

УДК 532.529

## ВЛИЯНИЕ ЧАСТИЦ НА ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ В КАНАЛАХ

ДЕРЕВИЧ И. В., ЕРОШЕНКО В. М., ЗАЙЧИК Л. И.

Изучению влияния частиц небольшой концентрации на гидродинамические характеристики турбулентного потока посвящено значительное число экспериментальных и теоретических работ, ссылки на которые можно найти, например, в [1, 2]. В результате проведенных исследований установлено, что присутствие частиц может приводить как к увеличению, так и к снижению гидравлического сопротивления.

В [1] предложена качественная модель снижения гидравлического сопротивления турбулентных течений при введении в них малых концентраций взвешенной примеси. Модель основана на предположении о гашении турбулентных вихрей с пространственным масштабом, меньшим размера частиц. В работах [2–6] для описания влияния частиц на характеристики турбулентного потока применяется уравнение баланса энергии пульсационного движения с дополнительным слагаемым, учитывающим главным образом диссипацию энергии за счет пульсационного скольжения фаз.

В настоящей работе для анализа влияния частиц на интенсивность пульсационного движения используются уравнения баланса вторых одноточечных моментов пульсаций скорости несущей фазы, в которых наряду с диссипацией за счет пульсационного скольжения фаз учитывается эффект рассеяния мелкомасштабных вихрей на частицах, а также дополнительный перенос пульсаций частицами, обусловленный вовлечением частиц в пульсационное движение и миграцией частиц поперек потока.

1. Для вывода уравнений гидродинамики твердой и жидкой (несущей) фаз записываются уравнения движения одиночной сферической частицы радиуса  $a$ , движущейся со скоростью  $V_p(t)$  в жидкости, имеющей скорость  $U(x, t)$  [7]

$$\begin{aligned} \frac{dV_{pi}}{dt} = & \frac{1}{\tau} (U_i(R_p(t), t) - V_{pi}(t)) + \frac{1}{2} \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{d}{dt} (U_i(R_p(t), t) - \\ & - V_{pi}(t)) + \frac{9}{2} \frac{1}{a} \frac{\rho_1}{\rho_2} \sqrt{\frac{\nu}{t}} \int_{-\infty}^t \frac{ds}{\sqrt{t-s}} \frac{d}{ds} [U_i(R_p(s), s) - V_{pi}(s)] \\ & \frac{dR_{fi}}{dt} = V_{pi}, \quad \tau = \frac{2\rho_2 a^2}{9\rho_1 \nu} \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $\rho_1$  и  $\rho_2$  — плотности жидкости и материала частиц,  $R_p(t)$  — координата  $p$ -й частицы,  $\nu$  — кинематическая вязкость жидкости,  $\tau$  — время динамической релаксации частицы. Первый член в правой части (1.1) описывает силу вязкого сопротивления, определяемую законом Стокса; второй член обусловлен присоединенной массой; последний член — сила Бассэ, учитывающая эффект запаздывания. Уравнения движения (1.1) записаны без учета массовых сил и вращения частиц.

Уравнение движения жидкости с небольшой объемной концентрацией частиц имеет вид

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\omega}{\Omega_N} \sum_{p=1}^N \delta(\mathbf{x} - \mathbf{R}_p) \frac{dV_{pi}}{dt} \quad (1.2)$$

где  $\delta(\mathbf{x})$  — трехмерная функция Дирака,  $\omega$  — объем частицы,  $\Omega_N$  — объем области течения,  $N$  — число частиц в объеме  $\Omega_N$ ,  $P$  — давление в жидкости.

Для перехода от лагранжеевого описания движения отдельных частиц к эйлеровому описанию движения твердой фазы определяем объемную концентрацию и скорость твердой фазы

$$C(\mathbf{x}, t) = \frac{\omega}{\Omega_N} \sum_{p=1}^N \delta(\mathbf{x} - \mathbf{R}_p(t))$$

$$V(\mathbf{x}, t) = \sum_{p=1}^N \delta(\mathbf{x} - \mathbf{R}_p(t)) V_p(t) / \sum_{p=1}^N \delta(\mathbf{x} - \mathbf{R}_p(t))$$

Осредняя все характеристики движения жидкой и твердой фаз по ансамблю реализаций турбулентного потока, выделяем осредненные и пульсационные компоненты давления жидкости, концентрации твердой фазы, а также скорости жидкой и твердой фаз

$$P(\mathbf{x}, t) = \langle P(\mathbf{x}, t) \rangle + p(\mathbf{x}, t), \quad \langle p(\mathbf{x}, t) \rangle = 0$$

$$\langle C(\mathbf{x}, t) \rangle = \left\langle \frac{\omega}{\Omega_N} \sum_{p=1}^N \delta(\mathbf{x} - \mathbf{R}_p(t)) \right\rangle \quad (1.3)$$

$$U_i(\mathbf{x}, t) = \langle U_i(\mathbf{x}, t) \rangle + u_i(\mathbf{x}, t), \quad \langle u_i(\mathbf{x}, t) \rangle = 0$$

$$V_i(\mathbf{x}, t) = \langle V_i(\mathbf{x}, t) \rangle + v_i(\mathbf{x}, t)$$

$$\langle V_i(\mathbf{x}, t) \rangle \langle C(\mathbf{x}, t) \rangle = \left\langle \frac{\omega}{\Omega_N} \sum_{p=1}^N \delta(\mathbf{x} - \mathbf{R}_p(t)) V_{pi}(t) \right\rangle \quad (1.4)$$

$$\langle C(\mathbf{x}, t) v_i(\mathbf{x}, t) \rangle = 0 \quad (1.5)$$

Здесь осредненная скорость твердой фазы определена так, чтобы имело место (1.5).

Дифференцируя по времени выражение для осредненной концентрации (1.3) и учитывая определение осредненной скорости твердой фазы (1.4), получаем уравнение баланса массы твердой фазы

$$\frac{\partial \langle C \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \langle C \rangle \langle V_k \rangle = 0 \quad (1.6)$$

Дифференцируя по времени выражение (1.4), используя уравнение движения одиночной частицы (1.1) и учитывая соотношение (1.5), записываем уравнение для осредненной скорости твердой фазы

$$\begin{aligned} \langle C \rangle \left( \frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial t} + \langle V_k \rangle \frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial \langle C \rangle \langle v_i v_k \rangle}{\partial x_k} = \\ = \frac{1}{\tau} \langle C \rangle (\langle U_i \rangle - \langle V_i \rangle) + \frac{1}{\tau} \langle C u_i \rangle + \\ + \frac{1}{2} \frac{\rho_1}{\rho_2} \langle C \rangle \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\langle U_i \rangle - \langle V_i \rangle) + \langle V_k \rangle \frac{\partial}{\partial x_k} (\langle U_i \rangle - \langle V_i \rangle) \right] + \\ + \frac{1}{2} \frac{\rho_1}{\rho_2} \left[ \frac{\partial \langle C u_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \langle C \rangle (\langle u_i u_k \rangle - \langle u_i v_k \rangle) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \langle V_k \rangle \frac{\partial \langle C u_i \rangle}{\partial x_k} \Big] + \frac{9}{2} \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{1}{a} \sqrt{\frac{v}{\pi}} \left\{ \langle C \rangle \int_{-\infty}^t \frac{ds}{\sqrt{t-s}} \frac{\partial}{\partial s} (\langle U_i(\mathbf{x}, s) \rangle - \right. \\
& - \langle V_i(\mathbf{x}, s) \rangle) + \int_{-\infty}^t \frac{ds}{\sqrt{t-s}} \left[ \frac{\partial}{\partial s} (\langle C(\mathbf{x}, t) u_i(\mathbf{x}, s) \rangle - \langle C(\mathbf{x}, t) v_i(\mathbf{x}, s) \rangle) + \right. \\
& + \langle V_k(\mathbf{x}, s) \rangle \frac{\partial}{\partial x_k} (\langle C(\mathbf{x}, t) u_i(\mathbf{x}, s) \rangle - \langle C(\mathbf{x}, t) v_i(\mathbf{x}, s) \rangle) + \\
& \left. \left. + \langle C(\mathbf{x}, t) v_k(\mathbf{x}, s) \rangle \frac{\partial}{\partial x_k} (\langle U_i(\mathbf{x}, s) \rangle - \langle V_i(\mathbf{x}, s) \rangle) \right] \right\} \quad (1.7)
\end{aligned}$$

Осредняя уравнение (1.2) и складывая с уравнением движения твердой фазы, получаем осредненное уравнение баланса импульса потока в целом

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \langle U_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \langle C \rangle \frac{\rho_2}{\rho_1} \left( \frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial t} + \langle V_k \rangle \frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial x_k} \right) = \\
& = - \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( v \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} - \langle u_i u_k \rangle - \langle C \rangle \frac{\rho_2}{\rho_1} \langle v_i v_k \rangle \right) \quad (1.8)
\end{aligned}$$

Как видно из (1.8), частицы, увлекаемые пульсациями несущей фазы, вносят вклад в перенос импульса осредненного движения.

Уравнения для вторых одноточечных моментов пульсаций скорости несущей фазы совпадают с соответствующими уравнениями однофазной жидкости, за исключением членов, связанных с межфазным взаимодействием

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ij} = & - \frac{\rho_2}{\rho_1} \left\{ \left\langle \frac{\omega}{\Omega_N} \sum_{p=1}^N \delta(\mathbf{x} - \mathbf{R}_p(t)) \frac{dV_{p_i}}{dt} u_j(\mathbf{x}, t) \right\rangle + \right. \\
& \left. + \left\langle \frac{\omega}{\Omega_N} \sum_{p=1}^N \delta(\mathbf{x} - \mathbf{R}_p(t)) \frac{dV_p}{dt} u_i(\mathbf{x}, t) \right\rangle \right\} \quad (1.9)
\end{aligned}$$

Подставляя в (1.9) уравнение движение одиночной частицы (1.1) и ограничиваясь для простоты случаем установившегося турбулентного течения жидкости с постоянной концентрацией частиц, получаем выражение для  $\varepsilon_{ij}$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ij} = & - \frac{\rho_2}{\rho_1} \langle C \rangle \left\{ \frac{1}{\tau} (2 \langle u_i u_j \rangle - \langle u_i v_j \rangle - \langle u_j v_i \rangle) + \right. \\
& + \frac{1}{2} \frac{\rho_1}{\rho_2} \left[ \langle V_k \rangle \frac{\partial}{\partial x_k} (\langle u_i u_j \rangle - \langle v_i u_j \rangle) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\langle u_i u_j v_k \rangle - \langle u_i v_j v_k \rangle) \right] + \\
& + \frac{9}{2} \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{1}{a} \sqrt{\frac{v}{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{ds}{\sqrt{t-s}} \left\{ \frac{\partial}{\partial s} [(\langle u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x}, s) \rangle - \langle u_i(\mathbf{x}, t) v_j(\mathbf{x}, s) \rangle) + \right. \\
& + (\langle u_j(\mathbf{x}, t) u_i(\mathbf{x}, s) \rangle - \langle u_j(\mathbf{x}, t) v_i(\mathbf{x}, s) \rangle)] + \\
& + \langle V_k(\mathbf{x}, t) \rangle \langle u_i(\mathbf{x}, t) \rangle \frac{\partial}{\partial x_k} (u_j(\mathbf{x}, s) - v_j(\mathbf{x}, s)) + u_j(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_k} (u_i(\mathbf{x}, s) - v_i(\mathbf{x}, s)) \rangle + \\
& \left. + \langle u_i(\mathbf{x}, t) v_k(\mathbf{x}, s) \rangle \frac{\partial}{\partial x_k} (\langle U_i(\mathbf{x}, t) \rangle - \langle V_i(\mathbf{x}, t) \rangle) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \langle u_j(\mathbf{x}, t) v_k(\mathbf{x}, s) \rangle \frac{\partial}{\partial x_k} (\langle U_j(\mathbf{x}, t) \rangle - \langle V_j(\mathbf{x}, t) \rangle) + \\
& + \frac{\partial}{\partial x_k} (\langle u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x}, s) v_k(\mathbf{x}, s) \rangle - \langle u_i(\mathbf{x}, t) v_j(\mathbf{x}, s) v_k(\mathbf{x}, s) \rangle) \}
\end{aligned}$$

Учет силы Бассэ в выражении для межфазного взаимодействия приводит к появлению членов, описывающих, во-первых, диссипацию турбулентной энергии несущей фазы в тонком пограничном слое, образующемся около частицы в результате взаимодействия с высокочастотными пульсациями жидкости, во-вторых, конвективный перенос пульсаций из-за неоднородности турбулентного потока, в третьих, вклад в порождение и турбулентную диффузию.

При вычислении корреляции пульсаций скорости несущей и твердой фаз и корреляций пульсаций составляющих скорости твердой фазы принимается, что интенсивность пульсационного движения частиц определяется в основном силой сопротивления по закону Стокса при межфазном пульсационном скольжении (первый член в уравнении движения одиночной частицы (1.1)). Тогда, используя полученные в [8] замкнутые выражения для вторых моментов пульсаций скорости несущей и твердой фаз и моментов пульсаций составляющих скорости твердой фазы в неоднородном турбулентном потоке, в которые входят моменты пульсаций скорости несущей фазы, получаем систему уравнений для вторых одноточечных моментов пульсаций скорости несущей фазы при установившемся турбулентном течении жидкости с постоянной концентрацией частиц

$$\begin{aligned}
& \left[ \langle U_k \rangle + \langle V_k \rangle \left( f_2 \frac{\rho_2}{\rho_1} + f_3 + f_5 \right) \right] \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_k} + \\
& + f_5 \langle C \rangle \left[ \langle u_i u_k \rangle \frac{\partial}{\partial x_k} (\langle U_j \rangle - \langle V_j \rangle) + \langle u_j u_k \rangle \frac{\partial}{\partial x_k} (\langle U_i \rangle - \langle V_i \rangle) \right] + \\
& + \langle u_j u_k \rangle \left( \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \frac{\rho_2}{\rho_1} \langle C \rangle f_2 \frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial x_k} \right) + \langle u_i u_k \rangle \left( \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_k} + \frac{\rho_2}{\rho_1} \langle C \rangle f_2 \frac{\partial \langle V_j \rangle}{\partial x_k} \right) + \\
& + \left[ 1 + \langle C \rangle \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} f_1 + f_3 + f_5 \right) f_2 \right] \frac{\partial \langle u_i u_j u_k \rangle}{\partial x_k} = - \frac{1}{\rho_1} \left( \frac{\partial \langle u_i p \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j p \rangle}{\partial x_i} \right) + \\
& + \left\langle \frac{p}{\rho_1} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\rangle + \nu \frac{\partial^2 \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_k \partial x_k} - 2\nu \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right\rangle - 2 \frac{\rho_2}{\rho_1} \langle C \rangle f_4 \frac{\langle u_i u_j \rangle}{T_E}
\end{aligned} \tag{1.10}$$

$$f_1 = \frac{1}{\tau} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{s}{\tau}\right) F(s) ds, \quad f_2 = \frac{1}{\tau^2} \int_0^{\infty} s \exp\left(-\frac{s}{\tau}\right) F(s) ds$$

$$f_3 = 1 - f_1, \quad f_4 = \frac{T_E}{\tau} (1 - f_1) - \frac{9}{2} \frac{\rho_1}{\rho_2} \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \frac{T_E}{a} \int_0^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{s}} \frac{d}{ds} (F(s) - \Phi(s))$$

$$f_5 = \frac{9}{2} \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \frac{1}{a} \int_0^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{s}} (F(s) - \Phi(s))$$

$$\Phi(s) = \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{s}{\tau}\right) \int_s^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi}{\tau}\right) F(\xi) d\xi$$

Здесь  $T_E$  — временной макромасштаб турбулентности, эквивалентный времени жизни энергоемкого моля; функции  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  описывают степень

вовлечения частиц в пульсационное движение несущей фазы; функции  $f_4$  и  $f_5$  определяют дополнительную диссипацию и конвективный перенос турбулентной энергии частицами из-за неоднородности поля пульсаций. Функции  $F(s)$  и  $\Phi(s)$  описывают двухвременные корреляции пульсаций компонент скорости несущей фазы и корреляции пульсаций компонент скорости твердой и несущей фаз соответственно и определяются из соотношений

$$\begin{aligned}\langle u_i(\mathbf{x}, t+s) u_j(\mathbf{x}, t) \rangle &= F(|s|) \langle u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x}, t) \rangle \\ \langle u_i(\mathbf{x}, t+s) v_j(\mathbf{x}, t) \rangle &= \Phi(|s|) \langle u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x}, t) \rangle\end{aligned}$$

Двухвременная корреляция пульсаций скорости несущей фазы определяется двумя временными масштабами  $T_E$  и  $T_0$  ( $T_0$  — временной микромасштаб, эквивалентный времени жизни наиболее мелких вихрей) и задается в виде гладкой кривой

$$F(t) = \begin{cases} 1 - t^2/T_0^2, & (t/T_0 \leq \alpha), \quad \alpha = \sqrt{1 + \beta^2} - 1, \quad \beta = T_0/T_E \\ A \exp(-t/T_E), & (t/T_0 > \alpha), \quad A = 2\alpha \exp(\alpha)/\beta^2 \end{cases} \quad (1.11)$$

Макромасштаб  $T_E = \gamma L/E^{1/2}$ , где  $L$  — пространственный макромасштаб турбулентности, эквивалентный размеру энергоемкого вихря;  $E = 1/2 \langle u_i u_i \rangle$ ;  $\gamma$  — постоянная.

Подставляя (1.11) в определение функций  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_4$  и  $f_5$ , получаем выражения

$$\begin{aligned}f_1 &= 1 - \exp\left(\frac{-\alpha}{\Omega}\right) \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta^2(1+\Omega)}\right) - \frac{\Omega^2}{\beta^2} \left\{2 - \left[\left(\frac{\alpha}{\Omega} + 1\right)^2 + 1\right] \exp\left(\frac{-\alpha}{\Omega}\right)\right\} \\ f_2 &= \left(1 - \exp\left(\frac{-\alpha}{\Omega}\right)\right) \left(1 - 6\frac{\Omega^2}{\beta^2}\right) - \exp\left(\frac{-\alpha}{\Omega}\right) \frac{\alpha}{\Omega} \left(1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2} - 3\frac{\alpha\Omega}{\beta^2} - 6\frac{\Omega^2}{\beta^2}\right) + \\ &\quad + \frac{2\alpha \exp(-\alpha/\Omega)}{\beta^2} \frac{1}{1+\Omega} \left(\frac{\alpha}{\Omega} + \frac{1}{1+\Omega}\right) \\ f_4 &= \frac{1}{\Omega} \exp\left(\frac{-\alpha}{\Omega}\right) \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta^2(1+\Omega)}\right) + \frac{\Omega}{\beta^2} \left\{2 - \left[\left(\frac{\alpha}{\Omega} + 1\right)^2 + 1\right] \exp\left(\frac{-\alpha}{\Omega}\right)\right\} + \\ &\quad + \frac{9}{2} \frac{\rho_1}{\rho_2} \sqrt{\frac{\gamma}{\pi \text{Re}_E}} \frac{L}{a} \left\{ \frac{2\alpha}{\beta^2} \frac{\Omega}{1+\Omega} J_1(\alpha) + \right. \\ &\quad + \Omega \frac{\sqrt{\alpha}}{\beta^2} \left\{ \left[\left(\frac{\alpha}{\Omega} + 1\right)^2 + 1\right] J_2\left(\frac{\alpha}{\Omega}\right) - 4 \right\} - \frac{\sqrt{\alpha}}{\Omega} \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta^2(1+\Omega)}\right) J_2\left(\frac{\alpha}{\Omega}\right) \Big\} \\ f_5 &= \frac{9}{2} \sqrt{\frac{\gamma}{\pi \text{Re}_E}} \frac{L}{a} \left\{ \frac{2\alpha}{\beta^2} \frac{\Omega}{1+\Omega} J_1(\alpha) + \sqrt{\alpha} \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta^2(1+\Omega)}\right) J_2\left(\frac{\alpha}{\Omega}\right) + \right. \\ &\quad + \frac{\sqrt{\alpha}}{\beta^2} \Omega^2 \left\{ 4\left(\frac{\alpha}{3\Omega} + 1\right) - \left[\left(\frac{\alpha}{\Omega} + 1\right)^2 + 1\right] J_2\left(\frac{\alpha}{\Omega}\right) \right\} \Big\} \\ J_1(x) &= \sqrt{\pi} \exp(x) (1 - \text{erf } \sqrt{x}), \quad J_2(x) = 2 \exp(-x) \int_0^1 \exp(xt^2) dt \\ \text{Re}_E &= L\sqrt{E}/\nu, \quad \Omega = \tau/T_E \end{aligned} \quad (1.12)$$

Здесь  $\text{Re}_E$  — число Рейнольдса турбулентности;  $\Omega$  — параметр инерционности частицы.

Таким образом, система уравнений (1.10) содержит по сравнению с уравнениями для одноточечных вторых моментов пульсаций скорости

однофазной жидкости дополнительные слагаемые, описывающие конвективный перенос, турбулентную диффузию и порождение турбулентных пульсаций из-за вовлечения частиц в пульсационное движение, а также член, описывающий диссипацию турбулентной энергии несущей фазы на частицах. При этом для малоинерционных частиц ( $\tau < T_0$ ,  $\Omega \ll 1$ ,  $f_1 \rightarrow 1$ ,  $f_2 \rightarrow 1$ ,  $f_3 \rightarrow 0$ ,  $f_4 \rightarrow 0$ ,  $f_5 \rightarrow 0$ ) уравнения (1.10) переходят в уравнения однофазной жидкости с плотностью  $\rho_1(1 + \rho_2/\rho_1 \langle C \rangle)$ .

Для инерционных частиц ( $\tau > T_0$ ,  $\Omega > 1$ ,  $f_1 < 1$ ,  $f_2 < 1$ ) существенную роль играет ослабление интенсивности турбулентных пульсаций несущей фазы. Первые два члена в выражении для  $f_4$  (1.12) описывают диссипацию из-за медленного вязкого обтекания частиц турбулентными вихрями. Последующие члены в  $f_4$  связаны с запаздыванием (сила Бассэ) и описывают рассеяние высокочастотных вихрей на частицах. В случае  $T_0 = 0$  выражение для  $f_4$  существенно упрощается и принимает вид

$$f_4 = \frac{1}{1 + \Omega} + \frac{9}{2} \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{L}{a} \sqrt{\frac{\gamma}{\pi \text{Re}_E}} \frac{\Omega}{1 + \Omega} \quad (1.13)$$

Отношение величины рассеяния высокочастотных пульсаций (второй член в (1.13)) к величине вязкой диссипации за счет пульсационного скольжения фаз (первый член в (1.13)) равно  $a\sqrt{E}^{1/2}/(\nu\gamma L)$ ; это отношение уменьшается с увеличением расстояния от стенки, поэтому уменьшение интенсивности пульсационного движения несущей фазы вблизи стенки обусловлено в основном гашением мелкомасштабных вихрей. Аналогичный механизм ослабления мелких пульсаций частицами в пристенной области рассматривается в [1], где принято, что влияние частиц на турбулентную энергию несущей среды сводится к обрезанию высокочастотной части спектра.

2. Рассмотрим развитое турбулентное течение жидкости с твердыми частицами постоянной концентрации в круглой трубе. Осредненное течение несущей фазы описывается уравнением сохранения импульса в продольном направлении, которое следует из (1.8) в приближении  $\langle V_x \rangle = \langle U_x \rangle$

$$\frac{\partial \langle P \rangle}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left[ \left( 1 + \frac{\nu_T}{\nu} \left( 1 + f_1 \frac{\rho_2}{\rho_1} \langle C \rangle \right) \right) \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial r} - \text{Re} \frac{\rho_2}{\rho_1} \langle C \rangle \langle V_r \rangle \langle U \rangle \right] \right\} \quad (2.1)$$

Здесь масштаб координат служит радиус трубы  $R$ , масштаб скорости — средняя скорость несущей фазы  $U_m$ , масштаб давления — величина  $\rho_1 U_m^2/2$ ;  $\text{Re} = 2RU_m/\nu$  — число Рейнольдса течения. Последний член справа в (2.1) описывает перенос импульса за счет миграции частиц поперек потока [9, 10].

Уравнение баланса турбулентной энергии несущей фазы получается из (1.10). Для замыкания этого уравнения привлекается аппроксимационное соотношение Ротта [11], описывающее диссипацию турбулентной энергии. Члены, учитывающие турбулентную диффузию, представляются в градиентном виде. В безразмерной форме уравнение баланса турбулентной энергии жидкости принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{\nu_T}{\nu} \left( \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial r} \right)^2 \left( 1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \langle C \rangle f_2 \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left[ \frac{1}{\text{Re}} + \frac{\alpha_1}{2} E^{1/2} L \right] \frac{\partial E}{\partial r} - \right. \\ & \left. - \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} f_2 + f_3 + f_5 \right) \langle C \rangle \langle V_r \rangle \frac{\partial E}{\partial r} - \left( \frac{c}{2} + \frac{\rho_2}{\rho_1} \langle C \rangle \frac{f_4}{\gamma} \right) \frac{E^{3/2}}{L} - \frac{1}{\text{Re}} c_1 \frac{E}{L^2} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь  $\nu_T$  — турбулентная кинематическая вязкость жидкости в присутствии частиц. В уравнении (2.2) учитывается миграция частиц поперек потока.

Для определения турбулентной вязкости  $\nu_T$  из системы (1.10) выпиывается уравнение для рейнольдсовых напряжений  $\langle u_x u_r \rangle$  в бездиффу-

зионном приближении. Полученное уравнение замыкается с использованием аппроксимаций Ротта [11] для обменных и диссипативных членов, а также соотношения [12]

$$\langle u_r^2 \rangle = k_1 E \quad (2.3)$$

где  $k_1 = 0,20$ . В результате для турбулентной кинематической вязкости получается выражение

$$\frac{\nu_T}{\nu} = \alpha_1 \text{Re}_E \left( 1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \langle C \rangle f_2 \right) \left[ 1 + \frac{\delta}{\text{Re}_E} + 2 \frac{\rho_2}{\rho_1} \langle C \rangle \frac{f_4}{k\gamma} \right]^{-1} \quad (2.4)$$

Формула (2.4) является обобщением гипотезы Колмогорова на турбулентное течение жидкости с частицами.

Макромасштаб турбулентности отождествляется с длиной перемешивания Никурадзе

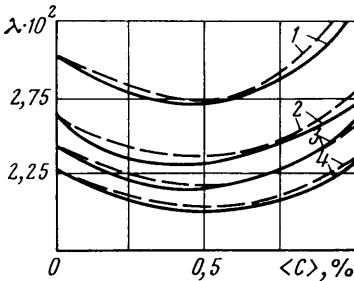
$$L = 0,14 - 0,08r^2 - 0,06r^4 \quad (2.5)$$

Временной микромасштаб турбулентности определяется по формуле  $T_0 = \lambda / E^{1/2}$  ( $\lambda$  — пространственный микромасштаб). Используя выражение Ротта [11] для отношения пространственных микро- и макромасштабов, получаем

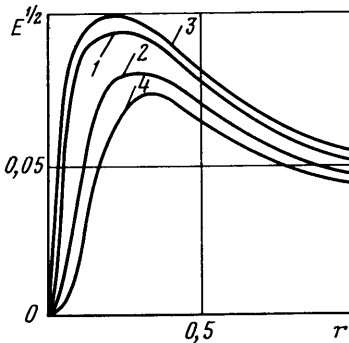
$$\frac{T_0}{T_E} = \frac{1}{\gamma \sqrt{c_1 + c \text{Re}_E}}$$

Из уравнения сохранения импульса твердой фазы в поперечном направлении и соотношения (2.8) получается приближенное выражение для миграционной скорости частиц поперек потока

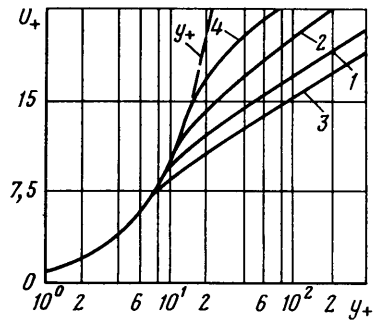
$$\langle V_r \rangle = -2\gamma k_1 \Omega f_1 \frac{L}{E^{1/2}} \frac{dE}{dr} \quad (2.6)$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Численные значения констант  $c$ ,  $c_1$ ,  $\alpha$ ,  $\alpha_1$ ,  $\delta$ ,  $k$  выбираются из решения задачи о пристенном течении однофазного потока жидкости:  $c = 0,13$ ;  $k = 1,16$ ,  $\alpha = 0,51$ ,  $c_1 = 0,32$ ,  $\alpha_1 = 0,2$ ,  $\delta = 14$  [13]. Оценочное значение постоянной  $\gamma$ , входящее в определение временного макромасштаба турбулентности  $T_E$ , может быть получено из формулы  $T_E = E/\epsilon$ , где  $\epsilon = cE^{3/2}/L$  — диссипация турбулентной энергии однофазной жидкости, что дает  $\gamma \approx 8$ . В расчетах принималось  $\gamma = 10$ .

Система уравнений (2.1) — (2.6) с граничными условиями

$$r=0, \quad \frac{d\langle U \rangle}{dr} = \frac{dE}{dr} = 0; \quad r=1, \quad \langle U \rangle = E = 0$$

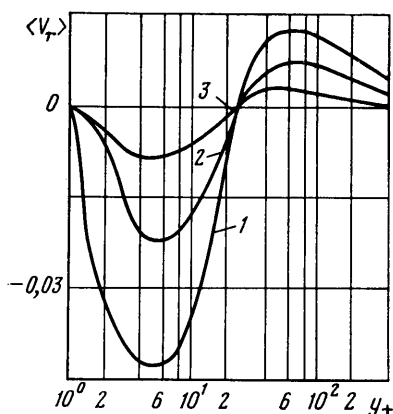
решалась численно методом прогонки с итерациями.

3. Проведены расчеты гидродинамических характеристик турбулентного течения жидкости с частицами, плотность которых равна плотности жидкости. На фиг. 1 приведены зависимости гидравлического сопротивления от объемной концентрации частиц для  $R/a=25$  (кривым 1–4 соответствуют следующие значения  $Re$ :  $10^4$ ,  $2 \cdot 10^4$ ,  $3 \cdot 10^4$ ,  $4 \cdot 10^4$ ). Штриховыми линиями показаны экспериментальные данные из работы [14], сплошными – результаты расчета.

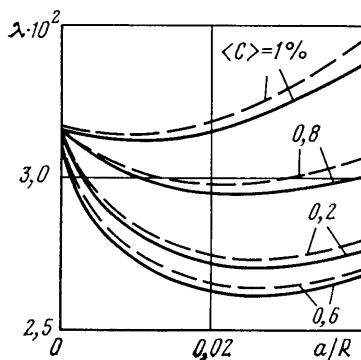
Снижение гидравлического сопротивления объясняется ослаблением интенсивности турбулентных пульсаций несущей фазы в основном за счет подавления частицами высокочастотных вихрей около стенки. Для равноплотных суспензий величина дополнительной диссипации турбулентной энергии из-за пульсационного скольжения фаз при медленном стоксовом обтекании частиц значительно меньше диссипации из-за рассеяния высокочастотных пульсаций на частицах.

Влияние размера и концентрации частиц на распределение турбулентной энергии несущей фазы по сечению канала для  $Re=10^4$  показано на фиг. 2 ( $R/a=25$ , значения  $\langle C \rangle$  на кривых 1–3: 0; 0,6; 1%; кривая 4 –  $R/a=60$ ,  $\langle C \rangle=0,6\%$ ).

Уменьшение турбулентной энергии приводит к расширению вязкого подслоя, что согласуется с выводами работы [1]. На фиг. 3 показаны профили скорости не-



Фиг. 4



Фиг. 5

сущей фазы для различных концентраций и размеров частиц (обозначения на фиг. 3 аналогичны приведенным на фиг. 2).

Рост гидравлического сопротивления с увеличением концентрации частиц объясняется миграцией частиц поперек потока. Миграция частиц к стенке приводит, с одной стороны, к дополнительному переносу турбулентной энергии из ядра потока в вязкий подслои, что ослабляет эффект уменьшения интенсивности пульсационного движения несущей фазы, а с другой – приводит к дополнительному переносу импульса осредненного движения к стенке, что увеличивает гидравлическое сопротивление потока. Распределение скорости миграции частиц по сечению канала для различных размеров частиц показано на фиг. 4 (кривые 1–3 соответствуют значениям  $R/a$ : 25, 60, 100).

Из формулы (1.13) следует, что функция, описывающая дополнительную диссипацию турбулентной энергии на частицах, при фиксированном числе Рейнольдса имеет максимум для некоторого значения отношения  $R/a$  (зависящего от числа Рейнольдса). Это обуславливает наличие минимума на графиках зависимости гидравлического сопротивления канала от отношения  $R/a$  для различных концентраций частиц (фиг. 5).

Таким образом, малые добавки частиц в турбулентный поток оказывают двоякое воздействие на гидродинамические характеристики течения. Во-первых, частицы ослабляют интенсивность пульсаций несущей фазы; причем для газовзвеси уменьшение турбулентной энергии газа вызывается в основном дополнительной диссипацией за счет пульсационного скольжения фаз при медленном стоксовом обтекании [4, 5], в то время как для равноплотных суспензий основную роль играет рассеяние частицами мелкомасштабных пульсаций около стенки [1]. Во-вторых, на частицы в неоднородном турбулентном потоке воздействуют силы пульсационного происхождения, ускорения от которых сравнимы с величинами характерных ускорений в потоке [15], и вызывающие, в частности, мигра-



цию частиц поперек потока. Движение частиц поперек потока приводит к дополнительному переносу энергии и импульса в пристенную область течения. Наряду с этим частицы, принимая участие в пульсационном движении несущей фазы, увеличивают производство и турбулентную диффузию пульсационной энергии несущей фазы [8].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бувеч Ю. А. К модели снижения сопротивления при введении частиц в турбулентный поток вязкой жидкости.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 2, с. 114–120.
2. Шрайбер А. А., Милютин В. Н., Яценко В. П. Гидромеханика двухкомпонентных потоков с твердым полидисперсным веществом. Киев: Наук. думка, 1980. 249 с.
3. Genchev Zh. D., Karpusov D. S. Effects of the motion of dust particles on turbulence transport equations.— J. Fluid Mech. 1980, v. 101, № 4, p. 833–842.
4. Кучанов С. П., Левич В. Г. Диссипация энергии в турбулентном газе, содержащем взвешенные частицы.— Докл. АН СССР, 1967, т. 174, № 5, с. 1033–1036.
5. Гавин Л. Б., Наумов В. А. Турбулентная двухфазная струя и ее численное исследование.— Инж.-физ. журн., 1983, т. 44, № 6, с. 927–932.
6. Drew D. A. Production and dissipation of energy in the turbulent flow of a particle-fluid mixture, with some results on drag reduction.— Trans. ASME. J. Appl. Mech., 1976, v. 43, № 12, p. 543–547.
7. Хинце И. О. Турбулентность. Ее механизм и теория. М.: Физматгиз, 1963. 680 с.
8. Деревич И. В., Ерошенко В. М., Зайчик Л. И. Влияние частиц на интенсивность турбулентного переноса запыленного газа.— Инж.-физ. журн., 1983, т. 45, № 4, с. 554–560.
9. Медников Е. П. Турбулентный перенос и осаждение аэрозолей. М.: Наука, 1981. 174 с.
10. Горбис З. Р., Спокойный Ф. Е. Качественный анализ уравнений осредненного движения твердых частиц в турбулентном потоке.— Теор. основы хим. технологии, 1978, т. 12, № 5, с. 727–733.
11. Rotta I. Statistische Theorie nichthomogener Turbulent.— Z. Phys., 1951, B129, № 5, S. 547–572, also: 1951, B131, № 1, S. 51–77.
12. Луцик В. Г., Павельев А. А., Якубенко А. Е. Трехпараметрическая модель сдвиговой турбулентности.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 3, с. 13–25.
13. Ерошенко В. М., Ершов А. В., Зайчик Л. И. Расчет развитого турбулентного течения в трубе со вдувом и отсосом.— Теплофиз. высоких температур, 1981, № 1, с. 102–107.
14. Аскеров Б. А., Бувеч Ю. А., Расизаде Я. М. Об изменении режимов движения и снижения сопротивления при введении частиц в поток вязкой жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 4, с. 215–224.
15. Шапиро В. Е. Стоксова частица в неоднородном турбулентном потоке.— ПМТФ, 1976, № 2, с. 98–110.

Москва

Поступила в редакцию  
3.11.1984