

УДК 532.5.031-2

**ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ВЫЕМКИ ВЫБРОСА ПРИ ВЗРЫВЕ  
В ГРУНТЕ С УГЛОВЫМИ И КРИВОЛИНЕЙНЫМИ  
СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ**

**РОДИОНОВ А. Т., ТЕРЕНТЬЕВ А. Г.**

Одной из простых математических моделей теории деформации сплошных сред при взрыве является твердожидкостная [1, 2]. Эта модель не описывает динамику грунта и поэтому позволяет определять лишь оценочные характеристики выемки. К настоящему времени с помощью этой модели исследован широкий круг задач об определении выемки выброса в сплошной среде с различными прочностными свойствами и разнообразным расположением взрывчатых веществ (ВВ) [3-5].

Ниже в рамках твердожидкостной модели рассматриваются краевые задачи об определении выемки выброса при взрыве точечных и равномерно распределенных ВВ на поверхности и в глубине изотропного грунта с угловыми и криволинейными свободными границами. На целесообразность изучения подобных задач указал Н. Б. Ильинский.

**1. Общие замечания к постановке краевых задач.** Математическая формулировка модели в постановке М. А. Лаврентьева следующая: найти область течения  $G$  (выемку выброса) сплошной среды и потенциал скорости  $\varphi$ , который в области  $G$  удовлетворяет уравнению Лапласа  $\Delta\varphi=0$  и условию  $|\nabla\varphi|>v_0$ . На известной части  $\gamma_1$  границы области  $G$ , соответствующей свободной поверхности грунта или распределенным зарядам, задан потенциал  $\varphi$ ; на остальной части границы  $\gamma_2$ , примыкающей к неподвижному грунту, задана величина скорости  $|\nabla\varphi|=v_0=\text{const}$ . Предлагались также различные модификации модели, где рассматривались переменные значения  $v_0$  [3, 4].

Ниже используется модель в постановке М. А. Лаврентьева, в которой критическая скорость  $v_0=\text{const}$ . Кроме того, ограничимся исследованием лишь плоских задач.

Рассмотрим комплексный потенциал  $w=\varphi+i\psi$  как аргумент аналитической функции

$$\omega(w)=i\ln(dw/dz)=\theta+i\ln v$$

где  $\theta$  — угол между вектором скорости и осью  $x$ ,  $v$  — величина скорости жидкости. Из обобщенных условий Коши — Римана

$$\kappa_\psi = \frac{\partial\theta}{\partial\varphi} = \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial\psi}, \quad \kappa_\varphi = \frac{\partial\theta}{\partial\psi} = -\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial\varphi}$$

получаем следующие равенства для кривизны линий тока  $\kappa_\psi$  и эквипотенциальных линий  $\kappa_\varphi$ :

$$\text{sign } \kappa_\psi = \text{sign} \left( \frac{\partial v}{\partial\psi} \right), \quad \text{sign } \kappa_\varphi = -\text{sign} \left( \frac{\partial v}{\partial\varphi} \right) \quad (1.1)$$

При выполнении условия  $|\nabla\varphi|>v_0$  справедливо неравенство  $\partial v/\partial\psi>0$  и в соответствии с первым равенством (1.1)  $\kappa_\psi>0$ , т. е. граница  $\gamma_2$  должна быть выпуклой в сторону неподвижного грунта. Второе условие (1.1) означает, что при подходе вдоль линии тока к эквипотенциальной линии ( $\varphi=\text{const}$ ) со стороны ее вогнутости скорость течения уменьшается и, наоборот, скорость увеличивается, если двигаться к выпуклой стороне.

Указанное свойство потенциального течения может быть полезным при постановке краевых задач с непрямолинейными эквипотенциальными линиями  $\gamma$ . Например, если свободная поверхность выпукла (холм), то может оказаться, что в некоторой области, примыкающей к свободной границе, скорость течения будет меньше критической  $v_0$ . Для того чтобы не было противоречия с условием  $|\nabla\varphi| > v_0$ , необходимо вводить замкнутые неподвижные области (целики). Если же свободная поверхность вогнута (впадина), то целики образоваться не могут.

Вполне определенно можно отметить, что в окрестности угловых точек свободной поверхности образуется целик, если внутренний угол  $|\alpha| < \pi$  (холм), и целика не будет, если  $|\alpha| > \pi$  (траншея). Течения с целиками, как с внутренними, так и с примыкающими к свободной границе, рассматривались в [5].

Решая простейшую задачу в рамках изложенной выше модели, можно указать области, ограниченные эквипотенциальными линиями и линией тока в окрестности точечного вихря с комплексным потенциалом  $w = (\Gamma/2\pi) \ln z$ . Выбором коэффициента  $\Gamma$  можно всегда добиться на одном из лучей заданного значения потенциала  $\varphi = -P/\rho$ , которое соответствует равномерно распределенному ВВ с импульсом  $P$  ( $\rho$  — плотность грунта), на другом  $-\varphi = 0$ , что соответствует свободной прямолинейной границе грунта. Радиус  $R$  линии тока, на которой скорость равна  $v_0$ , легко находится из равенства  $v_0 = \Gamma/(2\pi R)$ . Например, если граница грунта состоит из двух лучей, составляющих угол  $\alpha$ , причем на одном из лучей непрерывно распределен поверхностный заряд импульса  $P$ , то

$$|\Gamma| = 2\pi \frac{P}{\rho} \frac{1}{|\alpha|}, \quad R = \frac{P}{\rho v_0} \frac{1}{|\alpha|} \quad (1.2)$$

Выемка выброса (область  $G$ ) представляет круговой сектор с углом при вершине, равном  $\alpha$ . Нетрудно убедиться, что если на втором луче также равномерно распределен заряд, но с другим значением импульса  $P_0 \neq P$ , то выемка выброса представляет также круговой сектор того же угла  $\alpha$ , но радиуса

$$R = |(P - P_0)/\rho v_0 \alpha| \quad (1.3)$$

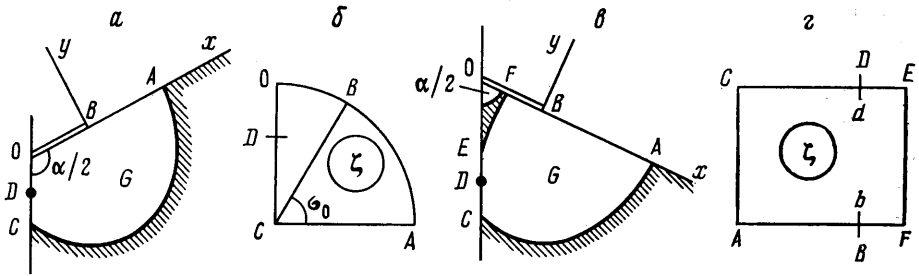
Отсюда легко заметить, что при равномерно распределенном заряде небольшой интенсивности на концах могут образоваться две круговые выемки [2]. Использование формул (1.2) или (1.3) полезно при изучении более общих задач.

**2. Выемки выброса грунта с угловой свободной границей при равномерном распределении заряда.** Рассматривается свободная поверхность в виде двух лучей, составляющих угол  $\alpha$  (фиг. 1, *a, в*). При  $0 < \alpha < \pi$  имеем холм, при  $\pi < \alpha < 2\pi$  — впадину. Пусть взрывчатое вещество импульса  $P$  расположено симметрично относительно биссектрисы угла и непрерывно на поверхности грунта. Общая длина ВВ равна  $2l$ . Вместо размерных параметров  $P$ ,  $l$  и  $v_0$  достаточно задавать безразмерный параметр  $\varepsilon = P/\rho l v_0$  и определять безразмерные геометрические характеристики выемки выброса, отнесенные к длине  $l$ , т. е. положить  $\rho = l = v_0 = 1$  и  $X = x/l$ ,  $Y = y/l$ .

Как это было отмечено выше, при  $0 < \alpha < \pi$  в вершине угла образуется целик. Кроме того, для каждого угла  $\alpha$  существует критическое значение  $\varepsilon = \varepsilon_0$  такое, что при значениях  $\varepsilon < \varepsilon_0$  на концах ВВ образуются две круговые выемки выброса с центром в точках  $B$  и  $B'$ . Критическое число  $\varepsilon_0$  геометрически соответствует круговым выемкам радиуса  $R = 1$  в случае  $\pi < \alpha < 2\pi$  и  $R = \sin(\alpha/2)$  при  $0 < \alpha < \pi$ . В соответствии с (1.2)

$$\varepsilon_0 = \sin(\alpha/2), \quad 0 < \alpha < \pi, \quad \varepsilon_0 = 1, \quad \pi < \alpha < 2\pi \quad (2.1)$$

В силу симметрии относительно биссектрисы угла  $\alpha$  ограничимся рассмотрением правой половины области  $G$ , для которой сохраним обозначение  $G$ . Эта область конформно отображается на четверть круга единично-



Фиг. 1

го радиуса, если  $\pi < \alpha < 2\pi$  (фиг. 1, б), и на прямоугольник с вершинами  $0, \frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{4}\pi t, \frac{1}{4}\pi t$ , если  $0 < \alpha < \pi$  (фиг. 1, г), вспомогательной плоскости  $\zeta$ . Соответствие точек видно из фиг. 1.

Границы  $OCA$  области  $G$  при  $\pi < \alpha < 2\pi$  и  $FEC A$  при  $0 < \alpha < \pi$  являются линиями тока. А границы  $OBA$  в обоих случаях будут эквипотенциальными линиями. Кроме того, в точке  $B$  потенциал  $\varphi$  терпит разрыв первого рода. Вместо комплексного потенциала  $w(\zeta) = \varphi + i\psi$  целесообразно отыскивать его производную  $dw/d\zeta$ . Эта функция имеет простой полюс в точке  $B$  и нуль в точках  $C$  и  $E$ . Продолжая аналитически на всю плоскость  $\zeta$ , функцию  $dw/d\zeta$  построим по ее нулям и особым точкам

$$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{N_1 \zeta}{\zeta^4 - 2\zeta^2 \cos 2\sigma_0 + 1}, \quad \pi < \alpha < 2\pi \quad (2.2)$$

$$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{iN_2 \vartheta_4(2\zeta)}{\vartheta_1(\zeta - b) \vartheta_1(\zeta + b) \vartheta_4(\zeta - b) \vartheta_4(\zeta + b)}, \quad 0 < \alpha < \pi \quad (2.3)$$

Неизвестные коэффициенты в (2.2) и (2.3) определяются из условия приращения комплексного потенциала при обходе точки  $B$

$$\oint_B \frac{dw}{d\zeta} d\zeta = 2\varepsilon$$

$$N_1 = \frac{4 \sin 2\sigma_0}{\pi} \varepsilon, \quad N_2 = -\frac{\vartheta_2 \vartheta_3 \vartheta_4^2(2b)}{\pi} \varepsilon \quad (2.4)$$

На границе области  $G$  функция комплексной скорости  $dw/dz$  удовлетворяет следующим условиям:  $\arg(dw/dz) = \pi/2$ ,  $z \in OB$  или  $z \in FB$ ,  $\arg(dw/dz) = -\pi/2$ ,  $z \in BA$ , и  $\arg(dw/dz) = \alpha/2$ ,  $z \in ODC$  или  $z \in EDC$ , т. е. в точке  $B$  аргумент комплексной скорости терпит разрыв первого рода. Кроме того, на  $CA$  и  $EF$  модуль  $|dw/dz| = v_0$ . Функцию  $dw/dz$  также можно аналитически продолжить на всю плоскость  $\zeta$  и найти по нулям и особым точкам [6]

$$\frac{dw}{dz} = -v_0 e^{-i\alpha/2} \left( \frac{\zeta + i}{\zeta - i} \right)^{(\alpha/\pi - 1)} \frac{\zeta^2 + 2i\zeta \sin \sigma_0 - 1}{\zeta^2 - 2i\zeta \sin \sigma_0 - 1}, \quad \pi < \alpha < 2\pi$$

$$\frac{dw}{dz} = iv_0 \frac{\vartheta_1(\zeta + b) \vartheta_4(\zeta + b)}{\vartheta_1(\zeta - b) \vartheta_4(\zeta - b)}, \quad 0 < \alpha < \pi$$

Отображающая функция  $z(\zeta)$  и геометрические размеры выемки выброса определяются интегрированием уравнения

$$dz = \frac{dz}{dw} \frac{dw}{d\zeta} d\zeta \quad (2.5)$$

На фиг. 2 и 3 соответственно при  $\alpha = 3\pi/2$  и  $\pi/2$  приведены результаты расчетов форм выемки выброса для значений безразмерного параметра

$\epsilon = \epsilon_0, 5, 10$  (кривые 2, 4, 6). Видно, что при возрастании  $\epsilon$  размеры выемки выброса также увеличиваются. При  $\epsilon \leq \epsilon_0$  выемка представляет собой круговую форму с центром на конце заряда (значение  $\epsilon_0$  вычисляется по формуле (2.1)).

**3. Выемки выброса грунта с угловой свободной границей при заглубленном сосредоточенном заряде.** Сосредоточенный заряд большой интенсивности гидродинамически эквивалентен точечному источнику. Интенсивность  $q$  этого источника зависит как от импульса заряда  $P$ , так и от его геометрических характеристик и расположения. Эта зависимость может быть установлена лишь экспериментально. В частности, для заглубленного заряда кругового сечения радиуса  $r$ , центр которого расположен на глубине  $H$  ( $H > r$ ) от прямолинейной свободной поверхности, в работе [4] предлагается зависимость  $q = 2\pi\beta r / \ln[(H+h)r]$ , где  $h = \sqrt{H^2 - r^2}$  — глубина расположения источника, а коэффициент  $\beta$  для каждого ВВ принимает постоянное значение и определяется экспериментально.

Ниже рассматривается сосредоточенный заряд, расположенный на биссектрисе угла, стороны которого представляют свободную поверхность грунта. Расположение заряда характеризуется расстоянием  $h$  от вершины угла. Считается также известной интенсивность источника  $q$ . Без ограничения общности задачи, как и в предыдущем параграфе, можно положить  $h = v_0 = 1$ , т.е. все линейные размеры отнести к  $h$ , а под интенсивностью  $q$  следует понимать отношение  $q/hv_0$ . Выемка выброса (область  $G$ ) аналогична выемке при равномерно распределенном ВВ (на фиг. 1, а, в сосредоточенный заряд находится в точке  $D$ ).

В отличие от предыдущей задачи на свободной поверхности  $OA$  всюду  $\varphi = 0$ , в точке  $D$  потенциал  $w$  имеет логарифмическую особенность. Кроме того, аргумент скорости при обходе точки  $D$  по бесконечно малой полукругности получает приращение, равное  $\pi$ . Параметрические решения во вспомогательной плоскости  $\zeta$  (фиг. 1, б, з) легко могут быть найдены по нулям и особенностям

$$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{N_1 \zeta}{(\zeta^2 + d^2)(\zeta^2 + 1/d^2)}, \quad \pi < \alpha < 2\pi$$

$$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{iN_2 \vartheta_4(2\zeta)}{\vartheta_1(\zeta - d)\vartheta_1(\zeta + d)\vartheta_4(\zeta - d)\vartheta_4(\zeta + d)}, \quad 0 < \alpha < \pi$$

$$\frac{dw}{dz} = iv_0 \frac{(\zeta + di)(\zeta + i/d)}{(\zeta - di)(\zeta - i/d)} \left( \frac{\zeta + i}{\zeta - i} \right)^{(\alpha/\pi - 1)} e^{-i\alpha}, \quad \pi < \alpha < 2\pi$$

$$\frac{dw}{dz} = iv_0 \frac{\vartheta_1(\zeta + d)\vartheta_4(\zeta + d)}{\vartheta_1(\zeta - d)\vartheta_4(\zeta - d)}, \quad 0 < \alpha < \pi$$

Для определения неизвестных параметров  $N_1$  и  $N_2$  необходимо использовать условие

$$\oint_D (dw/d\zeta) d\zeta = iq$$

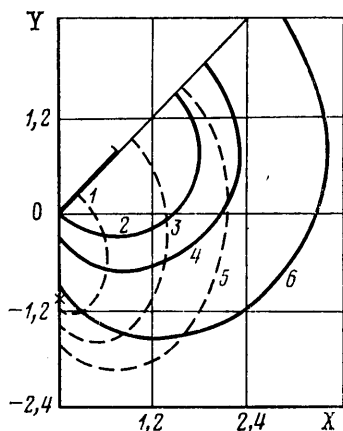
$$N_1 = \frac{4 \sin 2\sigma_0}{\pi} q, \quad N_2 = \frac{\vartheta_2 \vartheta_3 \vartheta_4^2 \vartheta_4(2d)}{2\pi} q$$

Отображающая функция и геометрические размеры выемки выброса находятся по-прежнему интегрированием уравнения (2.5).

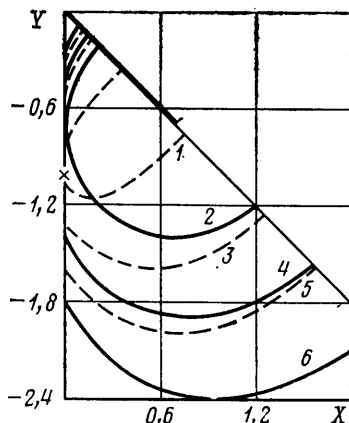
На фиг. 2 и 3 пунктирными линиями 1, 3, 5 представлены результаты численных расчетов форм выемки выброса для траншеи ( $\alpha = 3\pi/2$ ) и холма ( $\alpha = \pi/2$ ) при значениях параметра  $q = 1, 5, 10$  ( $X = x/h, Y = y/h$ ; точка 7 — положение заряда). Здесь, так же как и при непрерывно распределенном заряде, при увеличении параметра  $q$ , что соответствует увеличению мощ-

ности сосредоточенного заряда, размеры выемки выброса увеличиваются, а размеры целика уменьшаются.

**4. Выемки выброса грунта с угловой свободной границей при сосредоточенном заряде, расположенном на вершине угла.** Пусть сосредоточенный заряд расположен на поверхности грунта в угловой точке  $O$  (фиг. 4, а). В этом случае взрыв моделируется действием гидродинамического диполя момента  $m$ . Следует отметить, что диполь в данной задаче отличается от общепринятого в гидродинамике определения. Здесь под диполем в плоскости  $z$  понимается особенность вида  $z^{-\alpha/\pi}$ , которая при конформном отображении области  $G$  на четверть круга единичного радиуса в параметрической плоскости  $\zeta$  (фиг. 4, б) соответствует диполю в обычном смысле ( $w \sim (\zeta - i)^{-1}$ ). Аналогично предыдущим задачам с помощью аналитического продол-



Фиг. 2



Фиг. 3

жения на всю плоскость  $\zeta$  легко находятся функции

$$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{N\zeta}{(\zeta^2 + 1)^2}, \quad \frac{dw}{dz} = -iv_0 e^{-i\alpha} \left( \frac{\zeta + i}{\zeta - i} \right)^{(1 + \alpha/\pi)} \quad (4.1)$$

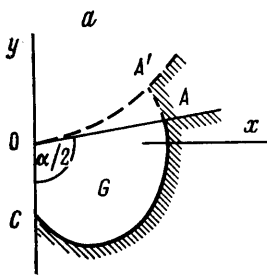
Множитель  $N$ , как и интенсивность  $q$ , может зависеть от мощности и геометрических размеров заряда, конфигурации свободной поверхности грунта и других физических параметров. Эту зависимость также можно найти лишь экспериментально. Например, для прямолинейной свободной границы грунта множитель  $N$  удается выразить через момент диполя  $m$ :  $N = 8\sqrt{m v_0}$ , а в работе [4] предложена зависимость момента от радиуса сечения заряда  $m = 4\pi\beta r^2$ , где коэффициент  $\beta$  для каждого ВВ определяется экспериментально.

Геометрические размеры выемки выброса находятся из уравнения (2.5) подстановкой в него выражений (4.1). На фиг. 5 кривыми 1, 2, 4 и 6 изображены результаты расчетов для значений угла  $\alpha = 2\pi, 3\pi/2, \pi, \pi/2$  соответственно. Здесь безразмерные координаты  $X = xv_0/N, Y = yv_0/N$ .

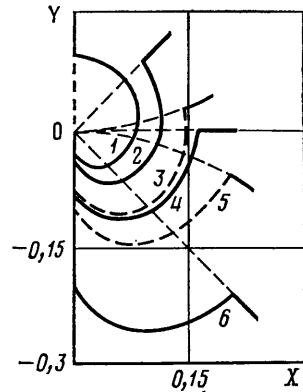
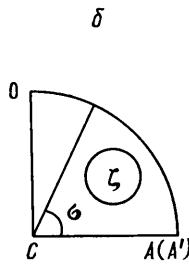
**5. Выемки выброса грунта с криволинейной свободной границей.** Пусть сосредоточенный заряд расположен в точке  $O$  на поверхности грунта  $OA'$ , представляющей собой дугу окружности кривизны  $\kappa = 1/R$  (фиг. 4, а). Аналогично предыдущей задаче взрыв моделируется диполем момента  $m$ . Полученная при взрыве выемка выброса (область  $G$ ) конформно отображается на четверть круга единичного радиуса (фиг. 4, б). При этом вид производной  $dw/dz$  будет совпадать с первой функцией (4.1). Для определения функции комплексной скорости воспользуемся методом Леви — Чивиты. Введем функцию

$$\omega = \ln(dw/dz) = \omega_0 + \omega_1$$

где  $\omega_0$  — логарифм от второй функции (4.1) при  $\alpha = \pi$ ,  $\omega_1$  представляется в виде ряда Тейлора, коэффициенты которого из соображений симметрии



Фиг. 4



Фиг. 5

действительные и содержат только нечетные степени. Таким образом

$$\omega = \ln \left[ iv_0 \left( \frac{\zeta+i}{\zeta-i} \right)^2 \right] + i \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n-1} \zeta^{2n-1} \quad (5.1)$$

Для определения неизвестных коэффициентов  $A_{2n-1}$  следует воспользоваться тем условием, что вдоль свободной границы грунта  $OA'$  скорость направлена перпендикулярно самой границе, поэтому

$$\frac{d\theta}{d\sigma} = \kappa \frac{ds}{d\psi} \frac{d\psi}{d\sigma}, \quad 0 \leq \sigma \leq \frac{\pi}{2} \quad (5.2)$$

где  $\theta$  — угол между вектором скорости и осью  $x$ ,  $s$  — длина дуги  $OA'$ . Из дифференциального уравнения (5.2) с учетом (4.1) и (5.1) следует

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) A_{2n-1} \sin[(2n-1)\sigma] = \\ = - \frac{\kappa N}{4v_0(1-\sin\sigma)^2} \exp \left( \sum_{m=1}^{\infty} A_{2m-1} \sin[(2m-1)\sigma] \right) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Уравнение (5.3) решается методом коллокации [6], для этого сохраняются первые  $M$  коэффициентов  $A_{2n-1}$  ( $n=1, 2, \dots, M$ ) и уравнение выполняется лишь в конечных  $M$  точках интервала  $(0, \pi/2)$ , таким образом получается система из  $M$  нелинейных уравнений для нахождения  $M$  коэффициентов  $A_{2n-1}$ .

Коэффициенты  $A_{2n-1}$  могут быть найдены также методом итерации. Для этого следует умножить уравнение (5.3) на  $\sin(2n-1)\sigma$  и проинтегрировать в интервале  $(0, \pi)$

$$\begin{aligned} A_{2n-1} = - \frac{\kappa N}{2\pi v_0(2n-1)} \int_0^{\pi} \exp \left( \sum_{m=1}^{\infty} A_{2m-1} \sin[(2m-1)\sigma] \right) \times \\ \times \frac{\sin[(2n-1)\sigma]}{(1+\sin\sigma)^2} d\sigma, \quad n=1, 2, 3 \dots \end{aligned} \quad (5.4)$$

Для решения системы (5.4) применяется итерационный метод. В качестве нулевого приближения полагаются все  $A_{2n-1}=0$ . В последующем со-

храняются первые  $M$  коэффициентов, которые удовлетворяют неравенству

$$|A_{2M-1}| \geq \varepsilon (|A_1| + |A_3| + \dots + |A_{2M-1}|)$$

где  $\varepsilon$  — заданная малая положительная величина.

Для сравнения были проведены вычисления по обоим методам. Следует отметить, что время решения системы методом коллокации в десять раз меньше времени, затрачиваемого на решение системы методом итерации при хорошей согласованности результатов.

Форма выемки выброса находится интегрированием уравнения

$$dz = e^{-\omega} dw$$

На фиг. 5 представлены результаты расчетов формы выемки выброса при двух значениях безразмерного параметра  $\mu = \kappa N / v_0 = \pm 2,5$  (пунктирные кривые 3 и 5).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1977. 408 с.
2. *Кузнецов В. М.* Математические модели взрывного дела. Новосибирск: Наука, 1977. 262 с.
3. *Артемьев И. Т., Краснов В. К., Терентьев А. Г.* Импульсное воздействие на неоднородную по прочности сплошную среду. — В кн.: Динамика сплошной среды со свободными поверхностями. Чебоксары: Изд-во Чувашск. ун-та, 1980, с. 3–10.
4. *Ильинский Н. Б., Поташев А. В.* Расчет выемок выброса, образующихся при взрыве в анизотропной среде. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1983, № 2, с. 3–9.
5. *Ильинский Н. Б., Поташев А. В., Рубиновский А. В., Фищенко П. А.* Решение некоторых задач теории взрыва в импульсно-гидродинамической постановке. — В кн.: Тр. Семинара по краевым задачам. Вып. 14. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1977, с. 98–109.
6. *Гуревич М. И.* Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с.

Чебоксары

Поступила в редакцию  
25.I.1984