

УДК 532.527

**МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ
ВИХРЕВЫХ ШНУРОВ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА КОНТУРНОЙ
ДИНАМИКИ**

КОЗЛОВ В. Ф., МАКАРОВ В. Г.

Рассматривается плоская задача об устойчивости кругового движения идеальной несжимаемой жидкости с заданным радиальным распределением завихренности.

1. Многие прикладные задачи гидродинамики требуют исследования различных неустойчивостей. При этом наибольший интерес представляет развитая фаза эволюции возмущений, когда линейный анализ становится неприменимым. В известном смысле классический пример представляет задача о плоском круговом движении идеальной несжимаемой жидкости с заданным радиальным распределением завихренности. Устойчивость таких вихрей относительно двух- и трехмерных возмущений в линейном приближении изучалась многими авторами, однако обозримые результаты удается получить лишь в случае кусочно-постоянного распределения завихренности с небольшим числом точек разрыва (см., например, [1, 2]). Качественное представление о развитой неустойчивости первоначально осесимметричных вихрей дают лабораторные эксперименты [3, 4]. В настоящей работе для исследования эволюции неустойчивых круглых вихрей применяется метод контурной динамики (МКД) [5]. Сначала на основе характерных для МКД-представлений формулируется спектральная задача, определяющая в линейном приближении свойства устойчивости для произвольного радиального распределения завихренности. Решение строится для частного случая двойного кольца с кусочно-постоянным распределением завихренности, удовлетворяющим условию нулевой интенсивности всего вихря. Выполненные численные реализации МКД не только подтверждают теоретические результаты, но и позволяют проследить за нелинейной эволюцией рассматриваемых вихревых структур. В частности, установлен неожиданный факт распада круглого вихря с компенсирующей кольцевой оболочкой на две расходящиеся в противоположные стороны вихревые пары.

2. В рамках модели идеальной несжимаемой жидкости рассмотрим плоскую задачу об устойчивости осесимметричного вихря с заданным распределением завихренности $\omega = \omega(r)$, которая достаточно быстро убывает на бесконечности. Предположим, что после потери устойчивости вихрь эволюционирует на первом этапе таким образом, что линии постоянной завихренности образуют множество непересекающихся контуров, представимых в полярных координатах в виде $r = f(\theta, t; \alpha)$, причем $\alpha = f(\theta, 0; \alpha)$. Дифференцируя это соотношение полным образом по времени, получим

$$ff_t + V^{(\theta)} f_\theta - V^{(r)} f = 0 \tag{2.1}$$

Радиальная и трансверсальная проекции вектора скорости по формулам $V^{(r)} = -(1/r) \Psi_\theta$, $V^{(\theta)} = \Psi_r$ связаны с функцией тока

$$\Psi(r, \theta, t) = \frac{1}{2} \pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \omega(\beta) \ln R f(\psi, t; \beta) f_\beta(\psi, t; \beta) d\beta d\psi \tag{2.2}$$

где величина R

$$R = [r^2 + f^2(\psi, t; \beta) - 2rf(\psi, t; \beta) \cos(\psi - \theta)]^{1/2}$$

определяет расстояние между точкой наблюдения (r, θ) и точкой интегрирования $[f(\psi, t; \beta), \psi]$.

Линеаризуем правую часть (2.2), переходя к малым возмущениям по формуле $f(\theta, t; \alpha) = \alpha + \varepsilon(\theta, t; \alpha)$, $|\varepsilon| \ll \alpha$. С точностью до малых первого порядка включительно имеем

$$\ln Rf(\psi, t; \beta) f_\beta(\psi, t; \beta) = \beta \ln R_0 + [\beta \ln R_0 \varepsilon(\psi, t; \beta)]_\beta$$

где $R_0(r, \beta) = [r^2 + \beta - 2r\beta \cos(\psi - \theta)]^{1/2}$.

Интегрируя в (2.2) по частям, получим представление

$$\begin{aligned} \Psi(r, \theta, t) &= \frac{1}{2} \pi \left[\int_0^{2\pi} \int_0^\infty \omega(\beta) \beta \ln R_0(r, \beta) d\beta d\psi - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \omega'(\beta) \ln R_0(r, \beta) \beta \varepsilon(\psi, t; \beta) d\beta d\psi \right] \end{aligned}$$

Так как $(\ln R_0)_\theta = -(\ln R_0)_\psi$, с той же точностью после простых преобразований находим

$$V^{(\theta)} f_\theta = \varepsilon_\theta \Psi_r = \frac{\varepsilon_\theta}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \omega(\beta) \beta [\ln R_0(r, \beta)]_r d\beta d\psi$$

$$V^{(r)} f_r = -\Psi_\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \omega'(\beta) \beta [\ln R_0(r, \beta)]_\theta \varepsilon(\psi, t; \beta) d\beta d\psi$$

$$ff_t = \alpha \varepsilon_t$$

Подставляя эти выражения в (2.1) и учитывая, что на рассматриваемом контуре $r = \alpha + \varepsilon(\theta, t; \alpha)$, получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_t(\theta, t; \alpha) + \left(\frac{1}{2} \pi \alpha \right) \left[\varepsilon_\theta(\theta, t; \alpha) \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \omega(\beta) \beta [\ln R_0(\alpha, \beta)]_\alpha d\beta d\psi - \right. \\ \left. - \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \omega'(\beta) \beta [\ln R_0(\alpha, \beta)]_\theta d\beta d\psi \right] = 0 \end{aligned}$$

Поскольку ([6, с. 380])

$$\int_0^{2\pi} [\ln R_0(\alpha, \beta)]_\alpha d\psi = \int_0^{2\pi} \frac{\alpha - \beta \cos(\psi - \theta)}{R_0^2} d\psi = \frac{2\pi}{\alpha} H(\alpha - \beta)$$

где H — единичная функция Хевисайда, окончательно находим уравнение малых возмущений в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_t(\theta, t; \alpha) + \frac{1}{2\pi} \left[\frac{2\pi}{\alpha^2} \varepsilon_\theta(\theta, t; \alpha) \int_0^\alpha \omega(\beta) \beta d\beta + \right. \\ \left. + \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \omega'(\beta) \frac{\beta^2}{R_0^2} \varepsilon(\psi, t; \beta) \sin(\psi - \theta) d\beta d\psi \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Ищем частные решения

$$\varepsilon(\theta, t; \alpha) = A(\alpha) e^{\lambda t + im\theta} \quad (2.4)$$

Из условия сохранения площади, заключенной внутри любой линии постоянной завихренности, следует $\int_0^{2\pi} \varepsilon(\theta, t; \alpha) d\theta = 0$, поэтому достаточно

рассматривать моды $m \geq 1$. Учитывая, что ([6, с. 380])

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{im\psi} \sin(\psi-\theta) d\psi}{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos(\psi-\theta)} = \frac{\pi i}{\alpha\beta} e^{im\theta} \begin{cases} (\beta/\alpha)^m, & \beta < \alpha \\ (\alpha/\beta)^m, & \beta > \alpha \end{cases}$$

после подстановки (2.4) в (2.3) получим спектральную задачу

$$\frac{im}{\alpha^2} A(\alpha) \int_0^\alpha \omega(\beta) \beta d\beta + \frac{1}{2} i \int_0^\infty \omega'(\beta) K_m \frac{\beta}{\alpha} A(\beta) d\beta + \lambda A(\alpha) = 0 \quad (2.5)$$

где введена вспомогательная функция

$$K_m(z) = \begin{cases} z^{m+1}, & z < 1 \\ z^{1-m}, & z > 1 \end{cases}$$

Очевидно, для неустойчивости необходимо выполнение условия $\text{Re } \lambda > 0$.

3. Уравнение (2.5) удобно для анализа, когда распределение завихренности описывается кусочно-постоянной функцией. Устойчивость простейших конструкций такого типа исследовалась в [1], где предполагалось, что $\omega(r)$ не меняет знака и имеет не более двух точек разрыва. Ниже рассматривается случай трех точек разрыва, когда $\omega(\alpha) = \omega_0 H(\alpha - a_1) + (\omega_1 - \omega_0) H(\alpha - a_2) - \omega_1 H(\alpha - a_3)$, где $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \infty$, а ω_0 и ω_1 соответственно обозначают завихренности в кольцах $a_1 < r < a_2$ и $a_2 < r < a_3$; $\omega \equiv 0$ при $r < a_1$ и при $r > a_3$. Для уменьшения числа свободных параметров примем условие компенсации $\omega_0(a_2^2 - a_1^2) + \omega_1(a_3^2 - a_2^2) = 0$, при котором получается кольцевое течение в покоящейся жидкости с максимумом скорости на окружности $r = a_2$. Полагая $p = a_1/a_2 < 1$, $q = a_2/a_3 < 1$, $\gamma = 2i\lambda/\omega_0$ и записывая (2.5) при $\alpha = a_1, a_2, a_3$, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} (1-\gamma)A_1 - (1+x)p^{m-1}A_2 + x(pq)^{m-1}A_3 &= 0 \\ p^{m+1}A_1 + (y-\gamma)A_2 + xq^{m-1}A_3 &= 0 \\ (pq)^{m+1}A_1 - (1+x)q^{m+1}A_2 + (x-\gamma)A_3 &= 0 \\ x = q^2(1-p^2)/(1-q^2), \quad y = m(1-p^2) - (1+x), \quad A_j = A(a_j) \end{aligned}$$

Здесь параметр x имеет смысл отношения площадей внутреннего кольца к внешнему.

При

$$\begin{aligned} a &= -(1+x+y) \\ b &= x+y(1+x) + (1+x)p^{2m} + x(1+x)q^{2m} - xp^{2m}q^{2m} \\ c &= x\{[y+2(1+x)]p^{2m}q^{2m} - (1+x)(p^{2m}+q^{2m}) - y\} \end{aligned}$$

характеристическое уравнение записывается в стандартном виде $P_m(\gamma) \equiv \gamma^3 + a\gamma^2 + b\gamma + c = 0$.

Рассмотрим сначала случаи вырождения этого уравнения.

1. Круглый вихрь с компенсирующей оболочкой ($p=0$). В этом случае $P_m(\gamma) = (\gamma-1)\{\gamma^2 - (m-1)\gamma + [q^2/(1-q^2)^2][q^{2m} + m(1-q^2) - 1]\}$, и кроме $\gamma=1$ имеются еще два корня

$$\gamma = (m-1)/2 \pm iR(m), \quad R(m) = \sqrt{\Phi(m)} \quad (3.1)$$

где функция $\Phi(m) = \{q^{2m+2} - [(m-1)/2 - (m+1)q^2/2]^2\}/(1-q^2)^2$ полностью определяет свойства неустойчивости, которая имеет место при $\Phi(m) > 0$. Так как $\Phi(1) = 0$, $\Phi'(1) > 0$ и $\Phi(m) \approx -m^2/4 < 0$ для достаточно больших m , существует второй корень этой функции $\mu(q^2) > 1$, совпадающий с единственным корнем уравнения $q^{m+1} - (m-1)(1-q^2)/2 + q^2 = 0$, причем $\Phi(m) > 0$ при $1 < m < \mu(q^2)$. Максимальное значение $\Phi(m)$ на этом промежутке достигается при $m = \nu(q^2)$, где ν — единственный корень уравнения $4q^{2m+2} \ln q - [(m-1) - (m+1)q^2](1-q^2) = 0$. Заметим, что $\mu(q^2)$ и $\nu(q^2)$ — монотонно

возрастающие функции своего аргумента, стремящиеся к бесконечности при $q^2 \rightarrow 1-0$.

Таким образом, при любом заданном $q^2 < 1$ существует конечное число заключенных в промежутке $[1, \mu(q^2)]$ мод, для которых, согласно (3.1), имеют место экспоненциально растущие по амплитуде неустойчивые возмущения. Так как $\mu(1/4) = 2$, то в указанном смысле при $0 < q \leq 1/2$ все вихри устойчивы. Очевидно, что среди всех неустойчивых мод преобладающей будет та, для которой максимально $\Phi(m)$, т. е. соответствующий номер m^* равен целой части $\nu(q^2)$ либо превышает ее на единицу.

2. Круговое кольцо ($q=0$). При указанном условии $P_m(\gamma) = \gamma[\gamma^2 - m(1-p^2)\gamma + m(1-p^2) - 1 + p^{2m}]$ и отличные от нулевого корни имеют вид

$$\gamma = m(1-q^2)/2 \pm iR(m), \quad R(m) = \sqrt{\varphi(m)},$$

$$\text{где теперь } \varphi(m) = q^{2m} - [1 - m(1-q^2)/2]^2.$$

Связь с предыдущей задачей следует из очевидного равенства $\varphi(m) = (1-q^2)^2 \cdot \Phi(m-1)^4$. Отсюда, в частности, сразу видно, что первой неустойчивой модой является $m=3$.

3. Обратимся теперь к общему случаю. Заметим, что $P_1(\gamma) = \gamma^2[\gamma - (1-p^2)]$, т. е. первая мода всегда устойчива. С другой стороны, для больших m имеем $P_m(\gamma) \approx (\gamma-1)(\gamma-x)(\gamma-y)$, что также соответствует устойчивости. Таким образом, при любых p и q , меньших единицы, существует лишь конечное число неустойчивых мод. Полагая $s = -a^2/3 + b$, $t = 2(a/3)^3 - ab/3 + c$, получим необходимое условие неустойчивости в виде

$Q_m(p^2, q^2) = (s/3)^3 + (t/2)^2 > 0$. На фиг. 1 изображены линии нейтральной устойчивости $Q_m(p^2, q^2) = 0$ для $m=2, 3, \dots, 10$; ниже каждой кривой соответствующая мода устойчива. При $m \rightarrow \infty$ кривые асимптотически сгущаются к сторонам квадрата $p^2=1$ и $q^2=1$.

4. Эффективное средство численного моделирования эволюции вихревых полей с кусочно-постоянным распределением завихренности дает так называемый метод контурной динамики (МКД) [5]. Если завихренность финитна и терпит разрывы на замкнутых контурах C_j , $j=1, \dots, J$, индуцируемое поле скоростей можно представить в виде [5, 7]

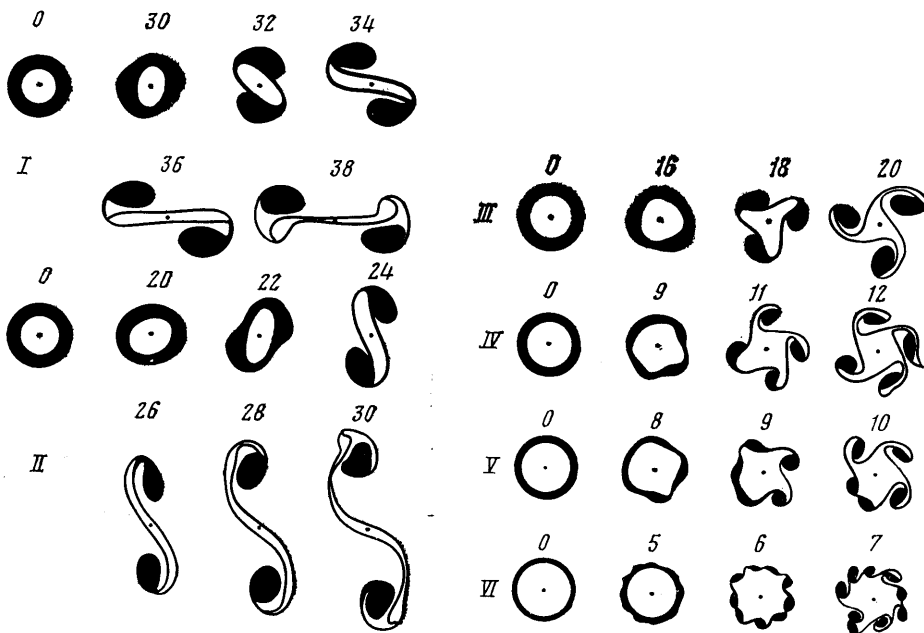
$$V(x, t) = - \left(\frac{1}{2\pi} \right) \sum_{j=1}^J \Delta\omega_j \oint_{C_j} \ln|x-\xi| d\xi \quad (4.1)$$

где векторы x и ξ соответственно определяют положение точек наблюдения и интегрирования, а $\Delta\omega_j$ обозначает скачок завихренности при переходе через контур C_j справа налево по отношению к положительному направлению на контуре (против часовой стрелки). Формула (4.1) является теоретической основой МКД и допускает различные численные реализации, позволяющие следить за динамикой отдельных контуров. В настоящей работе использовался численный алгоритм МКД, подробно описанный в [8]. Постоянно действующим возмущающим фактором, заставляющим эволюционировать исходные неустойчивые стационарные состояния, был численный шум, создаваемый ошибками дискретизации и округления в ЭВМ. Цель экспериментов состояла не только в проверке предсказаний теории, но и в установлении закономерностей дальнейшего развития исследуемых вихревых структур, когда выводы линейной теории уже неприменимы.

¹ На это обстоятельство внимание авторов обратил С. Айвазян.

Пары параметров (p^2, q^2) , для которых были выполнены расчеты, изображены на фиг. 1. Ниже обсуждаются случаи круглого вихря с компенсирующей оболочкой $(0, q^2)$ и двойного кольца, когда p^2 и q^2 отличны от нуля.

В таблице дана сводка определяющих параметров в рассматриваемых экспериментах с указанием номера m^* наиболее неустойчивой моды, установленной теоретически. Во всех случаях принималось $\omega_0 = 2a_2 / (a_2^2 - a_1^2)$, что соответствует единичной максимальной скорости в вихре, достигаемой на контуре $r = a_2$. Радиус завихренной области нормировался условием $a_3 = 1$, что означало $a_2 = q$, $a_1 = pq$ и соответственно $\omega_0 = 2/q(1 - p^2)$. При



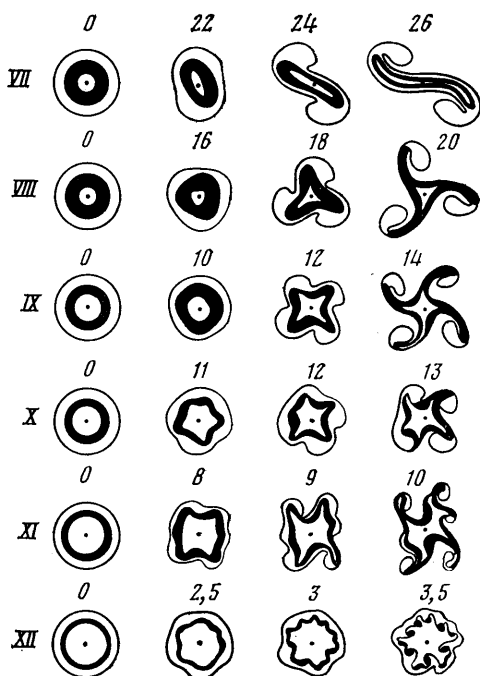
Фиг. 2

интегрировании уравнений движения, определяющих контуры опорных точек, использовалась схема Рунге — Кутты 2-го порядка точности с фиксированным шагом $\Delta t = 0,1$. После каждого временного шага осуществлялся переход к новым опорным точкам, которые вводились пропорционально соответствующей длине контура. Точность расчетов контролировалась по величине площади, охваченной каждым из контуров.

Перейдем к обсуждению экспериментов.

№ эксперимента	$p^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2$	$q^2 = \left(\frac{a_2}{a_3}\right)^2$	Начальное число узлов на контурах C_1, C_2, C_3	m^* теор.	m^* эксп.
I	0	0,300	0, 33, 60	2	2
II	0	0,400	0, 32, 50	2	2
III	0	0,500	0, 43, 60	2; 3	3
IV	0	0,675	0, 50, 60	4	4
V	0	0,710	0, 51, 60	5	5
VI	0	0,770	0, 60, 72	6	9
VII	0,250	0,400	20, 40, 80	2	2
VIII	0,200	0,500	28, 48, 64	3	3
IX	0,333	0,600	28, 48, 64	4	4
X	0,600	0,500	30, 45, 60	5	5
XI	0,571	0,700	48, 60, 72	6	6
XII	0,833	0,600	55, 60, 77	11	11

Представленная на фиг. 2 первая серия расчетов (эксперименты I—VI) относится к случаю $p^2=0$. Сверху над каждой конфигурацией указан соответствующий момент времени. За исключением эксперимента VI, степень симметрии m^* образующихся структур везде согласуется с предсказаниями теории. Наблюдаемое в последнем случае отклонение можно объяснить по крайней мере тремя причинами: 1) повышением неустойчивости с приближением q к единице; 2) близостью инкрементов роста сразу для нескольких мод; 3) быстрым выходом на нелинейный режим.



Фиг. 3

Особый интерес представляют случаи I и II с $m^*=2$, в которых первоначально осесимметричная конфигурация эволюционирует в две пары конечных вихрей примерно одинаковых интенсивностей, расходящиеся в противоположные стороны. С течением времени соединяющие их перемычки истончаются и перестают играть сколько-нибудь заметную роль в динамике системы. По мнению авторов, этот результат является принципиально важным, вскрывая один из возможных механизмов формирования дипольных вихревых структур, проявляющийся при распаде неустойчивых осесимметричных вихрей.

В экспериментах III—VI характерным является образование центрального ядра, окруженного m^* парами тесно расположенных

разновеликих вихрей противоположных вращений.

Во второй серии экспериментов VII—XII (фиг. 3) исследовалась эволюция двойного кольца ($p^2>0$, $q^2>0$), которое можно интерпретировать как струйное круговое течение в покоящейся жидкости. Во всех случаях наблюдается совпадение теоретических и экспериментальных значений m^* , хотя и с некоторым нарушением симметрии, которое наиболее заметно с уменьшением толщины колец. Здесь также можно заметить тенденцию к формированию разбегающихся пар вихрей противоположного вращения.

5. Результаты описанных выше численных экспериментов проявляют большое сходство с данными лабораторного моделирования [3, 4] и указывают на сдвиговую неустойчивость как наиболее вероятный механизм распадов, наблюдаемых в опытах.

Как показывают расчеты, относительно тонкие кольцевые зоны постоянной завихренности быстро перестраиваются в систему мелких вихрей, расположенных относительно равномерно вокруг (VI) или внутри (XII) более массивного кольца. Интересно отметить, что в наблюдаемых в природе смерчах передко возникают дополнительные вихри, формирующие так называемый «каскад» или «футляр» [9].

Кольцевые структуры в случае соизмеримых по площади колец можно рассматривать как грубую модель океанических вихрей типа «рингов» [10], порождаемых в результате меандрирования таких мощных струйных течений, как Гольфстрим или Курошио. Эксперименты I и II с очевидностью указывают на возможность эволюции рингов в расходящиеся пары

вихрей противоположных вращений, напоминающие по конструкции сильно нелинейные уединенные волны Россби (солитоны), возможность существования которых установлена пока только теоретически [14].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Michalke A., Timme A.* On the inviscid instability of certain two-dimensional vortex-type flows.— *J. Fluid Mech.*, 1967, v. 29, № 4, p. 647–666.
2. *Rolunno R.* A note on the stability of a cylindrical vortex sheet.— *J. Fluid Mech.*, 1978, v. 87, № 4, p. 761–771.
3. *Weske J. R., Rankin T. M.* Generation of secondary motions in the field of a vortex.— *Phys. Fluids*, 1963, v. 6, № 10, p. 1397–1403.
4. *Владимиров В. А., Тарасов В. Ф.* Образование системы вихревых шнуров во вращающейся жидкости.— *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1980, № 1, с. 44–51.
5. *Zabusky N. J., Hughes M. H., Roberts K. V.* Contour dynamics for the Euler equations in two dimensions.— *J. Comput. Phys.*, 1979, v. 30, № 1, p. 96–106.
6. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
7. *Su C. H.* Motion of fluid with constant vorticity in a singlyconnected region.— *Phys. Fluids*, 1979, v. 22, № 10, p. 2032–2033.
8. *Козлов В. Ф.* Метод контурной динамики в модельных задачах о топографическом циклогенезе в океане.— *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана*, 1983, т. 19, № 8, с. 845–854.
9. *Наливкин Д. В.* Ураганы, бури и смерчи. Л.: Наука, 1969. 487 с.
10. *Каменкович В. М., Кошляков М. Н., Монин А. С.* Синоптические вихри в океане. Л.: Гидрометеоздат, 1982. 264 с.
11. *Ларичев В. Д., Резник Г. М.* О двумерных уединенных волнах Россби.— *Докл. АН СССР*, 1976, т. 231, № 5, с. 1077–1079.

Владивосток

Поступила в редакцию
8.V.1984