

УДК 536.25

## ТЕРМОКАПИЛЛЯРНАЯ ЯЧЕЙКА В СЛОЕ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ, ПОДОГРЕВАЕМОЙ СВЕРХУ

ВЫБОРНОВ С. И., САНОЧКИН Ю. В.

Решена задача о стационарной термокапиллярной конвекции в тонком горизонтальном слое тяжелой жидкости с числом Прандтля  $P \approx 1$ , развивающейся при локальном нагреве ее сверху, для случая больших чисел Марангони. Определена форма свободной поверхности жидкости и изучена структура конвективной ячейки. Рассмотрено влияние кривизны поверхности на картину конвекции.

Термокапиллярное течение жидкости в плоской кювете, противоположные стенки которой поддерживаются при разных температурах, теоретически исследовалось в [1-4], экспериментально - в [4]. Анализ [1, 2, 4] неполный, поскольку уравнение переноса тепла в жидкости не привлекалось и на свободной поверхности задавался градиент температуры. В частности, пренебрежение перепадом температуры поперек слоя жидкости [4] оправдано при малых числах Пекле и Марангони, когда конвективный перенос тепла не играет роли. Иной случай термокапиллярной конвекции реализуется при нагреве жидкости сверху сосредоточенным источником тепла. Движение, возникающее под действием капиллярной силы в горизонтальном слое жидкости, локально нагреваемом сверху, рассмотрено в [5, 6] для чисел Прандтля  $P \approx 1$  и  $P < 1$  соответственно. В этом случае по разные стороны от места нагрева образуются две симметричные термокапиллярные ячейки, в пределах которых локализовано основное возмущение состояния жидкости. Для больших чисел Марангони  $M \gg 1$ , когда преобладает конвективный теплоперенос, удалось определить скорость конвекции и размер ячейки. Распределение температур вдоль верхней и нижней границ слоя оказывается при этом существенно различным. Решение [5, 6] получено в приближенной постановке в предположении постоянной толщины слоя жидкости. В более точной постановке следует учесть, что возвратное течение в нижней части слоя вызывается градиентом давления, обусловленным изменением толщины слоя, так что свободная поверхность жидкости не может быть плоской [7].

Представляет интерес рассмотреть задачу о плоском термокапиллярном движении в горизонтальном слое тяжелой жидкости при локальном нагреве ее сверху в строгой постановке - с учетом деформации свободной поверхности, что позволит не только определить область применимости решения [5, 6], но и выявить влияние силы тяжести и кривизны поверхности на структуру ячейки. Ограничимся рассмотрением задачи в постановке, описанной в [5, 6], для случая  $P \approx 1$ , когда можно опустить конвективные члены в уравнении движения.

Рассмотрим тонкий горизонтальный слой тяжелой жидкости на дне твердой кюветы  $y = -h_0$ , ограниченный сверху свободной поверхностью  $y = \xi(x)$ .

Исходные уравнения стационарной конвекции и граничные условия можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0; \quad v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} T|_{y=-h_0} &= T_w; \quad v_x|_{y=-h_0} = v_y|_{y=-h_0} = 0; \quad \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=\zeta} = 0 \\ \eta \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=\zeta} &= \frac{d\alpha}{dx} = -\alpha' \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{y=\zeta}; \quad P|_{y=\zeta} = 0; \\ v_y|_{y=\zeta} &= \xi' v_x|_{y=\zeta} \end{aligned}$$

где  $\eta$  — вязкость,  $\chi$  — температуропроводность,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\alpha$  — коэффициент поверхностного натяжения, а  $\alpha' = -d\alpha/dT$ .

Рассмотрим случай, когда поток жидкости через поперечное сечение слоя равен нулю

$$\int_{-h_0}^{\zeta} v_x dy = 0 \quad (2)$$

Интегрируя последнее уравнение в (1), находим, что  $p = \rho g(\zeta - y)$ , т. е.  $\partial p/\partial x$  зависит только от  $x$ . Тогда уравнение движения интегрируется

$$v_x = \frac{1}{\eta}(y+h_0) \left[ \frac{d\alpha}{dx} + \frac{\partial p}{\partial x} \left( \frac{y-h_0}{2} - \zeta \right) \right]$$

Подставляя это выражение в (2), можно получить связь между давлением и градиентом температуры на поверхности

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{3}{2} \frac{1}{\zeta+h_0} \frac{d\alpha}{dx} = - \frac{3}{2} \frac{\alpha'}{\zeta+h_0} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{y=\zeta} \quad (3)$$

Интегрируя уравнение непрерывности и используя (3), получим окончательные выражения для  $v_x$  и  $v_y$

$$v_x = - \frac{\alpha'}{\eta} \frac{(y+h_0)(3y+h_0-2\zeta)}{4(h_0+\zeta)} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{y=\zeta}$$

$$v_y = - \frac{\alpha'}{\eta} \frac{(y+h_0)}{4(\zeta+h_0)} \left[ \frac{y+h_0}{\zeta+h_0} \frac{d\zeta}{dx} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{y=\zeta} + (\zeta-y) \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{y=\zeta} \right] \quad (4)$$

Введем безразмерные переменные  $y' = y/h_0$ ,  $x' = x/h_0$ ,  $\zeta' = \zeta/h_0$  (штрихи в дальнейшем опускаем) и  $\theta = (T - T_w)/\Delta T$ , где  $\Delta T = T_0 - T_w$  — перепад температуры поперек слоя в начальном сечении. После подстановки (4) в уравнение переноса тепла задача сводится к решению следующей системы уравнений (вместо одного уравнения (5) при  $\zeta=0$  в [5])

$$(y+1)(2\zeta-3y-1) \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{y=\zeta} \frac{\partial \theta}{\partial x} - (y+1)^2 \left[ (\zeta-y) \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{y=\zeta} + \frac{d\zeta}{dx} \frac{y+1}{\zeta+1} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{y=\zeta} \right] \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{4(1+\zeta)}{M} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (5)$$

$$\frac{d\zeta}{dx} = - \frac{\mu}{2} \frac{1}{1+\zeta} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{y=\zeta},$$

$$\theta|_{y=-1} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=\zeta} = 0, \quad \zeta(0) = 0 \quad (6)$$

$$\mu = \frac{3\alpha'\Delta T}{\rho g h_0^2}, \quad M = \frac{\alpha'\Delta T h_0}{\eta \chi}$$

Найти точное аналитическое решение системы уравнений (5), (6) не удалось. Сложны и численные методы решения, так как  $\zeta(x)$  зависит от значения градиента температуры на самой деформируемой поверхности. Поэтому будем искать приближенное аналитическое решение, принимая параболическую аппроксимацию распределения температуры по  $y$

$$\theta = X(x, \mu)(1+y)(1-y+2\zeta(x, \mu)) = X\Phi(y, \zeta) \quad (7)$$

Выражение (7) удовлетворяет граничным условиям и при  $\mu \rightarrow 0$  совпадает с решением, в котором переменные разделяются [5]. Подставив (7) в (5), из требования ортогональности остатка уравнения к функции

Ф получим обыкновенное дифференциальное уравнение для  $X$ . Эта процедура является аналогом метода Галеркина для случая, когда решение аппроксимируется одной пробной функцией.

Удобно ввести новую искомую функцию  $Z(x) = (1 + \xi(x))^2$ . Тогда уравнение (6) интегрируется:  $X = (1 + \mu - Z) / \mu Z$ , что приводит к следующему уравнению для  $Z(x)$ :

$$Z^{3/2} (1 + \mu - Z) Z'' + Z^{3/2} (1 + \mu - 3Z) Z'^2 + A \mu (1 + \mu - Z) = 0$$

$$A = 10h_0^2 / l_0^2, \quad l_0 = 0,3h_0 \sqrt{M}$$

Требуется определить ограниченное (с ограниченными первой и второй производными) решение (8), удовлетворяющее условию  $Z(0) = 1$ .

Будем искать решение уравнения (8) в виде разложения по  $\mu$ , считая его малым,

$$Z(x) = 1 + \mu Z_1 + \mu^2 Z_2 + \mu^3 Z_3 + \dots \quad (9)$$

$$X(x) = X_0 + \mu X_1 + \mu^2 X_2 + \mu^3 X_3 + \dots \quad (10)$$

Уравнение для  $Z_1$  имеет следующий вид:

$$(1 - Z_1) Z_1'' - 2Z_1' Z_1' + A(1 - Z_1) = 0$$

Его решение, удовлетворяющее граничным условиям, есть

$$Z_1 = 1 - (1 \pm x/l_0)^2$$

Следовательно,

$$X_0 = 1 - Z_1 = (1 \pm x/l_0)^2 \quad (11)$$

Это выражение совпадает с решением [5], что еще раз подтверждает правильность выбранной аппроксимации (7). Согласно (11), величина  $l_0$  имеет смысл характерного линейного размера ячейки, точнее, равна длине ячейки при  $\mu = 0$ .

Для удобства вычисления следующих членов разложений (9), (10) введем новую независимую переменную

$$\xi = \sqrt{X_0} = 1 - x/l_0$$

Используя эту переменную, приведем выражения для  $Z_2$  и  $Z_3$

$$Z_2(\xi) = -\frac{35}{36} \xi + \frac{3}{2} \xi^2 - \frac{19}{36} \xi^4$$

$$Z_3(\xi) = -0,556 \xi^6 + 2,111 \xi^4 - 1,026 \xi^3 - 1,875 \xi^2 + 1,582 \xi - 0,236$$

Окончательный вид разложения (10) с точностью до членов порядка  $\mu^2$  включительно имеет вид

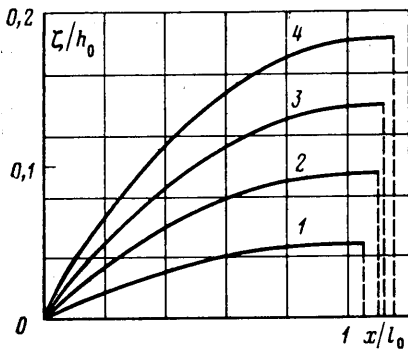
$$X = \xi^2 + \mu \xi \left( \frac{35}{36} - \frac{5}{2} \xi + \frac{55}{36} \xi^2 \right) + \mu^2 \left( 2,58 \xi^6 - 7,64 \xi^4 + 2,97 \xi^3 + 4,38 \xi^2 - 2,53 \xi + 0,25 \left( \frac{35}{36} \right)^2 \right) \quad (12)$$

С точностью до членов порядка  $\mu^3$  формулу (12) можно представить в форме, аналогичной решению [5]

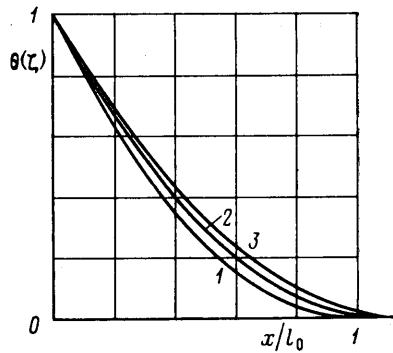
$$X = \left[ \xi + \mu \left( \frac{35}{72} - \frac{5}{4} \xi + \frac{55}{72} \xi^2 \right) + \mu^2 (\xi^5 - 2,87 \xi^3 + 1,12 \xi^2 + 1,41 \xi - 0,66) \right]^2 \quad (13)$$

причем можно показать, что это выражение, конечное при  $\xi = 0$  и разложение которого совпадает с (12), единственно.

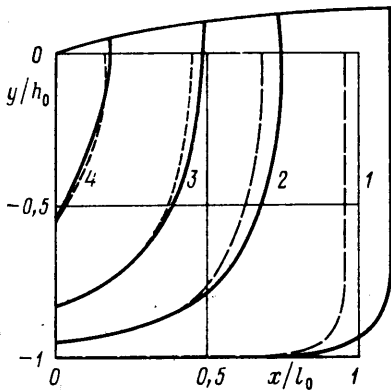
Проанализируем полученное решение. Запись  $X$  в виде (13) позволяет найти корни  $X$  и определить длину конвективной ячейки  $l$ . Согласно (13),



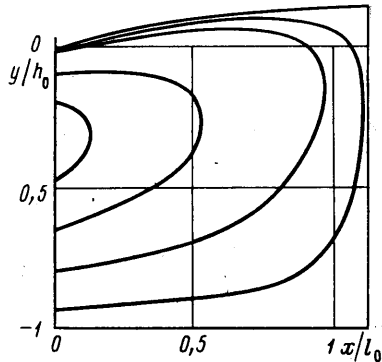
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



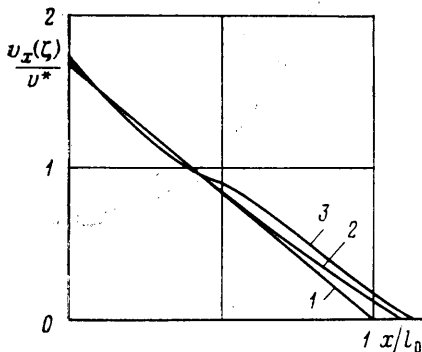
Фиг. 4

значение  $x=l$  есть двукратный корень  $X$ . Из (4) видно, что  $v_x(l, y)=0$ . Таким образом, при  $x=l$  полный поток тепла от источника исчезает. Длина ячейки  $l$  с ростом  $\mu$  увеличивается. Это видно из графиков, приведенных на фиг. 1, где показана форма свободной поверхности для разных  $\mu$  ( $1-\mu=0,1$ ;  $2-0,2$ ;  $3-0,3$ ;  $4-0,4$ ). Качественно рельеф верхней границы жидкости подобен обнаруженному в эксперименте [4]: толщина слоя уменьшается при приближении к месту нагрева. Максимальное отклонение свободной поверхности от плоскости  $y=0$  достигается при  $x=l$  и равно  $(1+\mu)^{1/2}-1$ . Таким образом, перепад уровней жидкости  $\xi(l) \simeq \mu/2$  линейно растет с увеличением  $\Delta T/\rho h_0^2$ , что также совпадает с наблюдениями [4]. Проводить количественное сопоставление вычисленной величины  $\xi$  с измерениями [4] нецелесообразно, поскольку, как упоминалось, это будет сравнением результатов, относящихся к разным режимам конвекции. Например, в [4] градиент температуры на свободной поверхности предполагается (и это нуждается в обосновании) постоянным, как на дне кюветы. В рассматриваемом случае нижняя граница слоя изотермична, а вдоль верхней температура спадает примерно по параболе.

Распределение температуры на свободной поверхности  $\theta(x/l_0, \xi) = X(1+\xi)^2$  показано для разных  $\mu$  на фиг. 2 ( $1-\mu=0$ ;  $2-0,2$ ;  $3-0,4$ ). Изотермы приведены на фиг. 3 сплошными линиями для  $\mu=0,3$  ( $1-\theta=0,001$ ;  $2-0,1$ ;  $3-0,3$ ;  $4-0,7$ ). Для сравнения пунктиром показаны изотермы при  $\mu=0$ . Интересной характеристикой конвекции является распределение плотности потока тепла в дно кюветы. Оно дается формулой

$$q = \frac{2\kappa\Delta T}{h_0}(1+\xi)X$$

где  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности. Видно, что  $q$  спадает вдоль нижней границы слоя приблизительно по параболическому закону. Характер



Фиг. 5

движения жидкости в ячейке демонстрируют линии тока на фиг. 4 для  $\mu=0,3$ . Обращает на себя внимание, что профили линий тока в тонком приповерхностном слое являются более наполненными, чем при  $\mu=0$ , и траектории частиц жидкости идут вдоль поверхности почти на всю длину ячейки. Условие конвективного переноса тепла улучшается, что и приводит, видимо, к увеличению длины ячейки. В рассматриваемом случае  $P \geq 1$  картина течения не зависит от  $P$ . Наконец, на фиг. 5 показаны распределения скорости конвекции на поверхности для разных  $\mu$  ( $1 - \mu=0$ ;  $2 - 0,2$ ;  $3 - 0,4$ ). С ростом  $\mu$  скорость наиболее заметно изменяется (увеличивается) на периферии ячейки, что коррелирует с характером изменения ее длины. В качестве характерного масштаба скорости в (4) входит величина

$$v^* = (\alpha' \Delta T \chi / h_0 \eta)^{1/2}$$

представляющая максимальную скорость течения на поверхности вблизи места нагрева [5]. В целом, как видно из графиков, при малых  $\mu$  отклонения в распределениях по  $x$  температуры от параболического и скорости от линейного законов относительно невелики, хотя деформация свободной поверхности и картина конвекции изменяются заметно. Таким образом, использование приближения постоянной толщины слоя жидкости, по-видимому, допустимо, если  $\mu < 1$ .

В заключение отметим следующее обстоятельство. Полученное решение при  $l < x < 2l$  описывает смежную термокапиллярную ячейку с противоположными по знаку градиентом температуры, скорости  $v_x$  и  $\zeta'$ . Если при  $x \geq 2l$  имеется второй такой же источник нагрева, то решение будет описывать движение жидкости между ними. Если второго источника нет, то вопрос о характере движения жидкости при  $x > l$  остается открытым, поскольку в области длиной  $\Delta x \sim 2h_0$  на границе между указанными смежными ячейками уравнения пограничного слоя неприменимы. В частности, остается открытым вопрос о возможности образования уединенной термокапиллярной ячейки вблизи теплового контакта на поверхности жидкости.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. § 68, 699 с.
2. Levich V. G., Krylov V. S. Surface-tension-driven phenomena.— Ann. Rev. Fluid Mech. V. 1. Palo alto, Calif., 1969, p. 302–303.
3. Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д. Гидромеханика невесомости. М.: Наука, 1976, с. 477.
4. Пшеничников А. Ф., Токменина Г. А. Деформация свободной поверхности жидкости термокапиллярным движением.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1983, № 3, с. 150–153.
5. Саночкин Ю. В. Термокапиллярная конвекция в тонком слое жидкости, локально нагреваемом сверху.— ПМТФ, 1983, № 6, с. 134.
6. Саночкин Ю. В. Установившееся термокапиллярное движение в горизонтальном слое жидкого металла, локально нагреваемом сверху.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1984.
7. Chia Shun Yih. Fluid motion induced by surface-tension variation.— Phys. Fluids, 1968, v. 11, № 3, p. 477–480.

Москва

Поступила в редакцию  
9.III.1983