

УДК 532.516

СТАЦИОНАРНОЕ ОБТЕКАНИЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ  
ДВУХ ЧАСТИЦ РАЗНЫХ РАЗМЕРОВ

ИВАНОВ К. П., РИВКИНД В. Я.

В работе изучается обтекание осесимметричным стационарным потоком вязкой несжимаемой жидкости двух частиц сферической формы, движущихся вслед друг другу, в предположении, что меньшая по размерам находится в следе первой.

Пусть имеются две сферические частицы радиусов  $R_1$  и  $R_2$ , движущиеся вслед друг другу относительно потока с вектором скорости  $V=(0, 0, U)$  равномерно и прямолинейно. Свяжем с частицами систему декартовых координат, направив ось  $z$  вдоль потока, и выберем в качестве характерного размера радиус большего шара  $R_1$ ; тогда пусть  $R=R_2/R_1$  — отношение радиусов сфер,  $b$  — расстояние между центрами сфер (в единицах радиуса  $R_1$ ). Поток считается однородным с постоянными плотностью  $\rho$  и вязкостью  $\mu$ , а движение осесимметричным и стационарным.

Уравнения, описывающие движение, имеют вид

$$\frac{1}{Re} \operatorname{rot}^2 \mathbf{v} + \operatorname{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{Fr} \mathbf{f}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\mathbf{v}|_s = 0, \quad \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}_\infty = (0, 0, 1)$$

$$Re = 2R_1 U \rho \mu^{-1}, \quad Fr = U^2 (2gR_1)^{-1}$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость,  $p$  — давление,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $Re$ ,  $Fr$  — числа Рейнольдса и Фруда.

В стоксовом приближении решение указанной задачи получено аналитически для функции тока [1, 2] в виде ряда

$$\psi(\xi, \eta) = (\operatorname{ch} \xi - \cos \eta)^{-1/2} \sum_{n \geq 1} Q_n^{(1)} Q_n^{(2)}$$

$$Q_n^{(1)} = A_n \operatorname{ch}(n-1/2)\xi + B_n \operatorname{sh}(n-1/2)\xi + C_n \operatorname{ch}(n+3/2)\xi + D_n \operatorname{sh}(n+3/2)\xi$$

$$Q_n^{(2)} = P_{n-1}(\mu) - P_{n+1}(\mu), \quad \mu = \cos \eta$$

Здесь  $P_n(\mu)$  — полиномы Лежандра;  $A_n, B_n, C_n, D_n$  — константы, определяемые граничными условиями, причем при  $R=1$   $C_n=D_n=0$ ;  $\xi, \eta$  — биполярные координаты, связанные с цилиндрическими зависимостью

$$z + ir = ic \operatorname{ctg} \frac{\eta + i\xi}{2}, \quad \xi + i\eta = \ln \frac{r + i(z+c)}{r + i(z-c)}$$

$$c = \sqrt{b_1^2 - R^2}, \quad b_1 = \frac{b^2 + R^2 - 1}{2b}$$

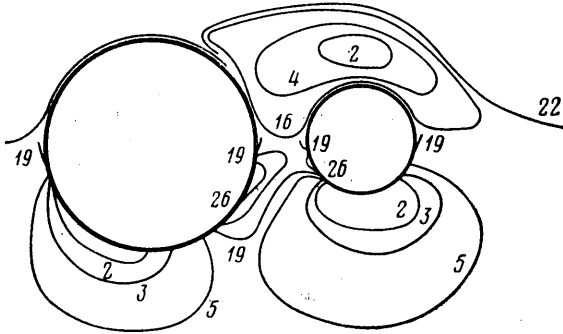
где  $c$  — полюс системы,  $b_1$  — расстояние от начала координат до первой сферы.

В [3] получено представление функции тока  $\psi(\xi, \eta)$ , которое позволило изучить вопрос о сближении обеих частичек до расстояния, равного нулю. Так, изучался вопрос о поведении функции тока в зависимости от расстояния между частицами (в предположении  $R=1$  и малости числа Рейнольдса). Оказалось, что существует критическое расстояние  $b=3,57$ , начиная с которого возникает возвратное течение на лобовой и кормовой точках сфер, причем последующее сближение приводит к удлинению этих зон и их слиянию в одну ( $b=3,13$ ), а при дальнейшем сближении соответственно возникают вторичные потоки. В работах [4, 5] была предпринята попытка учета инерционных членов в диапазоне средних чисел Рейнольдса и обна-

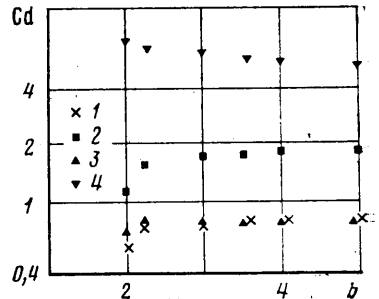
ружено, что, исходя из анализа течения, все расстояния между частицами можно разделить на малые ( $b \leq 5$ ), средние ( $b \approx 8$ ) и большие ( $b > 8$ ).

Предположим, что меньшая по размерам частица находится в следе первой. Одна из картин обтекания в случае, когда  $R=0,5$ ,  $b=2$ ,  $Re=1$ , приведена на фиг. 1, где номера кривых соответствуют значениям, взятым из работы [5]. Верхняя часть картины — линии тока, нижняя — линии постоянного уровня вихря. Анализ картин обтекания показывает, что соотношение радиусов частиц существенно влияет на многие характеристики течения.

При малых  $Re$  в стационарном течении для случая двух одинаковых частиц  $R=1$  образуется вихрь [3, 5]. То же можно отметить и в случае  $R < 1$ , причем здесь вихрь охватывает область второй частицы (фиг. 1) в предположении, конечно, малости расстояния, а с увеличением последнего распадается на два самостоятельных вихря за каждой из частиц, причем этот распад происходит тем ранее (по расстоя-



Фиг. 1



Фиг. 2

нию), чем меньше вторая частица, на которой вихрь как бы «залипает» (например, при  $b=3$  и  $R=1/4$  такое «залипание» происходит при  $Re \approx 15$ ). Однако отмеченный распад обнаруживается при расстояниях  $b \geq 3$ , меньшие расстояния «удерживают» зону вихря между частицами при соотношении между радиусами  $R \geq 1/4$ .

Похожая тенденция обнаруживается и при больших числах Рейнольдса с той лишь разницей, что явление «залипания» происходит с образованием двух зон в кормовой и лобовой точках второй частицы, т. е. увеличение скорости набегающего потока как бы прижимает вихрь, заставляя его распадаться на два. При этом вихрь в лобовой точке второй сферы постепенно теряет свою интенсивность с увеличением расстояния вплоть до полного исчезновения, которое зависит от числа Рейнольдса (такое исчезновение тем ранее по расстоянию, чем больше число  $Re$ ; так, при  $b=4$ ,  $R=1/2$  число  $Re=50$ ).

Следует также отметить, что при малых числах Рейнольдса и малых расстояниях размер вихря в среднем равен характерному, но с увеличением расстояния между частицами размер увеличивается до двух калибров. Однако вихри больших размеров неустойчивы, вследствие чего происходит их распад, что уже отмечалось ранее. При больших числах Рейнольдса ( $Re > 20$ ) и малых расстояниях ( $b \leq 3$ ) вихрь занимает, как правило, всю зону между частицами, а с увеличением расстояния между частицами распадается на вихрь за первой частицей, похожий на вихрь за одиночной сферой, и вихрь на второй частице, который можно обнаружить как за частицей, так и в лобовой точке, где он меньше, чем в кормовой.

Исследования поведения давления показали, что увеличение расстояния при малых числах  $Re \leq 1$  приводит к увеличению давления на обеих сферах. Если под  $\Delta p_i$  понимать разность давлений в лобовой и кормовой точках на  $i$ -й частице, то на меньшей сфере  $\Delta p_2$  уменьшается с увеличением расстояния; то же происходит и на первой частице. Если фиксировать расстояние и число Рейнольдса, считая их средними ( $b \geq 3$ ,  $1 \leq R \leq 20$ ), то уменьшение радиуса второй сферы приводит к тому, что на первой характер поведения давления и  $\Delta p_1$  мало меняется, а для меньшей частицы  $\Delta p_2$  возрастает по абсолютной величине.

Зависимость коэффициента сопротивления от расстояния при фиксированной скорости набегающего потока ( $Re=20$ ) приведена на фиг. 2. Точки 1 и 2 относятся к первой и второй частицам при  $R=1/2$ , точки 3, 4 — к тем же частицам при  $R=1/4$ . Можно заметить, что коэффициент сопротивления второй частицы может увеличиваться ( $R=1/2$ ) или уменьшаться ( $R=1/4$ ) в зависимости от расстояния. Коэффициент сопротивления первой частицы не претерпевает таких изменений и ведет себя монотонно, будучи меньше аналогичной характеристики второй.

Если размеры второй сферы малы (т. е. в среднем  $R < 1/8$ ), то присутствие такой частицы в следе большей практически не влияет на коэффициент сопротивления первой даже на малых расстояниях  $b \leq 3$ . Однако наличие частицы в следе сферы,

движущейся стационарно, в случае, когда  $R > 1/8$ , приводит к увеличению коэффициента сопротивления сферы. По мере того как частицы становятся одинаковыми по размерам (т. е.  $R \rightarrow 1$ ), коэффициент сопротивления обнаруживает тенденцию к уменьшению (при малых расстояниях между ними  $b \leq 3$ ) в достаточно широком диапазоне чисел Рейнольдса ( $1 \leq R \leq 80$ ), что было отмечено в [4, 5] для случая равных сфер.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с.
2. Stimson M., Jeffry G. The motion of two spheres in a viscous fluid.— Proc. Roy. Soc., London, Ser. A, 1926, v. 111, № 757, p. 110–116.
3. Davis A. M., O'Neill M. E., Dorrepaal J. M., Ranger K. B. Separation from the surface of two equal spheres in Stokes flow.— J. Fluid Mech., 1976, v. 77, № 4, p. 625–644.
4. Иванов К. П., Ривкин В. Я. Обтекание двух твердых частиц вязкой несжимаемой жидкостью в осесимметричном потоке. Л., 1980, 41 с. Рукопись деп. в ВИНТИ 7.08.80, № 3503–80 Деп.
5. Иванов К. П., Ривкин В. Я. Стационарное обтекание двух частиц вязкой несжимаемой жидкостью при умеренных числах Рейнольдса.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1982, № 1, с. 167–171.

Ленинград

Поступила в редакцию  
14.II.1984

УДК 532.546

### ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ИНЕРЦИОННЫХ ЧЛЕНОВ В УРАВНЕНИИ ДВИЖЕНИЯ НА ФИЛЬТРАЦИЮ ГАЗА

ГОРДЕЕВ Ю. Н., КОЛОБАШКИН В. М., КУДРЯШОВ Н. А.

При описании движения газа в трещиновато-пористой среде вместо уравнения Эйлера с учетом сил сопротивления используются эмпирические экспериментально установленные законы: линейная и квадратичная зависимости градиента давления газа от скорости [1]. Для большинства решаемых задач фильтрации жидкости и газа такая замена не может вызвать сомнений. Исследованию этого обстоятельства посвящено большое число экспериментальных и теоретических работ.

Однако при описании движения газа через сильно разрушенные среды под действием больших градиентов давлений на первой стадии процесса законы фильтрации не выполняются.

В данной работе рассматриваются задачи о движении газа в пористой среде, причем в качестве уравнения движения используются как уравнение Эйлера с силой трения, так и эмпирические зависимости — линейный закон Дарси и двучленный закон сопротивления. Полученные численные решения сравниваются и устанавливаются характерные времена и характерные длины пористой среды, при которых решения совпадают.

Рассмотрим движение газа через пористую среду, которое описывается следующей системой уравнений [2]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} j = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} j + \frac{\partial}{\partial x} \left( P + \frac{f^2}{\rho} \right) + F = 0, \quad P = c^2 \rho \quad (1)$$

Здесь  $\rho$  — плотность,  $P$  — давление,  $j = \rho u$  — плотность потока газа,  $F$  — сила сопротивления при движении газа в пористой среде,  $c$  — изотермическая скорость звука,  $u$  — скорость движения газа,  $x$  — координата,  $t$  — время.

Сила сопротивления при движении газа  $F$  зависит от скорости  $u$  и при малых числах Рейнольдса  $Re < 1$  ( $Re = u \rho \lambda \mu^{-1}$ ) определяется выражением  $F = \mu \epsilon u k^{-1}$ ; при  $Re > 1$ ,  $F = \mu \epsilon u k^{-1} + \lambda \epsilon^2 k^{-1} \rho u^2$ . Здесь  $k$  — проницаемость пористой среды,  $\mu$  — вязкость газа,  $\lambda$  — характерный размер среды,  $\epsilon$  — пористость.

Вместо второго уравнения в (1), которое является следствием закона сохранения импульса, для описания движения газа в пористой среде используется зависимость

$$\frac{\partial}{\partial x} P + F = 0 \quad (2)$$