

УДК 533.6.071

ИССЛЕДОВАНИЕ ИНДУКЦИИ ДОЗВУКОВЫХ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ТРУБ С ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ РАБОЧЕЙ ЧАСТЬЮ

СТАРИКОВ О. Ю.

Для случая малых возмущений скорости на границе потока и произвольной, постоянной по длине степени проницаемости стенки аэродинамической трубы решена осесимметричная краевая задача о дозвуковом обтекании тонкого тела вращения в перфорированных границах. Краевое условие связывает касательную и нормальную к стенке компоненты возмущенной скорости и имеет общий вид для всей границы. Из полученного решения найдена оптимальная проницаемость стенки, при которой искажение коэффициента давления на поверхности модели минимально по сравнению с безграничным обтеканием.

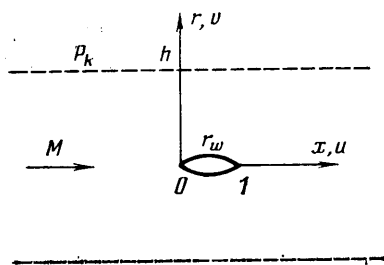
Вопросы индукции стенок рабочей части аэродинамической трубы, постановки краевого условия и определения поправок к аэродинамическим характеристикам модели рассмотрены в ряде работ [1-5]. В последнее время разрабатывается перспективный метод уменьшения влияния стенок непосредственно в процессе эксперимента путем регулирования параметров газа вблизи границы таким образом, чтобы они соответствовали параметрам при обтекании этого же тела неограниченным потоком [3, 5]. Однако конструктивные особенности многих действующих труб не позволяют применять этот метод. Снизить индукцию таких труб можно только выбором оптимальной проницаемости стенок. В статьях [6-8] исследуется влияние перфорированных границ на течение около профиля, причем в [7] коэффициент проницаемости считается малым.

1. Рассмотрим влияние перфорированной стенки осесимметричной рабочей части с постоянной по длине проницаемостью на обтекание тонкого тела вращения невязким сжимаемым газом с числом Маха $M < 1$. Длину модели примем за единицу длины (фиг. 1). Обозначим: h — радиус рабочей части, $r_w = \varepsilon f(x)$ — образующая тела, u и v — компоненты возмущенной скорости вдоль осей x и r соответственно, отнесенные к скорости набегающего потока U_0 , ρ — возмущенная плотность, отнесенная к плотности набегающего потока ρ_0 , p — возмущенное давление, отнесенное к $\rho_0 U_0^2$, $\beta = \sqrt{1 - M^2}$.

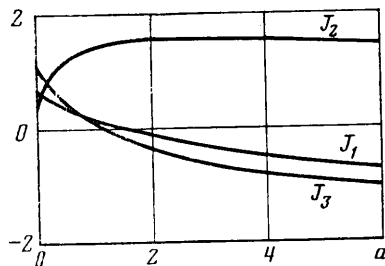
Компоненты возмущенной скорости, представляющей собой решение линеаризованной задачи, должны удовлетворять уравнениям (1.1) и затухать на бесконечности. Условие непротекания через поверхность тела и традиционное соотношение между касательной и нормальной к стенке компонентами возмущенной скорости образуют систему краевых условий (1.2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial p}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} rv &= r_w r_w' \quad (r=0), & u + \frac{1}{R} v &= 0 \quad (r=h) \\ u, v &\rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \pm \infty) \end{aligned} \quad (1.2)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

С внешней стороны рабочая часть окружена камерой постоянного давления P_k . На параметр проницаемости стенки R ограничения не накладываются: $R=0$ соответствует случаю твердой стенки, при $0 < R < \infty$ давление газа P на границе не равно P_k и газ перетекает через перфорацию; при $R=\infty$ движущийся газ граничит с покоящимся газом постоянного давления («свободная поверхность») и $P=P_k=\text{const}$.

Из системы (1.1) получаем уравнения для компонент возмущенной скорости и возмущенного давления

$$\beta^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} = 0$$

$$u = \int \frac{\partial v}{\partial x} dr, \quad p = - \int \frac{\partial v}{\partial x} dx \quad (1.3)$$

В (1.3) учтен тот факт, что движение безвихревое.

2. Найдем решение задачи (1.3) с крайевыми условиями (1.2). Затухание возмущений скорости на бесконечности позволяет воспользоваться методом преобразований Фурье. Пусть

$$[\varphi(x, r)] = \varphi^\circ(q, r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, r) e^{-iqx} dx$$

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] = -iq \varphi^\circ$$

Система уравнений (1.3) и граничные условия (1.2) после преобразования имеют вид

$$v_{rr}^\circ + \frac{1}{r} v_r^\circ - \left(\frac{1}{r^2} + q^2 \beta^2 \right) v^\circ = 0$$

$$u^\circ = iq \int v^\circ dr, \quad p^\circ = -u^\circ \quad (2.1)$$

$$rv^\circ = F(q) = \frac{e^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(\xi) f(\xi) e^{-iq\xi} d\xi, \quad r=0$$

$$u^\circ + \frac{1}{R} v^\circ = 0, \quad r=h \quad (2.2)$$

Решением системы (2.1) являются функции

$$v^\circ = A(q) I_1(\beta|q|r) + B(q) K_1(\beta|q|r)$$

$$u^\circ = \frac{i \operatorname{sign} q}{\beta} [A(q) I_0(\beta|q|r) - B(q) K_0(\beta|q|r)] \quad (2.3)$$

где $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ — модифицированные функции Бесселя. Подставив выражения (2.3) в граничные условия (2.2), определим значения коэффициентов

$$B(q) = \beta |q| F(q) \quad (2.4)$$

$$A(q) = B(q) \frac{K_{01} + b K_{11}}{I_{01} - b I_{11}} = B(q) G(q)$$

$$I_{\nu 1} = I_\nu(\beta |q| h), \quad K_{\nu 1} = K_\nu(\beta |q| h), \quad b = \frac{i \beta \operatorname{sign} q}{R}$$

В безграничном потоке $v_f^\circ = B(q) K_1(\beta |q| r)$, следовательно, индукция стенок составляет

$$\begin{aligned} \Delta v^\circ &= v^\circ - v_f^\circ = A(q) I_1(\beta |q| r) \\ \Delta u^\circ &= \frac{i \operatorname{sign} q}{\beta} A(q) I_0(\beta |q| r) \\ \Delta C_p^\circ &= -2 \Delta u^\circ|_{r=0} = -2 i q F(q) G(q) \end{aligned}$$

Проведя обратное фурье-преобразование, найдем поправку к коэффициенту давления на оси

$$\begin{aligned} \Delta C_p &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta C_p^\circ e^{iqx} dq = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} 2 i q F(q) G(q) e^{iqx} dq = \\ &= -\frac{i \varepsilon^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} y G(q) \int_0^1 f'(\xi) f(\xi) [\cos q(\xi - x) - i \sin q(\xi - x)] d\xi dq \quad (2.5) \end{aligned}$$

Для упрощения соотношения (2.5) функцию $G(q)$ из (2.4) преобразуем к виду суммы двух функций, из которых одна симметричная, а другая — антисимметричная

$$G(q) = \frac{K_{01} I_{01} - a K_{11} I_{11}}{I_{01}^2 + a I_{11}^2} + \frac{i}{R q h} \frac{1}{I_{01}^2 + a I_{11}^2} \quad \left(a = \frac{\beta^2}{R^2} \right) \quad (2.6)$$

Подставив выражение (2.6) в уравнение (2.5) и проинтегрировав по частям, получим

$$\begin{aligned} \Delta C_p &= \frac{\varepsilon^2}{\pi} \int_0^\infty \left[q^2 \frac{K_{01} I_{01} - a K_{11} I_{11}}{I_{01}^2 + a I_{11}^2} \int_0^1 f^2(\xi) \cos q(\xi - x) d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \frac{q}{\beta h} \frac{\sqrt{a}}{I_{01}^2 + a I_{11}^2} \int_0^1 f^2(\xi) \sin q(\xi - x) d\xi \right] dq \quad (2.7) \end{aligned}$$

В уравнении (2.7) подынтегральные функции $I_{\nu 1}$ и $K_{\nu 1}$ зависят от произведения $\beta q h$ и убывают экспоненциально при $\beta q h \geq 3$. Следовательно, при $\beta h > 3$ основной вклад в определенные интегралы дает область малых q . Поэтому, ограничившись в разложении следующими членами, можно записать

$$\cos q(\xi - x) \approx 1 - \frac{q^2}{2} (\xi - x)^2, \quad \sin q(\xi - x) \approx q(\xi - x) \quad (2.8)$$

$$\Delta C_p = \frac{\varepsilon^2}{\pi} \left\{ \frac{J_1(a)}{(\beta h)^3} \int_0^1 f^2(\xi) d\xi + \frac{J_2(a)}{(\beta h)^4} \int_0^1 (\xi - x) f^2(\xi) d\xi - \frac{J_3(a)}{\beta(h)^5} \int_0^1 (\xi - x)^2 f^2(\xi) d\xi \right\}$$

$$J_1(a) = \int_0^{\infty} t^2 \frac{K_0(t)I_0(t) - aK_1(t)I_1(t)}{I_0^2(t) + aI_1^2(t)} dt$$

$$J_2(a) = \int_0^{\infty} t^2 \frac{\sqrt{a}}{I_0^2(t) + aI_1^2(t)} dt$$

$$J_3(a) = \int_0^{\infty} \frac{t^4}{2} \frac{K_0(t)I_0(t) - aK_1(t)I_1(t)}{I_0^2(t) + aI_1^2(t)} dt$$

Значения интегралов в зависимости от параметра a показаны на фиг. 2. Обратить ΔC_p в нуль одновременно на всей оси невозможно ни при каком значении параметра R . Аналогичный результат для плоского течения получен в [4]. Поскольку предполагалось, что $\beta h > 3$, и при $0 \leq x \leq 1$ справедливы неравенства

$$\left| \int_0^1 (\xi - x)^2 f^2(\xi) d\xi \right| \leq \left| \int_0^1 (\xi - x) f^2(\xi) d\xi \right| \leq \left| \int_0^1 f^2(\xi) d\xi \right|$$

то вкладом последнего слагаемого в (2.8) можно пренебречь. Если выбрать в качестве a_{opt} корень уравнения $J_1(a) = 0$, то первое слагаемое исчезает и

$$\Delta C_p = 0,46 \frac{\varepsilon^2}{(\beta h)^4} \int_0^1 (\xi - x) f^2(\xi) d\xi, \quad \left(\frac{\beta}{R} \right)_{\text{opt}} = 1,21$$

Найденная поправка к коэффициенту давления имеет линейную зависимость от координаты x и $\Delta C_p = 0$ в точке тела с координатой

$$x_* = \int_0^1 \xi f^2(\xi) d\xi / \int_0^1 f^2(\xi) d\xi$$

В случае твердой стенки ($a = \infty$, $R = 0$) и в случае свободной поверхности на границе течения ($a = 0$, $R = \infty$) второе слагаемое в уравнении (2.8) обращается в нуль. При этом на всей оси

$$\Delta C_p|_{a=0} = 0,21 \frac{\varepsilon^2}{(\beta h)^3} \int_0^1 f^2(\xi) d\xi$$

$$\Delta C_p|_{a=\infty} = -0,76 \frac{\varepsilon^2}{(\beta h)^3} \int_0^1 f^2(\xi) d\xi$$

Очевидно, что $|\Delta C_p|(a = a_{\text{opt}}) < |\Delta C_p|(a = 0, a = \infty)$.

Таким образом, найденное соотношение $\beta/R = 1,21$ задает такую проницаемость стенки R_{opt} в зависимости от числа M потока, которая устраняет индукцию в одной точке модели и минимизирует поправку $|\Delta C_p|$ к коэффициенту давления на поверхности тела. Если установить R , отличное от R_{opt} , точка x_* , в которой отсутствует индукция, сместится от найденного значения за счет появления первого слагаемого в (2.8). Границы интервала $R_1 < R < R_2$, когда точка x_* находится на теле, при заданных

β и h , удовлетворяющих неравенству $\beta h > 3$, определяются из уравнений

$$J_1\left(\frac{\beta^2}{R_1^2}\right)\int_0^1 f^2(\xi) d\xi + \frac{1}{\beta h} J_2\left(\frac{\beta^2}{R_1^2}\right)\int_0^1 \xi f^2(\xi) d\xi = 0$$

$$J_1\left(\frac{\beta^2}{R_2^2}\right)\int_0^1 f^2(\xi) d\xi - \frac{1}{\beta h} J_2\left(\frac{\beta^2}{R_2^2}\right)\int_0^1 (1-\xi) f^2(\xi) d\xi = 0$$

В качестве примера найдем распределение ΔC_p вдоль оси тела вращения $r_w = 0,5\sqrt{x(1-x)}$. Для этой модели $x_* = 0,4$. Распределение ΔC_p по поверхности тела выражается соотношением $\Delta C_p = (0,38 - 0,96x) 10^{-2} / (\beta h)^4$. Максимальное искажение давления достигается в хвостовой части $|\Delta C_p|_{\max} = 5,8 \cdot 10^{-3} (\beta h)^{-4}$.

При числе $M = 0,6$ оптимальная проницаемость $R_{opt} = 0,66$. Если выбрать радиус рабочей части $h = 5$, то в интервале от $R_1 = 0,56 (x_* = 0)$ до $R_2 = 0,77 (x_* = 1)$ точка, в которой $\Delta C_p = 0$, будет также располагаться на теле. Поэтому любая проницаемость $0,56 < R < 0,77$ может считаться удовлетворительной для проведения аэродинамических испытаний данной модели в рабочей части с $h = 5$ при $M = 0,6$.

Автор благодарен В. М. Нейланд за постоянное внимание к работе и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гродзовский Г. Л., Никольский А. А., Свищев Г. П., Таганов Г. И. Сверхзвуковые течения газа в перфорированных границах. М.: Машиностроение, 1967. 144 с.
2. Лифшиц Ю. Б., Фонарев А. С. О влиянии границ потока на параметры трансзвуковых течений около тел вращения. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 3, с. 68–75.
3. Влияние стенок в трансзвуковых трубах и пути его уменьшения. — Тр. ЦАГИ, 1980, вып. 2028. 118 с.
4. Pindzola M., Lo C. F. Boundary interference at subsonic speed in wind tunnels with ventilated walls. — Arnold Engineering Develop. Center T. R., 1969, № 47.
5. Lo C.-F., Oliver R. H. Subsonic lift interference in a wind tunnel with perforated walls. — J. Aircraft, 1970, v. 7, № 3, p. 281–283.
6. Kacprzyński J. J. Transonic flowfield past airfoils between porous wind tunnel walls. — with nonlinear characteristics. AIAA Pap., 1975, № 75–81.
7. Маревцева Н. А. Об индукции дозвуковых аэродинамических труб с малой перфорацией. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 6, с. 130–136.
8. Маревцева Н. А. Обтекание тонкого профиля в канале с проницаемыми стенками. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 2, с. 111–117.

Москва

Поступила в редакцию
19.XII.1983