

УДК 532.526

О ТОРМОЖЕНИИ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРЕ МАЛОЙ ВЫСОТЫ

ДОЛЖАНСКИЙ Ф. В., КРЫМОВ В. А.

Экспериментальное исследование определенных типов гидродинамической неустойчивости нередко проводится по наблюдениям за поведением жидкости, закручиваемой в сосудах различной формы [1, 2]. Если жидкость и сосуд не вращаются как единое целое, в такой системе наряду с основным азимутальным движением возникает поперечная циркуляция (см., например, [3-7]). Классическая задача о торможении жидкости в осесимметричном сосуде в полной постановке до сих пор не решена, поскольку при больших числах Рейнольдса начальная стадия процесса носит турбулентный характер. Наиболее интересный для технических приложений случай рассмотрен в [8, 9], в которых задача решается в предположении больших чисел Рейнольдса и малых чисел Россби ($|\Delta\omega/\omega| \ll 1$), т. е. в условиях, когда жидкость, находящаяся в начальный момент в состоянии быстрого вращения, испытывает затем воздействие оболочки, получившей малое приращение угловой скорости ω .

В данной работе рассматривается другой предельный случай, соответствующий вязкой стадии торможения жидкости в цилиндре малой высоты после его мгновенной остановки, т. е. задача решается в предположении малых чисел Рейнольдса для $|\Delta\omega/\omega|=1$. Получена простая формула, описывающая эволюцию поперечной циркуляции. Результаты сопоставляются с экспериментом.

1. В безразмерных переменных уравнения осесимметричного движения в цилиндрической системе координат записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} - \frac{uv}{r} &= \text{Re}^{-1}(\Delta - r^{-2})u, & \frac{dv}{dt} - \frac{u^2}{r} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \text{Re}^{-1}(\Delta - r^{-2})v \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \text{Re}^{-1}\Delta w, & \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial r} + w\frac{\partial}{\partial z}, & \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь u, v, w — азимутальная, радиальная и вертикальная составляющие скорости, $\text{Re} = H^2\omega/\nu$ — число Рейнольдса, H — высота цилиндра, ν — кинематическая вязкость. Обезразмеривание выполнено с помощью масштабов длины H , скорости ωH и времени ω^{-1} . На твердых границах выставляются условия прилипания.

Для малых чисел Рейнольдса решение сформулированной задачи ищем в виде разложения по параметру Re

$$\begin{aligned} u &= u_0(r, z, \tau) + O(\text{Re}), & v &= \text{Re} v_0(r, z, \tau) + O(\text{Re}^2) \\ w &= \text{Re} w_0(r, z, \tau) + O(\text{Re}^2), & p &= p_0(r, z, \tau) + O(\text{Re}) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь $\tau = \text{Re}^{-1}t$. После подстановки (1.2) в (1.1) и приравнявая членов одинакового порядка получается следующая система уравнений первого приближения (индекс нуль у зависимых переменных в дальнейшем опускается)

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = (\Delta - r^{-2})u, \quad \frac{\partial v}{\partial \tau} = -\frac{\partial p}{\partial r} + (\Delta - r^{-2})v + \frac{u^2}{r} \quad (1.3)$$

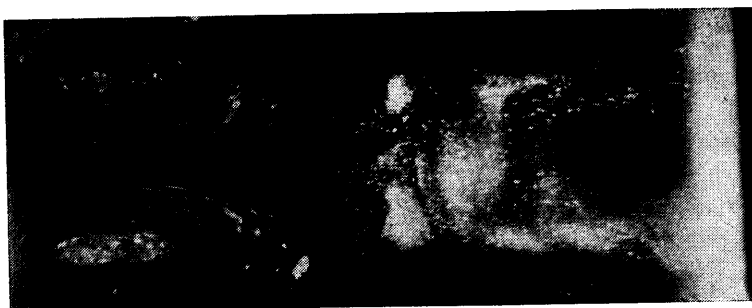
$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \Delta w, \quad \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

с граничными и начальными условиями

$$\begin{aligned} u=v=w|_{z=\pm 1/2} &= 0, & u=v=w|_{r=a} &= 0 \\ u|_{\tau=0} &= r, & v=w|_{\tau=0} &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

в которую параметр Re уже не входит. Вертикальная координата отсчитывается от средней горизонтальной плоскости цилиндра, $a=R/H$ — безразмерный радиус цилиндра.

2. Необходимость учета боковой стенки существенно затрудняет решение задачи (1.3), (1.4). Однако, как следует из теоретических и экспериментальных исследований (см., например, [10, 11]), при не слишком больших числах Рейнольдса боковая поверхность цилиндра не оказывает заметного влияния на движение внутренних, достаточно удаленных от нее



Фиг. 1

масс жидкости. В применении к рассматриваемому случаю конкретную оценку можно получить из решения задачи о стационарном течении жидкости в неподвижном цилиндре, торцы которого вращаются с постоянной угловой скоростью ω . Решение краевой задачи

$$(\Delta - r^{-2})u = 0, \quad u|_{z=\pm 1/2} = r, \quad u|_{r=a} = 0$$

записывается в виде

$$u = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a J_1(\mu_n r/a) \operatorname{ch}(\mu_n z/a)}{\mu_n J_0(\mu_n) \operatorname{ch}(\mu_n/2a)} \quad (2.1)$$

Здесь $J_0(x)$ и $J_1(x)$ — функции Бесселя, μ_n — нули функции $J_1(x)$. При выводе (2.1) использовались соотношения [12, 13]

$$\int_0^1 x^2 J_1(\alpha x) dx = \alpha^{-1} J_2(\alpha)$$

$$J_1'(\mu_n) = J_0(\mu_n) = -J_2(\mu_n)$$

Расчеты по формуле (2.1) показывают, что при $0 < r < r_* \approx a - 1$ азимутальная скорость u практически не зависит от z . Поэтому в указанной области поперечной циркуляции нет, и жидкость вместе с торцами вращается как единое целое. Это проиллюстрировано на фиг. 1, на которой приведена фотография поперечной циркуляции, наблюдаемой в эксперименте, описание которого дано ниже. На фотографии, в частности, видно, что циркуляция в радиальной плоскости действительно локализуется в области $r_* < r < a$, т. е. влияние боковой границы проникает лишь на расстояние порядка высоты цилиндра.

3. Учитывая основной вывод предыдущего пункта, при исследовании механизма торможения жидкости в цилиндре малой высоты можно ограничиться областью, в которой влияние боковых стенок не сказывается. Тогда вопрос сводится к изучению торможения жидкости, заключенной между двумя неподвижными бесконечными плоскостями, которая в начальный момент находится в состоянии твердого вращения. В этом случае решение гидродинамических уравнений можно искать в классе автомодельных функций, записывая искомые динамические переменные в виде (см., например, [1, 5])

$$\begin{aligned} u &= rf(z, \tau), & v &= rg(z, \tau) \\ w &= h(z, \tau), & p &= \frac{1}{2}r^2\gamma^2(\tau) + P(z, \tau) \end{aligned} \quad (3.1)$$

В результате подстановки (3.1) в (1.3)–(1.4) приходим к следующим краевым задачам с начальными условиями:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}; \quad f|_{\tau=0} = 1, \quad f|_{z=\pm 1/2} = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} + f^2 - \gamma^2(\tau); \quad g|_{\tau=0} = 0, \quad g|_{z=\pm 1/2} = 0 \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial h}{\partial z} = -2g; \quad h|_{\tau=0} = 0, \quad h|_{z=\pm 1/2} = 0$$

Давление восстанавливается с помощью уравнения $P_z = h_{zz} - h_\tau$. Решение задачи (3.2) удобно записать в виде

$$f = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \alpha_n^{-1} \exp(-\alpha_n^2 \tau) \cos \alpha_n z, \quad \alpha_n = (2n+1)\pi$$

Тогда для функции f^2 , входящей в уравнение (3.3) в качестве внешней «силы», получается выражение

$$f^2 = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^q A_{qm} \exp(-N_{qm}^2 \tau) \cos 2q\pi z \quad (3.4)$$

$$A_{qm} = 8(\alpha_m \alpha_{m+q})^{-1}, \quad N_{qm}^2 = \alpha_m^2 + \alpha_{m+q}^2$$

4. Задача (3.3) путем исключения неизвестной функции $\gamma^2(\tau)$ сводится к уравнению $h_{zz\tau} = h_{zzzz} - 4ff_z$ с нужным числом краевых и начальных условий, которое решается, в частности, в [14] методом преобразования Лапласа для случая нестационарного течения жидкости, внезапно раскручиваемой одним диском. В данном случае удобнее оказалось решать задачу (3.3) методом разделения переменных, а неизвестную функцию $\gamma^2(\tau)$ находить из интегрального условия сохранения массы

$$\int_{-1/2}^{1/2} g(z, \tau) dz = 0 \quad (4.1)$$

Вначале ищем решение задачи (3.3), (4.1) с внешним источником

$$\begin{aligned} f^2 &= f_{qmn}^2 = A_{qmn} \exp(-N_{qmn}^2 \tau) \cos \alpha_n z \\ A_{qmn} &= (-1)^{q+n} \frac{16\pi^2 q^2 A_{qm}}{\alpha_{n-q} \alpha_n \alpha_{n+q}} \end{aligned}$$

Здесь A_{qmn} – коэффициенты разложения правой части (3.4) в ряд по $\cos \alpha_n z$. Решение такой задачи записывается в виде (индексы q и m временно опускаются)

$$g_n(z, \tau) = 4 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \alpha_k^{-1} \cos \alpha_k z \exp(-\alpha_k^2 \tau) \times \\ \times \int_0^{\tau} \exp(\alpha_k^2 \xi) F_n(\xi) d\xi + A_n (\alpha_n^2 - N^2)^{-1} [\exp(-N^2 \tau) - \exp(-\alpha_n^2 \tau)] \cos \alpha_n z \quad (4.2)$$

где неизвестная функция $F_n(\tau) = -\gamma^2(\tau) + A_n \exp(-N^2 \tau)$ — решение интегрального уравнения

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^{-2} \exp(-\alpha_k^2 \tau) \int_0^{\tau} \exp(\alpha_k^2 \xi) F_n(\xi) d\xi = \frac{(-1)^n A_n}{4\alpha_n (\alpha_n^2 - N^2)} [\exp(-N^2 \tau) - \exp(-\alpha_n^2 \tau)] \quad (4.3)$$

которое получается после подстановки (4.2) в (4.1).

Уравнение (4.3) имеет единственное решение

$$F_n(\tau) = \frac{(-1)^{n+1} A_n}{4\alpha_n (\alpha_n^2 - N^2)} \left[B \exp(-N^2 \tau) + \sum_{l=1}^{\infty} C_{nl} \exp(-\lambda_l^2 \tau) \right] \quad (4.4)$$

где неизвестные постоянные B , C_{nl} и λ_l находятся путем подстановки (4.4) в (4.3) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях e . В итоге получается, что λ_l — положительные нули мероморфной функции

$$Q(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} [\alpha_k^2 (\alpha_k^2 - x^2)]^{-1} = (4x^3)^{-1} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{x}{2} \right) \quad (4.5)$$

Здесь $B = Q^{-1}(N)$, а C_{nl} удовлетворяют бесконечной системе линейных алгебраических уравнений (δ_{kn} — символ Кронекера)

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{C_{nl}}{\alpha_k^2 (\alpha_k^2 - \lambda_l^2)} + \frac{B}{\alpha_k^2 (\alpha_k^2 - N^2)} = \delta_{kn} \quad (k=0, 1, 2, \dots, \infty) \quad (4.6)$$

решение которой имеет вид

$$C_{nl} = -Q^{-1}(N) \frac{\alpha_l^2 - \lambda_l^2}{\alpha_l^2 - N^2} \frac{\alpha_n^2 - N^2}{\alpha_n^2 - \lambda_l^2} \frac{\alpha_0^2 - \lambda_l^2}{\alpha_0^2 - N^2} \prod_{k \neq l} \left(\frac{\alpha_k^2 - \lambda_l^2}{\alpha_k^2 - N^2} \frac{\lambda_k^2 - N^2}{\lambda_k^2 - \lambda_l^2} \right) \quad (4.7)$$

Как следует из равенства (4.5), которое доказывается путем разложения правой его части на элементарные дроби (см., например, [15]), положительные нули функции $Q(x)$ совпадают с положительными корнями трансцендентного уравнения $\operatorname{tg}(x/2) = x/2$. Поэтому $\alpha_{l-1} < \lambda_l < \alpha_l$ и при $l \rightarrow \infty$ $\lambda_l \rightarrow \alpha_l$.

В результате подстановки (4.4) с учетом (4.7) в (4.2) и последующего суммирования по значкам k и n получается следующее выражение для функции $G_{qm}(\tau) \equiv g_{qm}(0, \tau)$ (индексы q и m возвращаются на свои места)

$$G_{qm}(\tau) = (-1)^q 16\pi^2 q^2 A_{qm} \left\{ \left[S_q(N_{qm}) - \frac{R(N_{qm}) T_q(N_{qm})}{Q(N_{qm})} \right] \exp(-N_{qm}^2 \tau) + \right. \\ \left. + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\alpha_l^2 - \lambda_l^2}{\alpha_l^2 - N_{qm}^2} \frac{\alpha_0^2 - \lambda_l^2}{\alpha_0^2 - N_{qm}^2} \frac{\Pi_{qml}}{Q(N_{qm})} R(\lambda_l) T_q(\lambda_l) \exp(-\lambda_l^2 \tau) \right\} \quad (4.8)$$

$$R(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [\alpha_k (\alpha_k^2 - x^2)]^{-1} = \frac{1}{4x^2} \left(\frac{1}{\cos(x/2)} - 1 \right)$$

и для $q \neq 0$

$$S_q(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha_{n-q} \alpha_n \alpha_{n+q} (\alpha_n^2 - x^2)} = [4x^2 (x^2 - 4q^2 \pi^2)]^{-1} \left(\frac{1}{\cos(x/2)} + \frac{1 + (-1)^{q+1}}{4q^2 \pi^2} x^2 - 1 \right)$$

$$T_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [\alpha_{n-q} \alpha_n^2 \alpha_{n+q} (\alpha_n^2 - x^2)]^{-1} = \frac{1}{4x^2} \left(\frac{\operatorname{tg}(x/2)}{x(x^2 - 4q^2\pi^2)} + \frac{1}{8q^2\pi^2} \right)$$

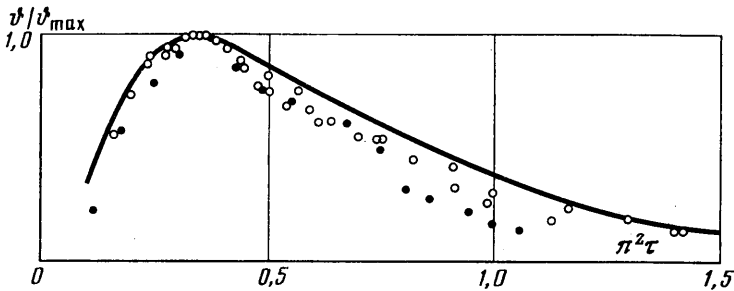
Здесь \prod_{qml} – бесконечное произведение, входящее в равенство (4.7). При выводе (4.8) использовалось равенство (4.6), а формулы для $R(x)$, $S_q(x)$ и $T_q(x)$ доказываются тем же методом, что и (4.5).

Остается просуммировать (4.8) по индексам m и q , причем для практических целей, учитывая быструю сходимость рядов по q , m и l , достаточно ограничиться значениями $|q|=1, 2$; $m=0, 1$; $l=1$.

В результате вычислений получается следующая приближенная формула, описывающая эволюцию радиальной составляющей скорости при $z=0$:

$$G(\tau) = g(0, \tau) = 1,28\pi^{-4} [1,05 \exp(-2\pi^2\tau) - 4,40 \exp(-8,2\pi^2\tau) + 3,25 \exp(-10\pi^2\tau)] \quad (4.9)$$

В формуле (4.9) не учтено влияние высших мод в разложении (3.4) для f^2 , начиная с $|q|=3$, которые, как показывают оценки, отмирают задолго до того, как первые две моды достигнут своего максимального значения. Поэтому в рамках принятых ограничений формула (4.9) не эффективна лишь в малой окрестности $\tau=0$ ($\pi^2\tau \lesssim 0,05$). График радиальной составляющей скорости изображен на фиг. 2 сплошной линией.



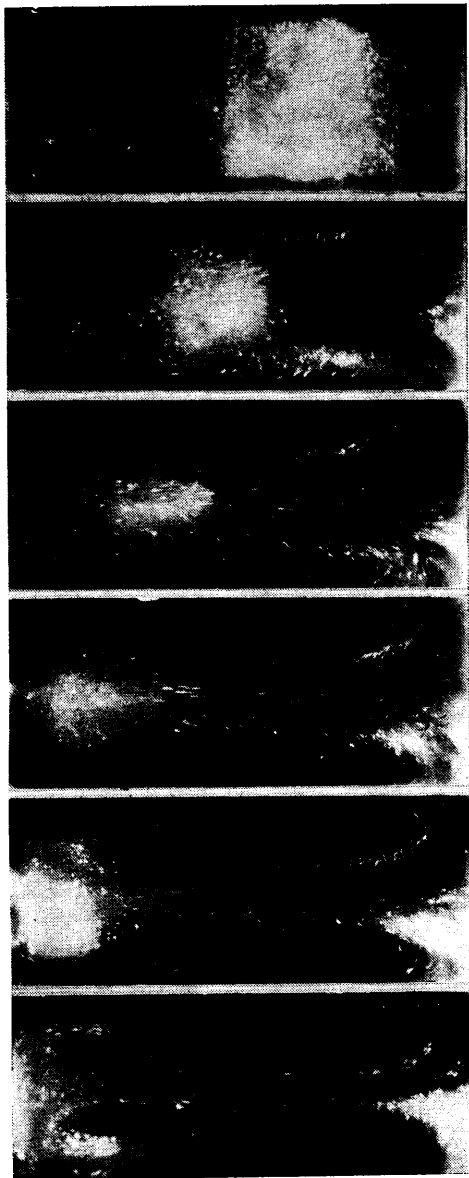
Фиг. 2

Найденному решению соответствует течение, образующее в радиальной плоскости по одну сторону от оси вращения две конвективные ячейки, направления вращения которых определяется тем, что движение жидких частиц на средней плоскости происходит от центра к периферии (см. кинограмму на фиг. 3). Таким образом, в обоих полупространствах, разделенных средней плоскостью, траектории жидких частиц совпадают с обмоткой тора. Согласно расчетам, радиальная циркуляция достигает своего максимального значения за время $T_1 = 0,36H^2/\pi^2\nu$, а затем убывает в e раз за время $T_2 = 0,74H^2/\pi^2\nu$.

Заметим, что на средней плоскости выполняются краевые условия на свободной поверхности жидкости. Поэтому в цилиндре без верхней крышки движение происходит так, как в нижней половине цилиндра с торцами, причем при малых скоростях вращения, когда кривизна свободной поверхности пренебрежимо мала, формула (4.9) описывает течение на свободной поверхности жидкости в цилиндре высотой $H/2$. Следовательно, для цилиндра высотой H времена T_1 и T_2 будут в 4 раза больше приведенных выше.

5. С целью проверки теоретических результатов и для выяснения области применимости формулы (4.9) была проведена серия экспериментов по торможению жидкости на установке многоцелевого назначения. Установка состоит из двух круглых соосных дисков радиусами $R=10$ см, размещенных по вертикали на расстоянии $H=1,65$ либо 4 см и помещенных внутрь цилиндрической полости. Оболочка полости изготовлена из плексигласа. Зазор между краями дисков и оболочкой не превышает 0,5 мм.

Конструкция установки предусматривает возможность автономного вращения дисков в одинаковом и противоположных направлениях с различными скоростями. В нашем случае диски вращались с одинаковыми по величине и направлению угловыми скоростями. В качестве рабочего тела использовались водные растворы глицерина с кинематическими вязкостями от 0,05 до 6 см²/с, что обеспечивало достижение малых чисел Рейнольдса. В экспериментах число Рейнольдса варьировалось в пределах от 0,4 до 50. Течение визуализировалось взвешенными частицами бронзовой пудры. Для получения картины поперечной циркуляции использовался световой нож, расположенный в радиальной плоскости. Скорость радиального течения измерялась двумя способами:



Фиг. 3

по движению визуализационных меток в плоскости симметрии и с помощью лазер-доплер-анемометра фирмы DISA. Профили азимутальной скорости снимались трековым методом.

Эксперименты по торможению жидкости в цилиндре проводились следующим образом. Жидкость в течение длительного времени раскручивалась дисками, вращающимися с постоянной скоростью в одном направлении, до тех пор, пока взвешенные частицы не рассеивались радиальной циркуляцией в окрестности боковой стенки в область квазитвердого вращения. В результате область квазитвердого вращения окрашивалась в желтый цвет, а область влияния боковой стенки становилась темной, как показано на первой фотографии фиг. 3. Затем диски останавливались. После остановки дисков жидкость в окрестности средней плоскости начинает движение от центра к периферии и в противоположную сторону в окрестности дисков. Кинограмма развития процесса поперечной циркуляции приведена на фиг. 3. Временной интервал между снимками, за исключением последнего, равен 2 с, первая фотография соответствует моменту останова, последний сделан на 14-й с.

Экспериментальная зависимость от времени радиальной составляющей скорости течения для $Re \approx 50$, измеренная в окрестности средней плоскости, показана на фиг. 2 точками. Темные точки соответствуют измерениям, выполненным по движению визуализационных меток, т. е. лагранжевой скорости течения, а светлыми точками отмечены значения

тем, что при измерении лагранжевой скорости жидкая частица в конечном итоге попадает в зону влияния боковой стенки, что усиливает процесс ее торможения.

Для сравнения на фиг. 2 приведена теоретическая кривая, которая согласуется с экспериментальными результатами в среднем с точностью до 15% (при сопоставлении использовались только измерения, полученные лазерным анемометром), хотя и здесь наблюдается систематическое расхождение. Это указывает на существование при таких числах Рейнольдса нелинейных эффектов, под влиянием которых поперечная циркуляция оказывает заметное влияние на азимутальную составляющую, в результате чего процесс торможения усиливается.

В качестве примера приведем теоретические и экспериментальные значения основных характеристик процесса торможения при следующих параметрах установки: $H=1,65$ см, $\nu=0,51$ см²/с, $\omega=1$ с⁻¹, $Re=53$. Время затухания азимутальной компоненты $T_0=5,4$ с ($5,2\pm 0,3$), время развития поперечной циркуляции $T_1=2$ с ($2\pm 0,2$) и максимальная радиальная скорость поперечной циркуляции $v_{max}=1,3$ см/с ($1,0\pm 0,2$); здесь значения в круглых скобках относятся к эксперименту.

При уменьшении числа Рейнольдса согласованность теоретических и экспериментальных результатов улучшается. Таким образом, $Re=50$ можно принять за верхний предел применимости формулы (4.9). В связи с этим уместно вспомнить, что формула (4.9) выведена в предположении малых чисел Рейнольдса. Результаты теоретического анализа и экспериментальные данные наводят на мысль, что естественным параметром разложения в рассматриваемой задаче является не $Re=H^2\omega\nu^{-1}$, а $Re_0=\pi^2 Re$. Тогда влияние нелинейных эффектов должно быть заметным не при $Re\geq 1$, а при $Re\geq 10$, что и наблюдается в эксперименте. При $10\leq Re\leq 50$ это влияние, однако, не слишком значительное.

Авторы благодарят А. М. Обухова на предложенную тему, Е. М. Жуховицкого за конструктивные обсуждения и Н. Ю. Полунину за помощь в оформлении иллюстративного материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Greenspan H. P. The theory of rotating fluids. Cambridge: Cambr. univ. press, 1968. 327 p. (Рус. перевод Гринспен Х. П. Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеиздат. 1975. 304 с.).
2. Гледзер Е. В., Должанский Ф. В., Обухов А. М. Системы гидродинамического типа и их применение. М.: Наука, 1981. 366 с.
3. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гостехиздат, 1955. 519 с.
4. Дорфман Л. А. Гидродинамическое сопротивление и теплоотдача вращающихся тел. М.: Физматгиз, 1960. 260 с.
5. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
6. Гольдшиг М. А. Вихревые потоки. Новосибирск: Наука, 1981. 366 с.
7. Einstein A. Die Ursache der Maanderbildung der Flussläufe und des sogenannten Baerschen Gesetzes.—Naturwiss, 1926, В. 14, S. 223–224. (Рус. перевод Эйнштейн А. Причины образования извилин в руслах рек и так называемый закон Бэра. Собр. науч. тр. М.: Наука, 1964, т. 4, с. 74–77).
8. Greenspan H. P., Howard L. N. On a time-dependent motion of a rotating fluid.— J. Fluid Mech., 1963, v. 17, № 3, p. 385–404.
9. Greenspan H. P., Weinbaum S. On non-linear spin-up of a rotating fluid.— J. Math. and Phys., 1965, v. 44, № 1, p. 66–85.
10. Дорфман Л. А., Романенко Ю. Б. Течение вязкой жидкости в цилиндрическом сосуде с вращающейся крышкой.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, № 5, с. 63–69.
11. Szeri A. Z., Schneider S. J., Labbe F., Kaufman H. N. Flow between rotating disks. Pt I. Basic flow.— J. Fluid Mech., 1983, v. 134, p. 103–131.
12. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
13. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 830 с.
14. Pearson C. E. Numerical solutions for the time-dependent viscous flow between two rotating coaxial disks.— J. Fluid Mech., 1965, v. 21, № 4, p. 623–633.
15. Евграфов М. А. Аналитические функции. М.: Наука, 1968. 471 с.

Москва

Поступила в редакцию
31.V.1983