

движущейся стационарно, в случае, когда $R > 1/8$, приводит к увеличению коэффициента сопротивления сферы. По мере того как частицы становятся одинаковыми по размерам (т. е. $R \rightarrow 1$), коэффициент сопротивления обнаруживает тенденцию к уменьшению (при малых расстояниях между ними $b \leq 3$) в достаточно широком диапазоне чисел Рейнольдса ($1 \leq R \leq 80$), что было отмечено в [4, 5] для случая равных сфер.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с.
2. Stimson M., Jeffry G. The motion of two spheres in a viscous fluid.— Proc. Roy. Soc., London, Ser. A, 1926, v. 111, № 757, p. 110–116.
3. Davis A. M., O'Neill M. E., Dorrepaal J. M., Ranger K. B. Separation from the surface of two equal spheres in Stokes flow.— J. Fluid Mech., 1976, v. 77, № 4, p. 625–644.
4. Иванов К. П., Ривкин В. Я. Обтекание двух твердых частиц вязкой несжимаемой жидкостью в осесимметричном потоке. Л., 1980, 41 с. Рукопись деп. в ВИНТИ 7.08.80, № 3503–80 Деп.
5. Иванов К. П., Ривкин В. Я. Стационарное обтекание двух частиц вязкой несжимаемой жидкостью при умеренных числах Рейнольдса.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1982, № 1, с. 167–171.

Ленинград

Поступила в редакцию
14.II.1984

УДК 532.546

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ИНЕРЦИОННЫХ ЧЛЕНОВ В УРАВНЕНИИ ДВИЖЕНИЯ НА ФИЛЬТРАЦИЮ ГАЗА

ГОРДЕЕВ Ю. Н., КОЛОБАШКИН В. М., КУДРЯШОВ Н. А.

При описании движения газа в трещиновато-пористой среде вместо уравнения Эйлера с учетом сил сопротивления используются эмпирические экспериментально установленные законы: линейная и квадратичная зависимости градиента давления газа от скорости [1]. Для большинства решаемых задач фильтрации жидкости и газа такая замена не может вызвать сомнений. Исследованию этого обстоятельства посвящено большое число экспериментальных и теоретических работ.

Однако при описании движения газа через сильно разрушенные среды под действием больших градиентов давлений на первой стадии процесса законы фильтрации не выполняются.

В данной работе рассматриваются задачи о движении газа в пористой среде, причем в качестве уравнения движения используются как уравнение Эйлера с силой трения, так и эмпирические зависимости — линейный закон Дарси и двучленный закон сопротивления. Полученные численные решения сравниваются и устанавливаются характерные времена и характерные длины пористой среды, при которых решения совпадают.

Рассмотрим движение газа через пористую среду, которое описывается следующей системой уравнений [2]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} j = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} j + \frac{\partial}{\partial x} \left(P + \frac{f^2}{\rho} \right) + F = 0, \quad P = c^2 \rho \quad (1)$$

Здесь ρ — плотность, P — давление, $j = \rho u$ — плотность потока газа, F — сила сопротивления при движении газа в пористой среде, c — изотермическая скорость звука, u — скорость движения газа, x — координата, t — время.

Сила сопротивления при движении газа F зависит от скорости u и при малых числах Рейнольдса $Re < 1$ ($Re = u \rho \lambda \mu^{-1}$) определяется выражением $F = \mu \epsilon u k^{-1}$; при $Re > 1$, $F = \mu \epsilon u k^{-1} + \lambda \epsilon^2 k^{-1} \rho u^2$. Здесь k — проницаемость пористой среды, μ — вязкость газа, λ — характерный размер среды, ϵ — пористость.

Вместо второго уравнения в (1), которое является следствием закона сохранения импульса, для описания движения газа в пористой среде используется зависимость

$$\frac{\partial}{\partial x} P + F = 0 \quad (2)$$

Если $F(u)$ линейно зависит от скорости, то фильтрация газа описывается законом Дарси, при $F(u) = \mu \epsilon u k^{-1} + \lambda \epsilon^2 k^{-1} \rho u^2$ — двучленным законом сопротивления.

Для системы уравнений (1) граничные и начальные условия запишем в виде

$$P(0, t) = P_1, \quad P(x \rightarrow \infty, t) = P_0, \quad t \geq 0; \quad P(x, 0) = P_0, \quad u(x, 0) = 0, \quad x \geq 0 \quad (3)$$

Здесь P_1 — давление газа на входе пористой среды, P_0 — начальное давление газа.

Для описания фильтрационного течения газа достаточно задать три первых условия из (3) [3].

Задача решалась численным методом. С этой целью вводились безразмерные переменные по формулам

$$x' = \frac{x}{l}, \quad P' = \frac{P}{P_1}, \quad t' = \frac{tc}{l}, \quad u' = \frac{u}{c}, \quad F = F \frac{l}{P_1}$$

где l — параметр размерности длины, определяемый ниже.

Систему дифференциальных уравнений (1), (2) можно представить в виде одного векторного уравнения [4]

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{W} = \Phi \quad (4)$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} P \\ \beta m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} m \\ P + \beta \frac{m^2}{P} \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ -F \end{pmatrix}, \quad m = Pu \quad (5)$$

Уравнение (4) при $\beta = 1$ соответствует системе уравнений газовой динамики с учетом сил сопротивления, при $\beta = 0$ — системе уравнений, описывающей фильтрационные течения. Векторы \mathbf{V} , \mathbf{W} и Φ зависят от вектора решения \mathbf{U} , где \mathbf{U} имеет компоненты P и m .

Дифференциальные уравнения (4) аппроксимировались неявными разностными уравнениями со вторым порядком точности по времени и координате. Поскольку полученная система разностных уравнений нелинейна, то для их численного решения на каждом временном слое применялась линеаризация по методу Ньютона. Граничные и начальные условия для разностных уравнений задавались в соответствии с условиями (3). Для решения линеаризованной разностной краевой задачи использовался метод матричной прогонки [5]. Наибольшее число итераций на каждом временном слое равнялось шести.

Результатами численного решения задач являются зависимости давления и скорости движения газа от пространственных и временных аргументов.

На фиг. 1 представлены зависимости от координаты скорости движения газа в пористой среде в моменты времени $t_1 = 1,5$; $t_2 = 40$; $t_3 = 98$ (кривые 1—3). Сплошные кривые соответствуют расчету газодинамической задачи, штриховые — фильтрационному течению при двучленном законе сопротивления. Из фиг. 1 видно, что зависимости скорости в приближении двух моделей начиная с некоторого момента времени «близки» друг к другу. На каждом шаге по времени проводилось сравнение

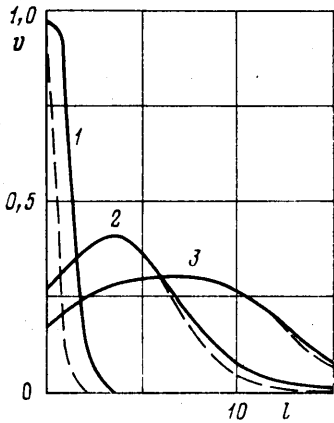
получаемых численных решений U_1^{n+1} и U_2^{n+1} для двух моделей. Если для фиксированного момента времени t^{n+1} норма

$$\|U_2^{n+1} - U_1^{n+1}\| = \max_{i < i \leq N} |U_2(x_i, t^{n+1}) - U_1(x_i, t^{n+1})|$$

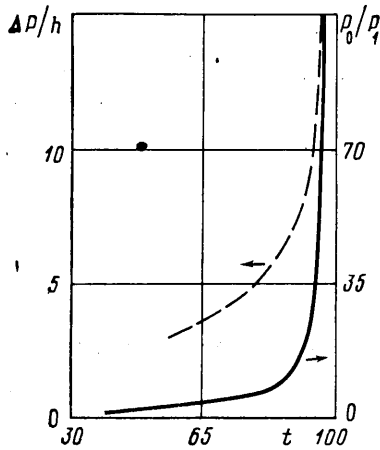
не превышает 10^{-2} , то решения считаются совпадающими ($x_{i+1} = x_i + h$, $t^{n+1} = t^n + \tau$; h — шаг по координате, τ — шаг по времени, $i = 1, \dots, N$).

На фиг. 2 представлены зависимости времени совпадения решений от отношения давлений газа на входе пористой среды к фоновому давлению P_1/P_0 (сплошная линия) и от начального градиента давления газа в среде $\Delta P/h$ (штриховая линия, $\Delta P = P_1 - P_0$). Параметр длины l при расчетах принимался равным $l = l_d = = k P_1 (\epsilon \mu c)^{-1}$. На фиг. 2 видно, что время совпадения решений зависит от отношения давлений газа и от начальных градиентов давлений в пористой среде. При отношении давлений газа $P_1/P_0 < 10$ время, при котором решения совпадают, резко уменьшается. Если $P_1/P_0 > 10$, то безразмерное время совпадения решений близко постоянной величине ~ 100 . Подобная зависимость имеет место и от начальных градиентов давлений газа. В случае малых градиентов закон Дарси применим практически на начальной стадии процесса движения газа.

Расчеты показали, что для больших начальных градиентов давления газа (> 10) и отношений начальных давлений $P_1/P_0 > 10$ при описании фильтрации газа



Фиг. 1



Фиг. 2

можно пользоваться линейным законом Дарси для характерных времен и длин

$$t \geq \frac{98kP_1}{\epsilon \mu c^2}, \quad L \geq \frac{19kP_1}{\epsilon \mu c} \quad (6)$$

К этому времени инерционные члены в уравнении (1) затухают и решения в приближении двух моделей отличаются в норме, приведенной выше, на величину, меньшую 10^{-2} .

Для установления интервалов применимости двучленного закона фильтрации проводились численные расчеты двух задач с учетом и без учета силы сопротивления в виде двучленной зависимости от скорости.

Зависимости времени совпадения решений от отношений давлений P_1/P_0 и от начальных градиентов давлений для двучленного закона сопротивления качественно имеют тот же вид, что и для линейного закона Дарси. Однако количественные значения различаются. Для этой серии расчетов характерный параметр длины принимался равным $l = l_c = k\lambda^{-1}\epsilon^{-2}$. При этом получено, что решения с точностью до 10^{-2} совпадают при

$$t \geq \frac{55k}{\lambda \epsilon^2 c}, \quad L \geq \frac{90k}{\lambda \epsilon^2} \quad (7)$$

Используя связь параметра среды λ и проницаемости k с характерным размером пор δ и пористостью ϵ [9], из (7) получаем

$$t \geq \frac{266\delta\epsilon}{c(1-\epsilon)} \approx 350 \frac{1}{c} \sqrt{\frac{k}{\epsilon}}, \quad \lambda = 0,012 \frac{\delta}{1-\epsilon}, \quad k = \frac{0,066^2 \epsilon^3}{(1-\epsilon)^2}$$

Полученные формулы могут быть применимы и при анализе уравнений движения газа по отдельным магистральным трещинам, но выражения для сил трения и формулы для характерных параметров времени и длины будут иными.

Таким образом, в работе методом численного эксперимента установлены характерные времена затухания инерционных членов в уравнении Эйлера с силами трения. Решения газодинамических задач с силами сопротивления практически не отличаются от фильтрационных течений для характерных времен и длин, определяемых по формулам (6) и (7).

Авторы благодарят В. М. Ентова за полезные замечания, способствующие улучшению работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А. Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра, 1970. 335 с.
2. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
3. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1968. 592 с.
4. Ковеня В. М., Яненко Н. Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1981. 304 с.
5. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. 552 с.
6. Виноградова К. П., Бутырин Г. М., Рогойлин М. И., Фарберов И. Л., Черных В. А. О применении линейного закона фильтрации для пористых углеродистых материалов на основе пироуглеродного связующего.— Химия твердого топлива, 1976, № 3, с. 140—145.

7. Куршин А. П. Закономерности течения газа через пористые среды с жесткой структурой.— Уч. зап. ЦАГИ, 1981, т. 12, № 6, с. 62—77.
8. Nilson R. H. Transient fluid flow in porous media: inertia-dominated to viscous-dominated transition.— Trans. ASME, J. Fluids Eng., 1981, v. 103, № 2, p. 339—343.
9. Nilson R. H. Gas-driven fracture propagation.— Trans. ASME, J. Appl. Mech., 1981, v. 48, № 4, p. 757—762.

Москва
Московский инженерно-физический институт

Поступила в редакцию
5.XII.1983

УДК 532.58

ИЗМЕРЕНИЕ УПОРА ВОЛНООБРАЗНО ДЕФОРМИРУЕМОЙ ПЛАСТИНЫ

КОЗЛОВ Л. Ф., КОРЕННАЯ Л. И.

Волнообразно деформируемая пластина малого удлинения может служить двигателем, если поперечная бегущая волна распространяется в направлении от передней кромки пластины к задней со скоростью, большей скорости поступательных перемещений. Реакция отброшенных масс жидкости преобразуется в силу, составляющая которой, совпадающая с направлением поступательных перемещений, называется упором двигателя (если вблизи двигателя отсутствуют другие тела) или тягой (для двигателя, установленного на перемещающееся в воде тело). На волнообразно деформируемых пластинах были выполнены измерения упора в двумерном [1] и в трехмерном [2] потоках. В данной работе приведены результаты измерения упора при буксировке в бассейне [3] волнообразно деформируемой пластины в свободной воде и комплексов с волнообразно деформируемой пластиной, в которых пластина была расположена в водоводе и между направляющими пластинами.

Эксперименты в свободной воде выполнены с тремя пластинами из резины, отличающимися по длине: $l \times h \times q = 0,963 \times 0,251 \times 0,004$ м; $0,502 \times 0,251 \times 0,004$ м; $0,251 \times 0,251 \times 0,004$ м. Соответственно удлинение пластин Λ было 0,26; 0,5; 1 и количество завулканизированных ребер жесткости для крепления к тягам установки 13; 7; 4. Передняя и задняя кромки острые, а боковые срезаны под прямым углом. В экспериментах с комплексами использовалась пластина размерами $0,963 \times 0,251 \times 0,004$ м. Прототипом экспериментальной установки послужила созданная ранее установка для изучения гидромеханики гибкой пластины [2, 4].

Для измерения упора комплексов с волнообразно деформируемой пластиной изготовлены два водовода в виде труб длиной 1,2 м с прямоугольным сечением. Ширина рабочего сечения 0,255 м выполнена по ширине пластины, высота 0,105 и 0,205 м для амплитуд бегущей волны $A=0,05$ и 0,1 м. Боковые стенки водоводов прозрачные и легкоъемные. Эксперименты, выполненные с водоводом с боковыми стенками и с водоводом без боковых стенок, ниже представлены соответственно как эксперименты с комплексом пластина — водовод и с комплексом пластина — направляющие пластины. Водовод крепился четырьмя ножами обтекаемой формы к основной раме установки, на которой смонтирован вал с эксцентриками.

Глубина погружения нейтральной оси пластины составляла $H=0,58$ м, при этом $H/2A=2,9$ при $A=0,1$ м и $H/2A=5,8$ при $A=0,05$ м. Если глубина погружения оси гребного винта не менее его диаметра, влиянием свободной поверхности можно пренебречь [5]. В рассматриваемых случаях параметром, идентичным диаметру гребного винта, является удвоенная амплитуда колебаний, при этом $H/2A > 1$, следовательно, свободная поверхность не влияет на результаты эксперимента.

Закон деформации пластины в подвижной системе координат xuz , ось x которой направлена вперед от передней кромки и по нейтральной оси пластины, описывается уравнением

$$y = A \sin(\omega t + \beta x + \varphi_0)$$

где $\omega = 2\pi f$ — круговая частота, $\beta = 2\pi/\lambda$ — волновое число, f — частота колебаний, λ — длина волны, φ_0 — начальная фаза колебаний. Скорость бегущей волны $c = \lambda f$.

На длине пластины $l=0,963$ м укладывалась одна длина волны $\lambda=0,86$ м при амплитуде волны $A=0,1$ м и одна длина волны $\lambda=0,934$ м при амплитуде волны $A=0,05$ м.

На швартовых и при буксировке в бассейне [3] на скоростях $V \approx 0,4; 0,7; 1; 1,2$ м/с задавались несколько режимов частоты колебаний в пределах 0,9—3,5 Гц.

В табл. 1 и 2 представлены значения среднего за период колебаний упора $\langle P \rangle$, N , полученные на различных частотах f , Гц, при $V=0$. Всего испытано 10 типов моделей двигателей с волнообразно деформируемой пластиной. Табл. 1 — пластина в свободной воде (двигатели № 1—6); табл. 2 — комплексы с пластиной: I — комплекс пластина — водовод (двигатели № 7, 9), II — комплекс пластина — направляющие пластины (двигатели № 8, 10). Пользуясь терминологией, принятой в теории гидравлических двигателей [5], ограничимся следующими терминами: упор $\langle P \rangle$, коэффициент упора $k_1 = \langle P \rangle / (\rho c^2 F_p)$, гидравлическое сечение двигателя $F_p = 2Ah$, относи-