МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 • 1985

УДК 532.5.013.4:536.46

# ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНОГО ФРОНТА ЭКЗОТЕРМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ В КОНДЕНСИРОВАННОЙ ФАЗЕ

АВДЕЕВ П. А.

Рассматривается модельная система теории горения, описывающая экзотермическую реакцию в конденсированной фазе. Аррениусовская зависимость скорости реакции от температуры заменяется кусочно-постоянной. Это позволяет найти распределение величин в стационарной волне и исследовать устойчивость решения по отношению к одномерным возмущениям.

Уравнение теплопроводности и уравнение для скорости химической реакции в системе координат, движущейся с постоянной скоростью $u$, имеют вид

$$\frac{\partial X}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 X}{\partial s^2}+\frac{\partial X}{\partial s}-\Phi \qquad (1)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \tau}=\frac{\partial Y}{\partial s}-\Phi, \qquad \Phi=\Lambda Y f(X,\theta)$$

$$f(X,\theta)=\exp\left(\frac{1}{\theta}\frac{X}{X-1}\right) \qquad (2)$$

$$\tau=\frac{u^2}{a}t, \quad s=\frac{u}{a}(z-ut), \quad X=1-\frac{T}{T_1}, \quad Y=Cn$$

$$T_1=T_0+\frac{Q}{c}, \quad C=\frac{Q}{cT_1}, \quad \theta=\frac{RT_1}{E}, \quad \Lambda=\frac{ak}{u^2}\exp\left(-\frac{1}{\theta}\right)$$

Здесь $\Phi$ — скорость реакции; $n$ — концентрация реагента; $a$ — температуропроводность; $k$ — предэкспонент; $T_0$ — начальная температура; $T_1$ — температура горения; $C$ и $\theta$ $(0<C<1,\ 0<\theta)$ — безразмерные параметры задачи. Остальные обозначения — общепринятые [1]. Аррениусовскую зависимость (2) подправляют в окрестности $X=C$, полагая тождественно равной нулю, с тем чтобы обеспечить существование стационарной волны горения. Такую зависимость будем называть модифицированной. При численном моделировании системы (1), (2) (см. [1]) зависимость (2) модифицируется автоматически благодаря наличию машинного нуля. В настоящей задаче рассматривается модельная зависимость

$$f(X,\theta)=h(\theta-X) \qquad (3)$$

где $h$ — функция Хевисайда. Для случая (3) в плоскости параметров задачи определяется граница устойчивости стационарного решения и сравнивается с границей устойчивости, найденной в [1] численными методами, для случая аррениусовской зависимости скорости реакции от температуры (2).

Пусть $u$ совпадает со скоростью распространения волны горения, тогда профиль волны определяется стационарным решением (1) с граничными условиями

$$s=-\infty, \quad X=Y=0, \quad s=+\infty, \quad X=Y=C$$

Найденной при этом зависимостью $\Lambda=\Lambda(C, \theta)$ определяется скорость волны. В случае (3) решение имеет вид

$$\begin{gathered} X=\exp(\Lambda s), \quad Y=(1+\Lambda)\exp(\Lambda s), \quad s\leqslant s_* \\ X=C-\exp(s_0-s), \quad Y=C, \quad s>s_* \end{gathered} \tag{4}$$

$$s_*=\frac{\ln\theta}{\Lambda}, \qquad s_0=s_*+\ln\Lambda\theta, \qquad C=(1+\Lambda)\theta$$

Асимптотическое поведение стационарного решения при $s\to\pm\infty$ в случае модифицированной зависимости (2) имеет такой же вид, что и в случае (3).

Исследуем устойчивость стационарного решения (4) в рамках линейной теории, при этом возмущения имеют вид

$$\delta X=\operatorname{Re}\xi(s)\exp(\lambda\tau), \qquad \delta Y=\operatorname{Re}\eta(s)\exp(\lambda\tau)$$

Для определения $\lambda$, $\xi$, $\eta$ получим задачу на собственные значения

$$\frac{d\varphi}{ds}=L(\lambda)\varphi \qquad \varphi=\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}, \qquad L=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial X} & \dfrac{\partial\Phi}{\partial Y}+\lambda & 0\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial X}+\lambda & \dfrac{\partial\Phi}{\partial Y} & -1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial X}=-(1+\Lambda)\delta(s-s_*), \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial Y}=\Lambda h(s_*-s)$$

$$\varphi\to 0, \quad s\to\pm\infty \tag{6}$$

где $\partial\Phi/\partial X$ и $\partial\Phi/\partial Y$ вычислены на решении (4) и введено обозначение $\zeta=d\xi/ds$. Решение задачи (5), (6) ищется в классе обобщенных функций. Собственные значения $\lambda$ образуют комплексно-сопряженные пары, поэтому далее всюду принято ограничение $\operatorname{Im}\lambda\geqslant 0$. Определим два базиса решений уравнения (5): $\varphi^+=(\varphi_1^+, \varphi_2^+, \varphi_3^+)$ и $\varphi^-=(\varphi_1^-, \varphi_2^-, \varphi_3^-)$, заданные своими асимптотиками

$$\begin{gathered} s\to+\infty: \\ \varphi_1^+\sim\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\exp(\lambda s), \qquad \varphi_m^+\sim\begin{pmatrix}1\\0\\p_m\end{pmatrix}\exp(p_m s) \\ s\to-\infty: \\ \varphi_1^-\sim\begin{pmatrix}\Lambda\\ \Lambda+(\Lambda+\lambda)^2\\ \Lambda(\Lambda+\lambda)\end{pmatrix}\exp(\Lambda+\lambda)s, \qquad \varphi_m^-\sim\begin{pmatrix}1\\0\\p_m\end{pmatrix}\exp(p_m s) \\ p_{2,3}=-{}^1/_2\pm\sqrt{{}^1/_4+\lambda}, \qquad (m=2,\ 3) \end{gathered} \tag{7}$$

Здесь выбирается ветвь квадратного корня с разрезом по положительной полуоси: $\sqrt{-1}=i$. Выражения (7) получены решением (5) при замене $\partial\Phi/\partial X$ и $\partial\Phi/\partial Y$ соответствующими им постоянными значениями на $\pm\infty$. В случае кратных корней характеристических уравнений ($\lambda=0$, $\lambda=-{}^1/_4$, $\lambda=-\Lambda+i\sqrt{\Lambda}$) выражения (7) должны быть изменены. Следующее условие, получаемое из (5) интегрированием по $s$ в окрестности $s_*$

$$\varphi(s_*+0)-\varphi(s_*-0)=-(1+\Lambda)\xi_*\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad \xi_*=\xi(s_*)$$

позволяет по заданным асимптотикам (7) продолжить $\varphi^-$ и $\varphi^+$ на всю ось $s$. Два базиса $\varphi^-$ и $\varphi^+$ линейно зависимы, поэтому

$$\varphi^- = S(\lambda)\varphi^+ \tag{8}$$

где $S(\lambda)$ — постоянная матрица размером $3\times3$. Задача определения собственных значений формулируется с помощью условий на $S$ или на матрицу $P$, обратную к ней.

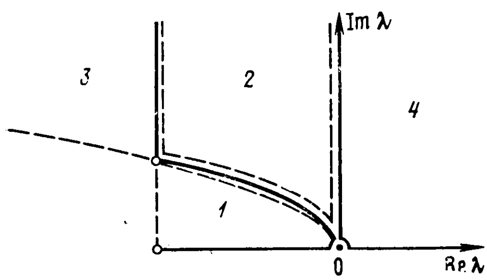
Произведем разбиение комплексной плоскости $\lambda$ на области, каждой из которых соответствует набор $\varphi_j^-$, ограниченных при $s\to-\infty$, и $\varphi_k^+$, ограниченных при $s\to+\infty$. Получим следующее соответствие (фиг. 1)

$$M_1=\{\varphi_1^-,\ \varphi_1^+,\ \varphi_2^+,\ \varphi_3^+\},\quad M_2=\{\varphi_1^-,\ \varphi_2^-,\ \varphi_1^+,\ \varphi_3^+\}$$
$$M_3=\{\varphi_2^-,\ \varphi_1^+,\ \varphi_3^+\},\quad M_4=\{\varphi_1^-,\ \varphi_2^-,\ \varphi_3^+\}$$

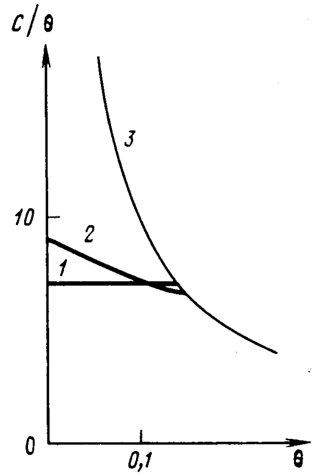
Уравнения границ раздела областей

$$\operatorname{Re}\lambda=0,\quad \Lambda+\operatorname{Re}\lambda=0,\quad \operatorname{Re}\lambda+(\operatorname{Im}\lambda)^2=0$$

Если $\lambda$ находится в одной из указанных областей, то соответствующая ему собственная функция должна быть линейной комбинацией как $\varphi_j^-$, так и $\varphi_k^+$, соответствующих данной области. Это позволяет сформулировать условия на собственные значения и определить собственные функции в каждой из областей.



Фиг. 1



Фиг. 2

Пусть $\lambda$ принадлежит $D_1$, тогда соответствующая ему $\varphi=\varphi_1^-$, которая в силу (8) является линейной комбинацией $\varphi_1^+$, $\varphi_2^+$, $\varphi_3^+$, убывающих при $s\to+\infty$. Следовательно, каждая точка области $D_1$ является однократным собственным значением. В случае $\Lambda>{}^1/_4$ непосредственные вычисления показывают, что $\lambda=-{}^1/_4$ — однократное собственное значение. В $D_2$ собственная функция $\varphi$ должна быть такой линейной комбинацией $\varphi_1^-$, $\varphi_2^-$, чтобы в разложении $\varphi$ по базису $\varphi^+$ коэффициент при $\varphi_2^+$, неограниченной при $s\to+\infty$, был нулевым. Так как в силу (8)

$$\varphi_1^- = S_{11}\varphi_1^+ + S_{21}\varphi_2^+ + S_{31}\varphi_3^+$$
$$\varphi_2^- = S_{12}\varphi_1^+ + S_{22}\varphi_2^+ + S_{32}\varphi_3^+$$

то получаем $\varphi=S_{22}\varphi_1^- - S_{21}\varphi_2^-$. Значения $\lambda$ из $D_2$, для которых одновременно $S_{21}=0$, $S_{22}=0$, являются двукратными. В случае (3) такие $\lambda$ отсутствуют, поэтому каждая точка $D_2$ является однократной. Вычисления для $\lambda=0$ показывают, что это однократное собственное значение, оно соответствует нейтральным возмущениям (4). Стационарные решения образуют однопараметрическое семейство по отношению к сдвигу $\varepsilon$ вдоль оси $s$.

Подставив эти решения в (1) и дифференцируя по $\varepsilon$, получим, что $\xi=dx/ds$, $\eta=dY/ds$, $\lambda=0$ является решением (5), (6). При $\lambda=-\Lambda+i\sqrt{\Lambda}$ базис $\varphi^-$ не убывает при $s\to-\infty$, поэтому это не собственное значение. Собственные значения в $D_3$ определяются из уравнения $S_{22}=0$, которое в случае (3) не имеет решений. Собственные значения в $D_4$ определяются условием $P_{33}=0$. В случае (3) это приводит к следующему уравнению:

$$(\Lambda+\Lambda^2+4\Lambda\lambda+2\lambda^2)\sqrt{1+4\lambda}=(1+\Lambda)(\Lambda+2\Lambda\lambda+2\lambda^2) \tag{9}$$

Корни соответствующего уравнения пятой степени

$$\lambda=0,\quad \lambda=-\Lambda\pm i\sqrt{\Lambda}$$
$$\lambda=[\Lambda(\Lambda-6)\pm\sqrt{\Lambda(\Lambda-2)^2(\Lambda-8)}]/8 \tag{10}$$

но корнями уравнения (9) будут только те из них, для которых $\operatorname{Im}\lambda\geqslant0$. Представляет интерес один из корней (10) с $\operatorname{Im}\lambda\geqslant0$, который при $\Lambda\geqslant6$ находится в $D_4$ и зависит только от параметра $\Lambda$. Наряду с найденными собственными значениями в задаче (5), (6) существуют комплексно-сопряженные к ним собственные значения.

Итак, все собственные значения задачи (5), (6) являются однократными и занимают полосу $-\Lambda<\operatorname{Re}\lambda<0$. Кроме того, $\lambda=0$ всегда собственное значение, а при $\Lambda\geqslant6$ существуют собственные значения, задаваемые формулой (10). При $\Lambda=6$ соответствующая (10) пара комплексно-сопряженных собственных значений $\lambda=\pm i\sqrt{3}$ пересекает мнимую ось, что соответствует потере устойчивости решением (4). Нейтральная кривая *1* на плоскости параметров задачи изображена на фиг. 2. Выше нейтральной кривой расположена область неустойчивости, ниже — область устойчивости. Для сравнения приведена полученная в [1] численными методами нейтральная кривая *2*: $C=9{,}1\theta/(1+2{,}5\theta)$ при аррениусовской скорости реакции от температуры. Кривая *3*: $C=1$ соответствует границе физической области параметров. Метод, использованный в [1] для определения нейтральной кривой *2*, требует значительных затрат машинного времени.

В заключение отметим, что существование собственных значений $-\Lambda<\operatorname{Re}\lambda<0$ и $\lambda=0$ не связано с конкретным видом зависимости (3), поэтому верно и в случае модифицированной зависимости (2).

Автор благодарен Г. Г. Черному за постоянное внимание к работе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Шкадинский К. Г., Хайкин Б. И., Мержанов А. Г.* Распространение пульсирующего фронта экзотермической реакции в конденсированной фазе.– Физика горения и взрыва, 1971, т. 7, № 1, с. 19–28.

Москва

Поступила в редакцию 22.II.1984