреляции, проведена локализация для дельта-коррелированных полей пористости и проницаемости и найдены гиперболические уравнения, для которых ставятся корректные задачи Коши и Гурса.

1. Рассмотрим перенос примеси квазиодномерным потоком, средняя скорость которого постоянна, а флуктуации скорости – статистически однородное случайное поле. Пусть для локальной концентрации примеси и фильтрационных переменных имеет место система

$$m\frac{\partial c}{\partial t}+\mathbf{V}\nabla c=0,\qquad \mathbf{V}=-\left(\frac{k}{\mu}\right)\nabla p,\qquad \operatorname{div}\mathbf{V}=0 \tag{1.1}$$

Здесь $m(\mathbf{x})$ и $k(\mathbf{x})$ – случайные поля пористости и проницаемости – функции вектора $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$; μ – вязкость жидкости, транспортирующей примесь; p — давление; $\mathbf{V}$ — скорость фильтрации; t — время; $c(\mathbf{x}, t)$ — локальная концентрация примеси.

Как показано в [8], усредненная в корреляционном приближении метода возмущений система (1.1) имеет вид

$$m_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{W} \nabla u = \frac{1}{m_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \left[M(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \frac{\partial u(\mathbf{z}, \tau)}{\partial \tau} + \right.\right.$$

$$\left. + \mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \nabla_z u(\mathbf{z}, \tau) \right] d\tau + \int_0^t \left[\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \nabla_x u(\mathbf{z}, \tau) + \right.$$

$$\left.\left. + \sum_{i,j} B^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \frac{\partial^2 u(\mathbf{z}, \tau)}{\partial z_i \partial z_j} \right] d\tau \right\} \tag{1.2}$$

$$\mathbf{W} = -(k^*/\mu) \nabla p_0, \qquad \operatorname{div} \mathbf{W} = 0, \qquad \mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{W} m_0^{-1}(t - \tau) \tag{1.3}$$

$$m_0 = \langle m \rangle, \qquad p_0 = \langle p \rangle, \qquad u = \langle c \rangle, \qquad M(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \langle m'(\mathbf{x}) m'(\mathbf{z}) \rangle$$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \langle m'(\mathbf{x}) \mathbf{V}'(\mathbf{z}) \rangle, \qquad B^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \langle \mathbf{V}_i'(\mathbf{x}) \mathbf{V}_j'(\mathbf{z}) \rangle$$

Здесь k^* — эффективная проницаемость поля $k(\mathbf{x})$, определяемая системой (1.3), штрих и угловые скобки символизируют флуктуации и осреднение по ансамблю реализаций случайных полей.

Таким образом, уравнение для средней концентрации (1.2) нелокально — оно связывает производные, определенные в разных точках пространства — времени. Точнее, правая часть уравнения — это просуммированные по времени с весами — корреляциями M, $\mathbf{Q}$, B значения соответствующих производных для некоторой точки, «плывущей» со средней скоростью $\mathbf{W}/m$ и оказавшейся в момент времени t в точке $\mathbf{x}$, т. е. своеобразная лагранжевая характеристика плывущей точки, проинтегрированная с весами вдоль траектории.

Отсюда следует, что степень нелокальности зависит от «памяти» соответствующих корреляций, т. е. от их корреляционных масштабов. Если считать M, $\mathbf{Q}$ и B дельта-корреляциями, то, как показано в [8], уравнение (1.2) локализуется. Однако переход к пределу дельта-корреляции под знаком первого интеграла до его дифференцирования по времени приводит к эллиптическому в пространстве $(\mathbf{x}, t)$ уравнению для средней концентрации. Для этого уравнения некорректны как задача Коши, так и начально-краевая задача. В [8] приведен способ регуляризации уравнения, получено для $u(\mathbf{x}, t)$ параболическое уравнение, для которого постановка указанных задач корректна.

Далее будут рассмотрены способы локализации уравнения (1.2) для полей с конечными масштабами корреляции, проведен анализ решений локализованных уравнений и корректно рассмотрен случай дельта-коррелированных полей. Во всех этих случаях для $u(\mathbf{x}, t)$ получены гиперболические уравнения, для которых корректны задачи Коши и Гурса.

2. Рассмотрим одномерный фильтрационный перенос в среде постоянной неслучайной пористости $m = m_0$. Тогда $M = 0$, $V = V(t)$ и уравнение (1.2) имеет вид

$$m_0 \frac{\partial u}{\partial t} + W \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{m_0} \int_0^t B(t, \tau) \frac{\partial^2 u(z, \tau)}{\partial z^2} d\tau \tag{2.1}$$

Пусть корреляционная функция скорости представлена следующим образом:

$$B(t, \tau) = B_0 \exp(-|t - \tau|/\varepsilon), \qquad \varepsilon > 0 \tag{2.2}$$

Как известно, такие корреляции могут соответствовать как реализациям-гармоникам со случайной амплитудой и частотой, так и разрывным процессам телеграфного типа, т. е. характеризовать достаточно широкий класс случайных функций. Для локализации (2.1) из продифференцированных по x и t с учетом (2.2) нелокальных уравнений, исключив интеграл, получим

$$m_0\frac{\partial u}{\partial t}+W\frac{\partial u}{\partial x}+\varepsilon\left[m_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2W\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}+\frac{(W^2-B_0)}{m_0}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=0 \qquad (2.3)$$

Дискриминант формы в квадратных скобках положителен и, следовательно, уравнение (2.3) гиперболического типа. Вводя новую пространственную переменную $y=x-Wt/m_0$, перепишем (2.3) в виде

$$\frac{m_0}{\varkappa^2}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{\theta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad \left(\varkappa^2=\frac{\varepsilon B_0}{m_0},\quad \theta^2=\frac{B_0}{m_0^2}\right) \qquad (2.4)$$

Уравнение (2.4) носит название телеграфного, параметр θ определяет конечную скорость распространения возмущений в подвижной системе координат, параметр $\varkappa$ характеризует диссипацию, дисперсию возмущений. Естественно назвать $\varkappa^2$ коэффициентом дисперсии, а θ — скоростью дисперсии, она равна средней квадратичной скорости жидких частиц. Следует отметить, что подобные уравнения известны в теории молекулярной диффузии (броуновского движения), учитывающей инерцию частиц, и в теории турбулентной диффузии с конечной скоростью [9]. Телеграфное уравнение для средней концентрации диспергируемой фильтрационным потоком примеси получено в работе [10] в предположении конечности времени корреляции скорости блуждания жидкой частицы. В этих случаях принимается гипотеза, что вектор-функция $\{\mathbf{X}(\mathbf{x},t),\ \mathbf{V}(\mathbf{x},t)\}$ марковская и для вводимых в рассмотрение плотностей вероятности выписывается система уравнений Колмогорова, которая при некоторых упрощениях сводится к телеграфному уравнению [9].

Рассмотрим вопрос о постановке дополнительных условий для уравнения (2.4). Пусть, например, задано начальное неслучайное распределение концентрации $c(x,0)=f(x)$. Естественно отнести это условие и к средней концентрации, а для второго дополнительного условия использовать усредненное уравнение переноса (2.1) при $t=0$, т. е. $\partial u(x,0)/\partial t=-Wm_0^{-1}f'(x)$. Таким образом,

$$u(y,0)=f(y),\qquad \partial u(y,0)/\partial t=0 \qquad (2.5)$$

При условиях (2.5) решение уравнения (2.4) имеет вид

$$u(y,t)=\frac{1}{2}\exp-\left(\frac{m_0\theta^2 t}{2\varkappa^2}\right)\Big\{f(y-\theta t)+f(y+\theta t)+$$

$$+\frac{m_0\theta}{2\varkappa^2}\int\limits_{-\theta t}^{\theta t}\left[I_0 z+\frac{\theta t}{\sqrt{\theta^2t^2-\lambda^2}}I_1(z)\right]f(y+\lambda)\,d\lambda\Big\}$$

$$z=\frac{m_0\theta}{2\varkappa^2}\sqrt{\theta^2t^2-\lambda^2} \qquad (2.6)$$

где $I_0(z)$, $I_1(z)$ — функции Бесселя мнимого аргумента.

Рассмотрим эволюцию q — порции примеси, введенной в точке $x=0$ в момент $t=0$. Тогда $f(x)=q\delta(x)$. Эта задача в терминах теории турбулентной диффузии с конечной скоростью рассмотрена в [9], где отмечено, что в соответствии с (2.6) порция примеси, диспергируясь, всегда остается в зоне $|y|\leqslant\theta t$. На границах зоны — фронтах сосредоточено конечное количество примеси $q\exp(-t/2\varepsilon)$, быстро убывающее со временем. Вдали от фронтов при $|y|\ll\theta t$ и $t\gg\varepsilon$ из (2.6) имеем

$$u(y,t)=\frac{q}{2\varkappa}\sqrt{\frac{m_0}{\pi t}}\exp\left(-\frac{m_0y^2}{4\varkappa^2t}\right)$$

т. е. решение (2.4), в котором отсутствует волновой член — параболического уравнения дисперсии. Параболическое уравнение дисперсионного переноса при $\varepsilon\ll t$ может быть получено и непосредственной локализацией уравнения (2.1). В самом деле, при малых ε корреляции (2.2) дельтаобразна и может быть записана в виде

$$B(t,\tau)\sim B_0\varepsilon\delta_\varepsilon(t-\tau)$$

из чего следует, что (2.1) эквивалентно параболическому уравнению

$$m_0\frac{\partial u}{\partial t}+W\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\varepsilon B_0}{m_0}\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\tag{2.7}$$

Перейдем к рассмотрению многомерной дисперсии. Пусть поле скорости фильтрации статистически однородно и, следовательно, корреляционный тензор $B^{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{z})=B^{ij}[\mathbf{W}(t-\tau)/m_0]$. Рассмотрим поля, для которых приведенный к главным осям тензор B^{ij} можно представить в виде

$$B^{ij}=B_0{}^{ij}\exp[-(t-\tau)/\varepsilon_i],\qquad \varepsilon_i=m_0\Delta_i/|\mathbf{W}|$$

Пусть первая ось выбранной системы коллинеарна $\mathbf{W}$. Тогда $\varepsilon_3=\varepsilon_2\neq\varepsilon_1$ и, выполнив процедуру локализации, подобную примененной в одномерной задаче, получим дифференциальное уравнение третьего порядка

$$L(u)-\varepsilon_1\left(\frac{\partial L}{\partial t}+\frac{W}{m_0}\frac{\partial L}{\partial x_1}\right)+(\varepsilon_2-\varepsilon_1)B_0{}^{11}\frac{\partial^2u}{\partial x_1{}^2}=0$$

$$L(u)=m_0\left(m_0\frac{\partial u}{\partial t}+W\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)-$$

$$-\varepsilon_2\left(\frac{1}{m_0}\sum_i B_0{}^{ii}\frac{\partial^2u}{\partial x_i{}^2}-m_0\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-2W\frac{\partial^2u}{\partial x_1\,\partial t}-\frac{W^2}{m_0}\frac{\partial^2u}{\partial x_1{}^2}\right)$$

Если принять $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=\varepsilon$, то локализованное уравнение имеет вид

$$m_0\frac{\partial u}{\partial t}+W\frac{\partial u}{\partial x_1}+\varepsilon\left(m_0\frac{\partial^2u}{\partial t^2}+2W\frac{\partial^2u}{\partial x_1\,\partial t}+\frac{W^2-B_0}{m_0}\frac{\partial^2u}{\partial x_1{}^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{m_0}\sum_{i\neq1}B_0{}^{ii}\frac{\partial^2u}{\partial x_i{}^2}\tag{2.8}$$

и, как легко убедиться, является уравнением гиперболического типа. Оно лишь правой частью отличается от уравнения одномерной дисперсии (2.3), и выводы о качественном поведении решения (2.3) практически полностью переносятся и на решения (2.8). Действительно, вводя новые пространственные переменные $y_i=(x_i-W_it/m_0)(B_0/B_0{}^{ii})^{1/2}$, $B_0=\sum_i B_0{}^{ii}/3$, перепишем уравнение (2.8) в виде

$$\frac{m_0}{\varkappa^2}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{\theta^2}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\nabla^2u,\qquad \varkappa^2=\frac{\varepsilon B}{m_0},\qquad \theta^2=\frac{B}{m_0{}^2}\tag{2.9}$$

Тогда очевидно, в плывущей со скоростью W/m_0 вдоль первой оси деформированной системе координат возмущение распространяется со скоростью $\theta=\sqrt{B_0}/m_0$. В плывущей, но недеформированной системе скорость распространения возмущений вдоль осей различна, фронтовая поверхность — вытянутый вдоль первой оси эллипсоид вращения. Можно показать, что внутри эллипсоида, вдали от его границы, решение близко к решению параболического уравнения, которое получится из (2.9), если формально положить $\theta=\infty$. Возвращаясь к случаю различных по величине ε_i, примем, что $\varepsilon_i \ll t$ и, следовательно, $B^{ii} \sim B_0^{ii}\varepsilon_i\delta_\varepsilon(t-\tau)$. Тогда локализованное параболическое уравнение имеет вид

$$m_0\frac{\partial u}{\partial t}+W\frac{\partial u}{\partial x_1}=\frac{1}{m_0}\sum_i \varepsilon_i B_0^{ii}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

3. Рассмотрим теперь дисперсию примеси в среде со случайной пористостью, считая для простоты скорость фильтрации V неслучайной и постоянной. В этом случае $B=0$, $\mathbf{Q}=0$, $\mathbf{V}=\mathbf{W}$ и уравнение (1.2) имеет вид

$$m_0\frac{\partial u}{\partial t}+\mathbf{W}\nabla u=\frac{1}{m_0}\int\limits_0^t M(\mathbf{x},\mathbf{z})\,\frac{\partial u(\mathbf{z},\tau)}{\partial \tau}\,d\tau \qquad (3.1)$$

т. е. по существу одномерно, и следовательно, дисперсия в среде случайной пористости продольна в направлении $\mathbf{W}$. Пусть корреляция пористости имеет вид

$$M(\mathbf{x},\mathbf{z})=M_0\exp\left[(\tau-t)/\varepsilon\right],\qquad \varepsilon=m_0\Delta/|\mathbf{W}| \qquad (3.2)$$

Локализовав (3.1), получим уравнение

$$m_0\frac{\partial u}{\partial t}+W\frac{\partial u}{\partial x}+\varepsilon\left[m_0\left(1-\frac{M_0}{m_0^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2W\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}+\frac{W^2}{m_0}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=0 \qquad (3.3)$$

с положительным дискриминантом и, следовательно, гиперболическое. В отличие от уравнения одномерной дисперсии в поле случайной скорости фильтрации (2.3) здесь возмущен коэффициент при $\partial^2u/\partial t^2$, скорости распространения возмущений $V_1=Wm_0^{-1}(1+\psi)^{-1}$ и $V_2=Wm_0^{-1}(1-\psi)^{-1}$ зависят от возмущающего параметра $\psi=\sqrt{M_0}/m_0$ неаддитивно и средняя скорость $V_*=(V_1+V_2)/2=Wm_0^{-1}(1-\psi^2)^{-1}>Wm_0^{-1}$.

Переходя к подвижной, перемещающейся со скоростью V_* системе координат $y=x-V_*t$, перепишем (3.3)

$$m_0\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{W\psi^2}{1-\psi^2}\frac{\partial u}{\partial y}+\varepsilon m_0(1-\psi^2)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\varepsilon W^2\psi^2}{m_0(1-\psi^2)}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (3.4)$$

Отсюда видно, что перенос в плывущей системе координат осуществляется с конечной скоростью распространения возмущений $\theta=Wm_0^{-1}\psi\times\times(1-\psi^2)^{-1}$ и эффективным коэффициентом дисперсии $\varkappa^2=W^2\varepsilon\psi^2\times\times(1-\psi^2)^{-1}m_0^{-1}$. В системе существует регулярный конвективный снос против невозмущенного течения со скоростью $v=-Wm_0^{-1}\psi^2(1-\psi^2)^{-1}$, и потому распределение концентрации будет иметь тенденцию постепенного обеднения в передней части возмущенной зоны при относительном накоплении, а точнее, при более медленном обеднении диспергируемого вещества в области заднего фронта.

Перейдем к анализу задачи Коши для уравнения (3.3), выбрав в качестве дополнительных условий начальное распределение концентрации и начальную производную концентрации по времени, найденную из усредненного интегродифференциального уравнения (3.1) при $t=0$

$$u(x,0)=f(x),\quad \partial u(x,0)/\partial t=-Wm_0^{-1}(1-\psi^2)f'(x) \qquad (3.5)$$

Задача (3.3), (3.5) решается методом Римана и ее решение имеет вид

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left\{f(x-V_1t)\exp\left(-\frac{V_1m_0t}{2\varepsilon W}\right)+f(x-V_2t)\exp\left(-\frac{V_2m_0t}{2\varepsilon W}\right)+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{x-V_1t}^{x-V_2t}\left[\frac{m_0}{2\varepsilon\psi W}J_0(\alpha\sqrt{\gamma})+\frac{(V_1-V_2)\alpha t}{\sqrt{\gamma}}J_0'(\alpha\sqrt{\gamma})\right]\exp\left[\frac{m_0(\zeta-x)}{2\varepsilon W}\right]f(\zeta)\,d\zeta\right\} \tag{3.6}$$

$$\alpha=\frac{m_0(1-\psi^2)^{1/2}}{2\varepsilon\psi W},\qquad \gamma=[\zeta-(x-V_1t)][\zeta-(x-V_2t)]$$

Рассматривая предельный случай $t\ll\varepsilon$ и ограниченные начальные распределения $f(x)$, из (3.6) получим

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left\{\left[1-\frac{t}{2\varepsilon(1-\psi)}\right]f(x-V_1t)+\left[1-\frac{t}{2\varepsilon(1+\psi)}\right]f(x-V_2t)\right\}$$

т. е. произвольное начальное распределение $f(x)$ распадается на две подобные ему волны, движущиеся со скоростями V_1 и V_2. При этом более быстрая волна имеет меньшую высоту. Как показано в [7], в аналогичной задаче при постоянной пористости и случайной скорости фильтрации высоты волн одинаковы, а их средняя скорость равна невозмущенной скорости. В только что рассмотренном случае средняя скорость волн больше невозмущенной.

Вернемся к общему случаю произвольного ε и рассмотрим начальное распределение $f(x)=q\delta(x)$. Легко видеть, что при любом t на фронтах возмущенной зоны $V_2t\leqslant x\leqslant V_1t$ сосредоточено конечное количество примеси: $(q/2)\exp[-t/2\varepsilon(1-\psi)]$ на переднем, соответственно на заднем $(q/2)\exp[-t/2\varepsilon(1+\psi)]$, т. е. больше, чем на переднем. Внутри зоны вдали от фронтов при $t\gg\varepsilon$ в окрестности точки, движущейся со скоростью $Wm_0^{-1}(1+\psi^2)(1-\psi^2)^{-1}$, распределение концентрации близко к гауссову с коэффициентом дисперсии $\varkappa^2(1-\psi^2)(1+\psi^2)^{-1}$. В отличие от последнего оно обладает некоторой асимметрией — правая ветвь убывает несколько медленней, чем левая, что может быть объяснено видом зависимости характеристических скоростей от ψ и ее следствием — более быстрым переходом вещества с переднего фронта в возмущенную зону.

Рассмотрим теперь пористую среду, для которой корреляция $M(x,\ z)$ имеет вид (3.2) и, следовательно, при малых ε дельтообразна $M(x,\ z)\sim\sim M_0\varepsilon\delta_\varepsilon(t-\tau)$. Дифференцируя интеграл в (3.1) и лишь затем переходя к пределу, получим локализованное гиперболическое уравнение

$$m_0\frac{\partial u}{\partial t}+W\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{WM_0\varepsilon}{m_0^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}=0 \tag{3.7}$$

характеристиками которого являются прямые $x=\mathrm{const}$, $t=\mathrm{const}$. Для уравнения (3.7) может быть поставлена начальная задача Коши, а так как уравнение имеет по времени первый порядок, достаточно задать $u(x,\ 0)$. Если для (3.7) рассматривается начально-краевая задача с условиями при $t=t_0$ и $x=x_0$, такая задача называется задачей Гурса и для корректности условия на характеристиках должны быть согласованы.

Пусть, например, $u(x,\ 0)=q\delta(x)$. Тогда, применив преобразование Фурье по переменной x, можно записать решение (3.7)

$$u(x,t)=\frac{q}{\Pi}\int\limits_0^\infty\exp(-W\alpha_0tak)\cos a(xm_0^2-m_0Wt+x\alpha_0^2k^2)\,dk \tag{3.8}$$

$$\alpha_0=\frac{W\varepsilon M_0}{m_0^2},\qquad a=\frac{k}{m_0^2+\alpha_0^2k^2}$$

Очевидно, как и в случае дельтообразной корреляции скорости фильтрации, возмущения концентрации распространяются с неограниченной скоростью. При $\varepsilon \ll t$ решение (3.8) имеет вид

$$u(x,t)=\frac{qm_0}{2\sqrt{\alpha_0 \Pi W t}}\exp\left[-m_0^2\left(x-\frac{Wt}{m_0}\right)\Big/4\alpha_0 Wt\right]$$

т. е. гауссово распределение в подвижной системе координат — решение задачи

$$m_0\frac{\partial u}{\partial t}+W\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\varepsilon M_0 W^2}{m_0^3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x,\ 0)=q\delta(x)$$

Таким образом, замена (3.2) при малых ε на дельта-корреляцию приводит к утрате целого ряда эффектов, отмеченных ранее при анализе точного решения: конечности скорости распространения возмущений, смещения асимптотической скорости гауссовой волны, ее асимметрии и т. п. Уместно отметить, что в рассмотренной в п. 2 задаче о дисперсии в среде постоянной неслучайной пористости переход к дельта-корреляции приводит к асимптотически точному решению.

4. Перейдем к рассмотрению одномерной дисперсии при совместном действии двух некоррелированных возмущающих факторов — случайных пористости и скорости фильтрации. Если принять

$$M(x,\ z)=M_0\exp[(\tau-t)/\varepsilon_m],\quad B(t,\ \tau)=B_0\exp[(\tau-t)/\varepsilon_v]$$

уравнение (1.2) локализуется и имеет третий порядок по x и t. Однако при $\varepsilon_v=\varepsilon_m=\varepsilon$ порядок гиперболического уравнения понижается, и оно имеет вид

$$m_0\frac{\partial u}{\partial t}+W\frac{\partial u}{\partial x}+\varepsilon\left[m_0(1-\psi^2)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2W\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}+\right.$$
$$\left.+\frac{W^2}{m_0}(1-\varphi^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=0,\qquad \varphi=\frac{B}{W^2}\tag{4.1}$$

Поведение решения (4.1) при условиях (3.5) качественно близко поведению решения задачи о переносе в среде со случайной пористостью. Возмущения распространяются с характеристическими скоростями

$$V_1=Wm_0^{-1}(1-\varphi^2)\left[1+\sqrt{\varphi^2+\psi^2-\varphi\psi}\right]^{-1}$$
$$V_2=Wm_0^{-1}\left[1-\sqrt{\varphi^2+\psi^2-\varphi\psi}\right]^{-1}$$

Средняя характеристическая скорость

$$V_*=Wm_0^{-1}(1-\psi^2)^{-1}$$

не зависит от флуктуаций скорости фильтрации. Как и в ранее разобранных случаях, поведение решения вдали от фронтов описывается решением некоторого уравнения параболического типа.

Если корреляции пористости и скорости фильтрации дельтообразны, из (1.2) имеем при $Q=0$

$$m_0\frac{\partial u}{\partial t}+W\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{B_0\varepsilon_v}{m_0}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{M_0\varepsilon_m W}{m_0^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}$$

т. е. гиперболическое уравнение, для которого корректны задачи Коши и Гурса.

В многомерном случае локализация общего уравнения (1.2) в предположении дельтообразности корреляций B, M, $\mathbf{Q}$ приводит к гиперболическому уравнению

$$m_0\frac{\partial u}{\partial t}+\mathbf{W}\nabla u=\frac{1}{m_0}\left\{\sum_j\left(Q_j{}^0\varepsilon_j^{(m,v)}-\frac{M_0\varepsilon^{(m)}}{m_0}W_j\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x_j}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i,j}(B_0{}^{ij}\varepsilon_{ij}^{(v)}-Q_j{}^0\varepsilon_j^{(m,v)}W_i m_0{}^{-1})\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}\right\} \qquad (4.2)$$

где $\varepsilon_{ij}^{(v)}$, $\varepsilon^{(m)}$, $\varepsilon_j^{(m,v)}$ — соответствующие корреляционные масштабы функций B, M, $\mathbf{Q}$.

При коллинеарности первой оси и $\mathbf{W}$ условие корректности задач Коши и Гурса для уравнения (4.2) имеет вид

$$m_0B_0{}^{11}\varepsilon_{11}^{(v)}-2Q_1{}^0\varepsilon_1^{(m,v)}W+M_0\varepsilon^{(m)}W^2m_0{}^{-1}>0 \qquad (4.3)$$

и, как нетрудно проверить, оно выполнено, если время взаимной корреляции скорости фильтрации и пористости удовлетворяет соотношению

$$\varepsilon_1^{(m,v)}\leqslant\min\{\varepsilon_{11}^{(v)},\varepsilon^{(m)}\}$$

Применив к (4.2) преобразование Фурье по пространственным переменным, нетрудно выписать решение начальной задачи Коши. В случае задачи Гурса с согласованными начальными и краевыми условиями для получения решения целесообразно применить преобразование Лапласа.

Как уже упоминалось, грубая локализация (с переменной порядка дифференцирования и предельного перехода) уравнения (1.2) приводит к некорректной задаче [8], регуляризовав которую, можно получить параболическое уравнение дисперсии. Его анализ при $\varepsilon_1^{(m,v)}=\varepsilon_{11}^{(v)}=\varepsilon$ приведен в [8]. Легко убедиться, что форма (4.3) совпадает с коэффициентом дисперсии вдоль первой оси указанного параболического уравнения и ее неотрицательность гарантирует корректность задачи, поскольку коэффициенты дисперсии по другим осям неотрицательны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Scheidegger A. E.* Statistical hydrodynamics in porous media.— J. Appl. Phys., 1954, v. 25, p. 994–1001.
2. *Scheidegger A. E.* The physics of flow through porous media. Toronto: Univ. press, 1958. 236 p. (Рус. перев. Шейдеггер А. Э. Физика течения жидкостей через пористые среды. М.: Гостоптехиздат, 1960. 249 с.)
3. *Николаевский В. Н.* Конвективная диффузия в пористых средах.— ПММ, 1959, т. 23, № 6, с. 1042–1050.
4. *Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А.* Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра, 1970. 335 с.
5. *Мендельсон М. М., Швидлер М. И.* О дисперсионных фильтрационных эффектах в средах со случайными неоднородностями.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1967, № 6, с. 161–184.
6. *Швидлер М. И.* Дисперсия фильтрационного потока в средах со случайными неоднородностями.— Докл. АН СССР, 1975, т. 121, № 1, с. 60–63.
7. *Швидлер М. И.* О дисперсии фильтрационного потока в средах со случайными неоднородностями.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 2, с. 94–98.
8. *Швидлер М. И.* О дисперсии фильтрационного потока.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1976, № 4, с. 65–69.
9. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Наука, 1965. 639 с.
10. *Scheidegger A. E.* On the theory of flow of miscible phases in porous media.— Comptes Rendus et Report-assemblée Générale de Toronto, 1957 (Centbrugge, 1958), v. 2, p. 236–242.

Москва

Поступила в редакцию 27.IX.1983