МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 · 1985

УДК 533.6.011

КОНИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТЯХ ИЗЛОМОВ КРОМОК ПОВЕРХНОСТЕЙ, РАЗДЕЛЯЮЩИХ СПУТНЫЕ СВЕРХЗВУКОВЫЕ ПОТОКИ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

КРАЙКО А. Н., МАКАРОВ В. Е.

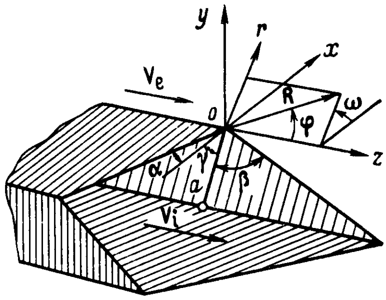
Исследуются конические течения, которые возникают при обтекании идеальным (невязким и нетеплопроводным) газом «концевых» кромок поверхностей с изломами, разделяющих «внешний» и «внутренний» потоки с векторами скорости, параллельными линии пересечения поверхностей. Такие течения реализуются, в частности, в окрестностях изломов выходной кромки сопла прямоугольного поперечного сечения с «прямым» или «косым» срезом на режимах нерасчетного истечения сверхзвуковой струи в спутный сверхзвуковой поток. С помощью линейного анализа строятся картины течения, отвечающие различным режимам взаимодействия потоков и геометрическим характеристикам кромки, и формулируется закон подобия. Справедливость полученных таким путем результатов подтверждают примеры численного решения полной нелинейной системы уравнений Эйлера. При этом в рамках подхода [1], как правило, наряду со скачками и характеристическими поверхностями, ограничивающими рассматриваемое коническое течение, строится тангенциальный разрыв, разделяющий внешний и внутренний потоки.

1. Пусть вне и внутри конфигурации, изображенной на фиг. 1, текут равномерные сверхзвуковые потоки, параллельные ее стенкам. Ограничимся случаями, когда перепад давлений $n=p_i/p_e$ (индексы e и i приписываются далее невозмущенным параметрам внешнего и внутреннего потоков) таков, что ударные волны, возникающие в одном из них, присоединены к кромкам. Если в дополнение к этому по отношению к обоим потокам концевые кромки разделяющих поверхностей сверхзвуковые, то при их обтекании реализуются двумерные автомодельные течения с косыми скачками, тангенциальными разрывами и обобщенными центрированными волнами, в которых отлична от нуля (хотя и постоянна) компонента вектора скорости, параллельная данной кромке. Указанные течения, скачки, разрывы и волны будем называть «кромочными».

Взаимодействие кромочных потоков ведет к возникновению в окрестности каждого излома кромки конических течений, изучаемых ниже. Области кромочных и конических течений отделены друг от друга, как и от невозмущенных равномерных потоков, характеристическими поверхностями (в конических переменных — характеристиками и линиями параболичности) и ударными волнами. Внутри каждой конической области есть тангенциальный разрыв, называемый далее «основным», который, соединяя кромочные тангенциальные разрывы, разделяет внешний и внутренний потоки. При нерегулярном пересечении кромочных скачков в результате их взаимодействия образуется диск Маха и возникают дополнительные тангенциальные разрывы. Последние соединяют тройные точки (в пространстве — линии) с основным тангенциальным разрывом.

Рассматривая коническое течение в окрестности данного излома, введем прямоугольные координаты xyz с осью z, направленной по ребру в сторону потока, и с плоскостью xz, совпадающей с плоскостью одной из стенок (фиг. 1, oa — сечение другой стенки плоскостью xy). Соответствующим образом обезразмеренные параметры конического течения — функции конических переменных [2]: $\xi=x/z$ и $\eta=y/z$, безразмерных комбинаций, составленных из параметров невозмущенных потоков (для совершенных газов это будут: n, показатели адиабаты $\varkappa_e$ и $\varkappa_i$, числа Маха M_e и M_i, отношения плотностей ρ_i/ρ_e или скоростей V_i/V_e, а также газовых постоянных R_i/R_e; от R_i/R_e зависят только поля температур), и углов α, β и γ, введенных согласно фиг. 1. Для конфигурации с прямоугольным поперечным сечением и с «прямым» срезом $\alpha=\beta=0$, а $\gamma=\pi/2$. По аналогии с треугольными и V-образными крыльями углы α и β естественно называть углами стреловидности. На фиг. 1 углы α и β положительны. В принципе углы стреловидности могут меняться от $-\pi/2$ до $\pi/2$.

В описанной выше упрощенной постановке, когда набегающие потоки равномерны и параллельны, разделяющие стенки бесконечно тонкие, а сверхзвуковые кромки прямолинейны, исследуемые конические течения из-за взаимодействий друг с другом разрушаются на конечном расстоянии от их «центров коничности». Нарушение любого из перечисленных условий, в том числе, непараллельность и неравномерность набегающих потоков, уменьшает протяженность областей коничности, как, впрочем, и автомодельных кромочных течений, до нуля. Несмотря на это в непосредственной окрестности кромок и их изломов течения данного типа, характеризуемые конечными изменениями параметров в переменных $\xi\eta$, реализуются в самом общем случае, обосновывая целесообразность упрощенной постановки. Сказанное справедливо и для дозвуковых кромок, если $\alpha<0$, а $\beta>0$. По этой причине анализ конических течений с дозвуковыми кромками ограничим только такими случаями.



Фиг. 1

Наряду с декартовыми координатами и переменными $\xi\eta$ рассмотрим сферические координаты $R\varphi\omega$, введенные согласно фиг. 1. Связь ξ и η с φ и ω дается формулами $\xi=\operatorname{tg}\varphi\cos\omega$, $\eta=\operatorname{tg}\varphi\sin\omega$. Если v_R, v_φ и v_ω — соответствующие проекции вектора скорости $\mathbf{V}$; $q=\sqrt{v_\varphi^2+v_\omega^2}$ — модуль компоненты $\mathbf{q}$ вектора $\mathbf{V}$, которая нормальна радиус-вектору R; $\vartheta=\operatorname{arctg}(v_\varphi/v_\omega)$; ρ — плотность; a — скорость звука; $M_q=q/a$ — «коническое» число Маха; i и s — удельные энтальпия и энтропия (или «энтропийная функция» — некоторая функция только удельной энтропии), а $I=i+V^2/2$ — полная энтальпия, то в силу независимости параметров от R уравнения конического течения можно записать в форме

$$\frac{M_q^2-1}{\rho q^2}\frac{\partial p}{\partial\tau}+\frac{\partial\vartheta}{\partial\nu}=-v_R-v_\varphi\operatorname{ctg}\varphi,\qquad \frac{1}{\rho q^2}\frac{\partial p}{\partial\nu}+\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}=v_\omega\operatorname{ctg}\varphi,$$

$$\frac{\partial v_R}{\partial\tau}=q^2,\qquad \frac{\partial I}{\partial\tau}=0,\qquad \frac{\partial s}{\partial\tau}=0 \tag{1.1}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau}=v_\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{v_\omega}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\omega},\qquad \frac{\partial}{\partial\nu}=v_\omega\frac{\partial}{\partial\varphi}-\frac{v_\varphi}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\omega}\right)$$

$$v_\varphi=q\sin\vartheta,\quad v_\omega=q\cos\vartheta$$

где $\partial/\partial\tau$ и $\partial/\partial\nu$ — операторы дифференцирования вдоль конических линий тока и по нормалям к ним. Главное отличие системы (1.1) от аналогичной системы, полученной в [3], состоит в записи четвертого уравнения, которое здесь дано в форме постоянства I на линии тока. Кроме того, (1.1) справедлива не только для совершенного газа с постоянным показателем адиабаты $\varkappa$, как в [3], но и для произвольного «двухпараметрического» газа с уравнениями состояния $\rho=\rho(p, s)$ и $i=i(p, s)$. Три последних уравнения системы (1.1) не содержат производных по нормали к линиям тока, которые в силу этого являются трижды вырожденными характеристиками (c^0-характеристиками). Согласно (1.1), вдоль них

$$d\nu=0,\quad d\tau=d\varphi/v_\varphi,\quad d\varphi=\operatorname{tg}\vartheta\sin\varphi d\omega,\quad dv_R=(q^2\sin\varphi/v_\omega)d\omega=(q^2/v_\varphi)d\varphi,$$
$$dI=ds=0.$$

На сфере $R=\text{const}$ линии тока касаются вектора $\mathbf{q}$.

Подсистема первого и второго уравнений (1.1) эллиптична при $M_q<1$ и гиперболична при $M_q>1$. Во втором случае вдоль характеристик выполняются соотношения

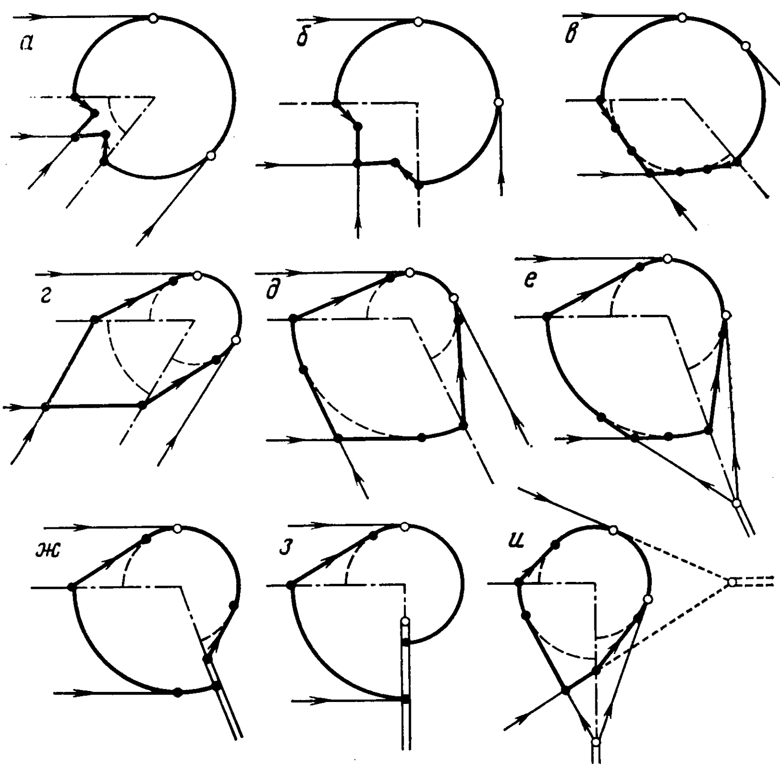
$$d\nu=\pm\operatorname{tg}\mu\, d\tau,\qquad d\tau=\frac{\cos\vartheta\cos\mu}{v_\omega\sin(\vartheta\pm\mu)}d\varphi,\qquad d\omega=\frac{\operatorname{ctg}(\vartheta\pm\mu)}{\sin\varphi}d\varphi$$
$$d\vartheta\pm\frac{\operatorname{ctg}\mu}{\rho q^2}dp\pm\left[\frac{v_R\sin\mu\cos\vartheta}{v_\omega\sin(\vartheta\pm\mu)}-\operatorname{ctg}\varphi\operatorname{ctg}(\vartheta\pm\mu)\right]d\varphi=0 \tag{1.2}$$

где $\mu=\arcsin(1/M_q)$ — угол Маха конического течения, верхний (нижний) знак отвечает $c^+(c^-)$-характеристикам. На сфере $R=\text{const}$ они образуют с $\mathbf{q}$, т. е. с коническими линиями тока, углы $\pm\mu$. Соотношения (1.2) обобщают соответствующие равенства из [3] на газ с произвольной термодинамикой. Уравнения для p и ϑ из (1.1) и условия совместности из (1.2) отличаются от аналогичных уравнений двумерных (плоских и осесимметричных) течений лишь свободными членами. Поэтому, как и в двумерном случае [4], введем направления $c^\pm$-характеристик, которые показывают, куда из данной точки распространяются слабые возмущения p и ϑ. В силу (1.1) и (1.2) они совпадают с направлением проекции $\mathbf{q}$ на данную характеристику. Возмущения s, I и v_R распространяются по линиям тока (c^0-характеристикам) в сторону $\mathbf{q}$.

2. Пусть перепад $n=p_i/p_e\approx1$, а в общем случае неравномерных и непараллельных набегающих потоков в дополнение к этому малы углы, образуемые вектором $\mathbf{V}$ с осью z. Тогда определение структуры течения и, в частности, очертания области конического потока в плоскости $\xi\eta$ можно провести в рамках линейного приближения. Полученные таким путем результаты, представляя самостоятельный интерес, учитываются также при конструировании разностных сеток для численного решения нелинейной задачи. В линейном приближении проекции поверхностей тока на плоскость $\xi\eta$ — лучи, идущие в начало координат; областям эллиптичности двух первых уравнений (1.1) для внешнего и внутреннего потоков отвечают $\varphi<m_e$ и $\varphi<m_i$, а областям гиперболичности — $\varphi>m_e$ и $\varphi>m_i$, где $m=\arcsin(1/M)$, или в плоскости $\xi\eta$ — внутренность и внешность «звуковых» окружностей (линий параболичности) радиусов $\operatorname{tg} m_e$ и $\operatorname{tg} m_i$. Напомним, что M, а за ним и m в отличие от M_q и μ определяются по полной скорости $\mathbf{V}$, а не по $\mathbf{q}$.

В областях гиперболичности $c^\pm$-характеристиками линеаризованной системы (1.1) являются прямые, касающиеся своих звуковых окружностей [2]. В точках касания происходит изменение направлений указанных характеристик. На плоскости $\xi\eta$ с c^+- и c^--характеристиками совпадают и следы двумерных характеристических плоскостей, опирающихся на сверхзвуковые кромки. Далее эти характеристики будем называть кромочными. Две пересекающиеся в начале координат c^0-характеристики — следы на плоскости $\xi\eta$ основных тангенциальных разрывов (последние в линейном приближении совпадают с плоскостями кромок) — будем называть разрывными.

Сказанное выше и прежде всего соображения о направлении характеристик позволяют для разных случаев строить границы конического течения в плоскости $\xi\eta$. Примеры таких построений даны на фиг. 2, где указанные границы, образованные отрезками звуковых окружностей и $c^{\pm}$-характеристик, изображены жирными линиями, кромочные характеристики — тонкими прямыми, участки звуковых окружностей, отличные от границ,— штрихами, а разрывные c^0-характеристики, пересекающиеся в точке $\xi=\eta=0$,— штрихпунктиром. Кроме того, на фиг. 2, *е—и*, отвечающих положительным β, двойными линиями нанесены следы разделительных стенок, а на фиг. 2, *и*, соответствующей $\alpha>0$, пунктиром — сечение



Фиг. 2

плоскостью z=const мысленного продолжения верхней стенки в область $x>0$ и примыкающих к ней кромочных $c^{\pm}$-характеристик. Последние приведены, чтобы пояснить способ построения сплошных участков тех же характеристик для сверхзвуковых кромок при положительных α и отрицательных β.

Стрелки на $c^{\pm}$-характеристиках (в том числе на отрезках, образующих границу) показывают их направление. В местах касания со звуковыми окружностями направления характеристик меняются на противоположные. Во всех примерах темные точки — концы отрезков прямолинейных $c^{\pm}$-характеристик или звуковых окружностей, составляющих границу конической области, а светлые точки дают кромку разделительной стенки (для $\beta>0$, как на фиг. 2, *ж—и*) и места касания кромочных характеристик и звуковых окружностей. Фигуры 2, *а—в* отвечают $M_i>M_e$, остальные — $M_i<M_e$. Угол γ между разделительными стенками (в данном приближении между штрихпунктирными прямыми — разрывными c^0-характеристиками) на фиг. 2, *з* и 2, *и* прямой. На фиг. 2, *а* и *г* $\gamma<\pi/2$, в прочих случаях $\gamma>\pi/2$. Угол $\beta\neq0$ в четырех последних примерах, причем на фиг. 2, *з* $\pi/2-\beta<m_{e,i}$, т. е. кромка — дозвуковая по отношению к обоим потокам,

на фиг. 2, *е* и 2, *и* $\pi/2-\beta>m_{e,i}$ и кромка сверхзвуковая в обоих потоках, а на фиг. 2, *ж* ($m_e<\pi/2-\beta<m_i$) кромка дозвуковая для внутреннего потока и сверхзвуковая для внешнего.

Границы, построенные на фиг. 2, дают конфигурации областей, параметры в которых в нелинейном приближении в общем случае зависят от обеих переменных ξ и η, а не от некоторой их комбинации, как в кромочной волне разрежения. Исключение представляет конечная окрестность точки регулярного пересечения внутренних кромочных скачков, когда к отраженным скачкам примыкают поступательные потоки. Возможно дальнейшее разбиение построенных областей за счет выделения «наружных» подобластей конически сверхзвукового потока. На фиг. 2, *а* – *в*, *д* и *е* они примыкают к точке пересечения внутренних кромочных характеристик (или скачков), а на фиг. 2, *г* и *и* имеют более сложную форму. Поток в наружных подобластях хотя, как правило, и является двумерным, но не зависит от решения сложной эллиптико-гиперболической краевой задачи в оставшейся части конической области (последнюю по этой причине можно назвать основной). Наружные конические потоки в принципе могут рассчитываться заранее, например, методом «конических» характеристик, а затем в рамках подхода, развитого в [1], использоваться при расчете основного конического течения. Ниже, однако, этого не делалось и счет всей конической области велся с помощью однородного алгоритма установлением по координате z.

Наряду с построением областей конического и основного конического потоков линейный анализ позволяет получить закон подобия исследуемых течений. При его выводе прежде всего учтем, что в силу последнего уравнения (1.1) и условий на стационарных скачках полная энтальпия I постоянна во внешней и внутренней подобластях (по разные стороны от основного тангенциального разрыва, а в линейном приближении — от штрихпунктирной ломаной). Если же Δp (приращение p) на скачках мало́, то аналогичное утверждение с точностью до $O\{(\Delta p)^2\}$ включительно справедливо и для энтропии. Это позволяет считать ρ функцией p (при постоянной s_e или s_i) и еще до линеаризации избавиться от коэффициента $1/\rho$ перед производными, что снижает погрешности линейного приближения, так как при сверхзвуковых скоростях изменение упомянутого коэффициента вносит наиболее серьезный вклад в ошибки линеаризации [5].

Перепишем три первых уравнения (1.1) в переменных $\xi\eta$ и заменим v_R, v_φ и v_ω проекциями u, v и w вектора скорости на оси цилиндрической системы координат $zr\omega$ (фиг. 1). Выполнив с использованием интеграла энергии линеаризацию полученных уравнений, придем к системе

$$
\begin{gathered}
(\sigma_{e,i}^2\chi^2-1)\left(\frac{\xi}{\chi}\frac{\partial P^\circ}{\partial\xi}+\frac{\eta}{\chi}\frac{\partial P^\circ}{\partial\eta}\right)+\eta\frac{\partial w^\circ}{\partial\xi}-\xi\frac{\partial w^\circ}{\partial\eta}-v^\circ=0\\
\frac{\eta}{\chi}\frac{\partial P^\circ}{\partial\xi}-\frac{\xi}{\chi}\frac{\partial P^\circ}{\partial\eta}+\xi\frac{\partial w^\circ}{\partial\xi}+\eta\frac{\partial w^\circ}{\partial\eta}=0\\
\frac{\xi}{\chi}\frac{\partial P^\circ}{\partial\xi}+\frac{\eta}{\chi}\frac{\partial P^\circ}{\partial\eta}-\xi\frac{\partial v^\circ}{\partial\xi}-\eta\frac{\partial v^\circ}{\partial\eta}=0
\end{gathered}
\tag{2.1}
$$

$$
\left(\sigma^2=M^2-1,\ \chi=\sqrt{\xi^2+\eta^2},\qquad P^\circ=\frac{1}{V_{e,i}^2}\int\limits_{p_{e,i}}^{p}\frac{dp}{\rho(p,s_{e,i})}=i^\circ=-u^\circ\right)
$$

справедливой с каждой стороны от штрихпунктирной ломаной на фиг. 2 (с соответствующим индексом e или i). Возмущения компонент скорости $u^\circ,\ldots$ введены в (2.1) равенствами $u=V_{e,i}(1+u^\circ)$, $v=V_{e,i}v^\circ$ и $w=V_{e,i}w^\circ$, а $i^\circ=(i-i_{e,i})/V_{e,i}^2$.

Третье уравнение из (2.1) содержит производные только вдоль конических линий тока: $d\eta/d\xi=\eta/\xi$, и, следовательно, как и исходное нелинейное уравнение для v_R из (1.1), имеет характеристический вид. Если $\sigma^2\chi^2>1$, то характеристическими уравнениями, естественно, можно заменить и два первых уравнения этой системы. Характеристические уравнения, эквивалентные в таком случае системе (2.1), записываются в форме

$$\frac{\lambda}{\chi}\frac{D^\pm P^\circ}{D\xi}\mp\frac{D^\pm w^\circ}{D\xi}=\frac{v^\circ}{\lambda\xi\mp\eta},\quad \frac{DP^\circ}{D\xi}=\chi\frac{Dv^\circ}{D\xi} \tag{2.2}$$

$$\left(\frac{D^\pm}{D\xi}=\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\lambda\eta\pm\xi}{\lambda\xi\mp\eta}\frac{\partial}{\partial\eta},\quad \lambda=\sqrt{\sigma^2\chi^2-1},\quad \frac{D}{D\xi}=\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\eta}{\xi}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)$$

Здесь опущены индексы e и i у σ, а верхние (нижние) знаки отвечают $c^+(c^-)$-характеристикам. В плоскости $\xi\eta$ направление $c^+(c^-)$-характеристики получается поворотом вектора $\mathbf{q}$ на угол μ против (по) часовой стрелки (e).

Граничными условиями рассматриваемой задачи являются условие непротекания на следах разделительных стенок (если последние пересекают плоскость $z=\mathrm{const}>0$, что, согласно фиг. 1, имеет место при $\alpha<0$ или $\beta>0$) и требования непрерывности p и нормальной компоненты вектора скорости на тангенциальном разрыве и отсутствия возмущений параметров в набегающих потоках. Кроме того, при $\alpha>0$ или $\beta<0$, когда плоскость $z=\mathrm{const}>0$ не пересекается с соответствующими кромками, необходимо либо задать возмущенные параметры при $\chi\to\infty$ в неограниченно расширяющихся в плоскости $\xi\eta$ областях кромочных течений, либо, что проще, ввести в задачу дополнительную информацию о положении границ указанных областей (или области), как это показано на фиг. 2, *и* пунктиром (пунктирные кривые пересекаются в точке $\xi=\mathrm{ctg}\,\alpha$, $\eta=0$). При записи условия непрерывности p учтем, что в силу (2.1) P° – функция не только p, но и s при, в общем случае, $s_i\neq s_e$. Из-за этого непрерывность p не влечет за собой непрерывности P°.

Чтобы записать следующее из непрерывности p условие для разрыва P°, примем, что $\rho/\rho_{e,i}=(p/p_{e,i})^{1/k}$ с одинаковым для обоих потоков показателем k. При течении совершенных газов с одним и тем же показателем адиабаты $\varkappa$ данная формула является точной, а $k=\varkappa$. В общем случае на нее следует смотреть как на некоторую аппроксимацию, причем использование даже значения $k=1$ существенно повышает точность линейной теории [5]. При течении совершенных газов с $\varkappa_i\neq\varkappa_e$ еще лучшим приближением служит $k=(\varkappa_i+\varkappa_e)/2$. Последнюю формулу для k можно использовать и для газов с произвольными уравнениями состояния, понимая под $\varkappa_{e,i}$ локальные показатели адиабаты, определенные по параметрам каждого из невозмущенных потоков равенством $\varkappa=(\partial\ln p/\partial\ln\rho)_s\equiv\rho a^2/p$.

С использованием описанных выше показателей k и $\varkappa_{e,i}$ условия на тангенциальном разрыве (в плоскости $\xi\eta$ – на разрывной c^0-характеристике) и на разделительных стенках (при $\alpha<0$ или $\beta>0$) записываются в виде

$$\begin{gathered} w_+^\circ=w_-^\circ,\quad P_+^\circ-KP_-^\circ=\varepsilon\quad \{(\xi,\eta)\,|\,\mathrm{ctg}\,\alpha<\xi<0,\quad \eta=0;\quad \eta=\xi\,\mathrm{tg}\,\gamma,\\ 0<\chi<\mathrm{ctg}\,\beta\},\quad w_\pm^\circ=0\quad \{(\xi,\eta)\,|\,\xi<\mathrm{ctg}\,\alpha<0,\quad \eta=0;\quad \eta=\xi\,\mathrm{tg}\,\gamma,\\ 0<\mathrm{ctg}\,\beta<\chi\} \end{gathered} \tag{2.3}$$

$$\left(\varepsilon=\frac{k}{(k-1)\varkappa_e M_e^2}(n^{(k-1)/k}-1),\quad K=\frac{\varkappa_i M_i^2}{\varkappa_e M_e^2}n^{(k-1)/k}\right)$$

Здесь индексы «минус» и «плюс» приписаны возмущенным параметрам внутреннего и внешнего потоков; как и ранее, $n=p_i/p_e$, формула для ε верна при любых k, в том числе при $k=1$, когда имеет место непрерывный переход к $\varepsilon=(\ln n)/(\varkappa_e M_e^2)$. В дополнение к (2.3) в невозмущенных набегающих потоках в силу определения величин с индексом «градус» имеем

$$P^\circ=v^\circ=w^\circ=u^\circ=i^\circ=0 \tag{2.4}$$

Как видно из фиг. 2, *и*, при положительных α расширяющаяся область кромочного течения ограничена прямолинейными c^+- и c^--характеристиками

$$\eta=\eta_{e,i}(\xi)=\pm(1-\xi\,\mathrm{tg}\,\alpha)(\sigma_{e,i}^2-\mathrm{tg}^2\,\alpha)^{-1/2} \tag{2.5}$$

где верхний (нижний) знак и первый (второй) индекс отвечают верхней (нижней) границе, а ξ заведомо не превосходит $\sigma_{e,i}^2\,\mathrm{tg}\,\alpha$. На них вплоть до точек касания со звуковыми окружностями параметры в общем случае рвутся, а их скачки удовлетворяют соотношениям

$$[P^\circ]=\mathrm{const},\quad [v^\circ]=[P^\circ]/\chi,\quad [w^\circ]=\mp\lambda[P^\circ]/\chi \tag{2.6}$$

где $[\Phi]$ — скачок Φ при переходе через разрыв, верхний (нижний) знак соответствует $c^+(c^-)$-характеристике. В силу (2.6) с удалением от начала координат $[v^\circ]\to 0$, а $[w^\circ]\to\pm\sigma_{e,i}[P^\circ]$. Как и для других течений, зависящих от двух переменных (см., например, [6, 7]), (2.6) есть следствие линеаризованных уравнений характеристик (в данном случае (2.2)). В нелинейном приближении формулы, аналогичные (2.6), справедливы для разрывов производных по нормали к характеристике.

Распределения $P^\circ, \ldots$ в расширяющейся при $\alpha>0$ кромочной области даются формулами

$$P_+{}^\circ=\varepsilon\left(1+K\frac{\sqrt{\sigma_e{}^2-\mathrm{tg}^2\,\alpha}}{\sqrt{\sigma_i{}^2-\mathrm{tg}^2\,\alpha}}\right)^{-1},\qquad P_-{}^\circ=-P_+{}^\circ\frac{\sqrt{\sigma_e{}^2-\mathrm{tg}^2\,\alpha}}{\sqrt{\sigma_i{}^2-\mathrm{tg}^2\,\alpha}}$$

$$v_\pm{}^\circ=(\xi v_x{}^\circ+\eta v_y{}^\circ)_\pm/\chi,\quad w_\pm{}^\circ=(\xi v_y{}^\circ-\eta v_x{}^\circ)_\pm/\chi \tag{2.7}$$

$$\overset{\circ}{v}_{x\pm}=P_\pm{}^\circ\,\mathrm{tg}\,\alpha,\qquad \overset{\circ}{v}_{y\pm}=\pm P_\pm{}^\circ\sqrt{\sigma^2_{e,i}-\mathrm{tg}^2\,\alpha}$$

где $v_x{}^\circ$ и $v_y{}^\circ$ — отнесенные к $V_{e,i}$ проекции вектора скорости на оси x и y. Формулы (2.7) являются решением задачи обтекания сверхзвуковой косой кромки двумя однородными потоками. В этой задаче давление в зоне взаимодействия постоянно, а P° вместе с $v_x{}^\circ$ и $v_y{}^\circ$ — кусочно-постоянны со скачком на тангенциальном разрыве — прямой $\eta=0$. На нем выполняются два первых условия из (2.3), а на характеристиках (2.5), ограничивающих рассматриваемую кромочную область,— равенства (2.6) с заменой в силу (2.4) $[\Phi]$ на $\Phi_\pm$ соответственно. Распределения (2.7), естественно, удовлетворяют системе (2.1). Условия, которые при $\beta<0$ выполняются для второй кромочной области, аналогичны (2.5) — (2.7).

Выписанные выше уравнения и условия позволяют сформулировать закон подобия исследуемых конических течений. Поступая стандартным способом, как, например, в [4, 8], найдем, что в данном случае указанный закон имеет вид

$$u=V_{e,i}(1+\varepsilon u^{\circ\circ}),\quad v=\varepsilon\sigma_i V_{e,i}v^{\circ\circ},\quad w=\varepsilon\sigma_i V_{e,i}w^{\circ\circ},$$

$$P(p')\equiv\int_1^{p'}\frac{dp'}{\rho'}=\varepsilon(\varkappa M^2)_{e,i}P^{\circ\circ} \tag{2.8}$$

$$\Phi^{\circ\circ}=\Phi^{\circ\circ}(\sigma_i\xi,\ \sigma_i\eta,\ K,\ K_\sigma,\ K_\alpha,\ K_\beta,\ \gamma)$$

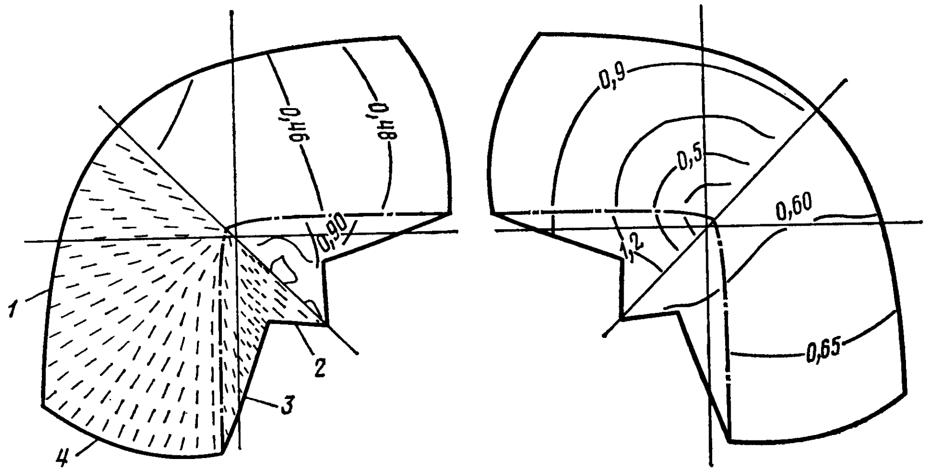
$$\left(K_\sigma=\frac{\sigma_e{}^2}{\sigma_i{}^2}=\frac{M_e{}^2-1}{M_i{}^2-1},\ K_\alpha=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\sigma_i},\ K_\beta=\frac{\mathrm{tg}\,\beta}{\sigma_i},\ \Phi'=\frac{\Phi}{\Phi_{e,i}}\right)$$

где, как и ранее, индексы e и i отвечают соответственно внешней и внутренней подобластям конического потока. Так как $dP/dp'=1/\rho'>0$, то существует обратная функция $p'=f(P)$, и, следовательно,

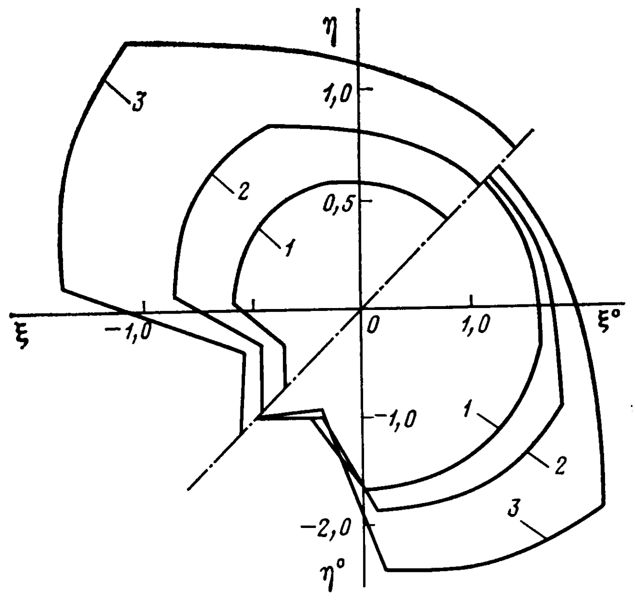
$$p=p_{e,i}f\{\varepsilon(\varkappa M^2)_{e,i}P^{\circ\circ}\}\approx p_{e,i}+\varepsilon(\rho V^2)_{e,i}p^{\circ\circ}$$

Точность второй из приведенных формул для p ниже, чем первой.

3. Численное решение нелинейных уравнений Эйлера с целью построения полной картины конического течения проводилось в рамках подхода, развитого в [1]. Уравнения, записанные в декартовых координатах xyz, интегрировались слоями $z=\mathrm{const}$ по «маршевому» («сверхзвуковому») аналогу схемы С. К. Годунова [9], как правило, с выделением всех границ существенно конического (зависящего от ξ и η) потока и основного тангенциального разрыва. Решение вырабатывалось установлением по z, т. е. счет велся до тех пор, пока в переменных $\xi\eta z$ параметры с точностью, существенно превышающей возможности графического представления, пе-



Фиг. 3



Фиг. 4

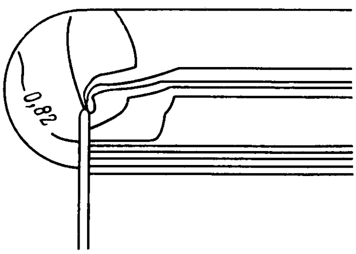
реставали зависеть от z. Полученные при этом результаты неплохо коррелируют с качественными выводами линейного анализа п. 2.

В приводимых далее примерах рассчитывалось взаимодействие потоков совершенного газа с $\varkappa_i=\varkappa_e=\varkappa=1{,}4$ при давлении в струе, превышающем давление во внешнем потоке ($n=p_i/p_e>1$), и при углах $\alpha=0$ и $\gamma=\pi/2$. В дополнение к этому в случаях, представленных на фиг. 3 и 4, $\beta=0$.

Фигура 3 отвечает $n=2$, $M_i=2{,}03$ и $M_e=1{,}47$. На ней показаны граница области конического течения, тангенциальный разрыв (штрихпунктир), направление конических линий тока (слева внизу), изохоры (слева вверху), изобары (справа внизу) и линии постоянства конического числа Маха M_q (справа вверху). В данном случае граница конического течения состоит из ударной волны *1*, характеристик *2* и *3* и линии параболичности *4*. Во внутренней части рассчитанной области (под тангенциальным разрывом) изохоры $\rho/\rho_i=\mathrm{const}$ построены через 0,04, изомахи $M_q=\mathrm{const}$ – через 0,4, а изобары $p/p_i=\mathrm{const}$ – через 0,1. Сравнение фиг. 3 с фиг. 2, *б* показывает, что, несмотря на заметное влияние эффектов нелинейности, линейный анализ дает качественно правильную картину течения. На фиг. 3 не показано сильное сгущение изолиний, наблюдающееся в окрестности участка *2* границы конического течения.

Фигура 4 демонстрирует степень выполнения закона подобия (2.8). В ее левой части в плоскости $\xi\eta$ нарисованы границы области конического течения (точнее, половинки этой области) для трех режимов, характеризуемых одинаковыми значениями параметров подобия ($K=2{,}3$, $K_\sigma=0{,}375$, $K_\alpha=K_\beta=0$). Цифрой *1* помечены границы, рассчитанные для $M_i=3$, $M_e=2$, $n=1{,}1$ и $\varepsilon=0{,}017$, цифрой *2* – для $M_i=2{,}38$, $M_e=1{,}66$, $n=1{,}5$ и $\varepsilon=0{,}11$ и, наконец, цифрой *3* – границы из предыдущего примера ($\varepsilon=0{,}25$). В правой части фиг. 4 те же границы перерисованы в переменных подобия $\xi^\circ=\sigma_i\xi$ и $\eta^\circ=\sigma_i\eta$. Видно, что если в плоскости $\xi\eta$ отличие границ велико, то после перехода к $\xi^\circ\eta^\circ$ наблюдается заметное сближение (особенно первой и второй, соответствующих достаточно малым ε).

Последний пример относится к конфигурации типа сопла с прямоугольным поперечным сечением и с «косым срезом» ($\alpha=0$, $\beta=71{,}5°$, $\gamma=\pi/2$) при его работе на режиме $M_i=M_e=1{,}5$, $n=1{,}45$ и $\varepsilon=0{,}12$. В отличие от предыдущих примеров расчет велся с выделением только части границ областей возмущенного и конического потоков и без выделения тангенциального разрыва. Результаты расчета приведены на фиг. 5, на которой через шаг 0,02 изображены изохоры $\rho/\rho_i=\text{const}$.



Фиг. 5

Там же показаны ударная волна – внешняя граница возмущенного потока – и боковая стенка (двойная линия). Центрированная волна разрежения и «размазанный» тангенциальный разрыв, расположенные внутри канала, на фиг. 5 представлены сгущением изохор. Сравнение фиг. 5 с фиг. 2, *з*, построенной для подобной ситуации в рамках линейного анализа, обнаруживает их очевидное сходство.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Макаров В. Е.* К выделению поверхностей разрывов при численном расчете сверхзвуковых конических течений.– Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 1982, т. 22, № 5, с. 1218–1226.
2. *Булах Б. М.* Нелинейные конические течения газа. М.: Наука, 1970. 344 с.
3. *Salas M. D.* Flow patterns near a conical sonic line.– AIAA Journal, 1980, v. 18, № 3, p. 227–234.
4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1953. 788 с.
5. *Крайко А. Н., Ткаленко Р. А.* К построению линейной теории неравновесных и равновесных течений.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 6, с. 26–33.
6. *Крайко А. Н.* Исследование слабо возмущенных сверхзвуковых течений при произвольном числе неравновесных процессов.– ПММ, 1967, т. 30, № 4, с. 661–673.
7. *Крайко А. Н.* Некоторые вопросы геометрической акустики одномерных нестационарных и двумерных стационарных течений.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1967, № 5, с. 104–109.
8. *Крайко А. Н., Тагиров Р. К.* К околозвуковому обтеканию тел вращения с протоком при наличии истекающей из протока струи.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 6, с. 73–80.
9. *Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.

Москва

Поступила в редакцию
1.II.1984