МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 • 1985

УДК 532.5.013.4

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОГО, ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЧЕНИЯ С ТАНГЕНЦИАЛЬНЫМ РАЗРЫВОМ В ПРОФИЛЕ СКОРОСТИ

КОЛЫХАЛОВ П. И.

Исследуем устойчивость плоского, осесимметричного течения с профилем угловой скорости $\Omega(r)$ таким, что угловая скорость постоянна при $r<r_0-L$ и $r>r_0+L$, но монотонно меняется от Ω_1 до Ω_2 вблизи точки r_0, причем толщина переходного слоя мала $L\ll r_0$, а изменение скорости не мало $|\Omega_2-\Omega_1|\sim\Omega_2, \Omega_1$. Очевидно, что при $L\to 0$ коротковолновые возмущения по азимутальной координате φ ($k_\varphi=m/r_0\gg 1/r_0$) будут неустойчивыми с инкрементом, близким к инкременту Кельвина – Гельмгольца. В случае $L=0$ (т. е. для профиля с тангенциальным разрывом) найдем инкремент неустойчивости γ_0 и покажем, что при конечной (но малой) толщине разрыва L инкремент не отличается от γ_0 с точностью до членов, пропорциональных $k_\varphi L\ll 1$ и $1/m\ll 1$. На этом примере можно исследовать влияние вращения на устойчивость течения. Существенно, что стабилизация (или дестабилизация) рассматриваемого потока вращением имеет место только для трехмерных или осесимметричных возмущений.

1. В цилиндрической системе координат невозмущенный поток имеет компоненты скорости $V_z=V_r=0$, $V_\varphi=r\Omega(r)$, а давление определяется уравнением $dP_0/dr=\rho r\Omega^2$. Запишем возмущенные значения давления и скорости в виде

$$[\delta\mathbf{V}, \delta P]\sim[\mathbf{v}(r), p(r)]\exp(iqt+im\varphi+ik_z z)$$

где m – целое число, а возмущения растут во времени, если $\operatorname{Im} q=-\gamma<0$. Обозначим $\omega=q+m\Omega(r)$; $\Phi=4\Omega^2+2r\Omega\Omega'$; $d(\ )/dr=(\ )'$ и линеаризуем уравнения гидродинамики [1]

$$i\omega v_r-2\Omega v_\varphi=-p'$$

$$i\omega v_\varphi+(2\Omega+r\Omega')v_r=-i\frac{m}{r}p$$

$$i\omega v_z=-ik_z p$$

$$\frac{1}{r}(rv_r)'+i\frac{m}{r}v_\varphi+ik_z v_z=0$$

После преобразований получим уравнение для $p(r)$ и соотношения для возмущений радиальной скорости v_z и смещения вдоль радиуса – ξ_r

$$v_r=i\frac{\omega p'+2m\Omega p/r}{\omega^2-\Phi};\qquad \xi_r=\frac{v_r}{i\omega}$$

$$p''+\left[\frac{1}{r}-\frac{(\omega^2-\Phi)'}{\omega^2-\Phi}\right]p'-\left\{\frac{m^2}{r^2}+k_z^2\frac{\omega^2-\Phi}{\omega^2}-\frac{2m\Omega}{r\omega}\left[\frac{\Omega'}{\Omega}-\frac{(\omega^2-\Phi)'}{\omega^2-\Phi}\right]\right\}=0 \tag{1.1}$$

В областях, где $d\Omega/dr\equiv\Omega'=0$ (т. е. при $|r-r_0|>L$) уравнение (1.1) имеет простой вид и его общее решение выражается через модифицированные функции Бесселя

$$r^2p''+rp'-(m^2+\varkappa^2r^2)p=0$$
$$p=C_1I_m(\varkappa r)+C_2K_m(\varkappa r)$$

Здесь C_1, C_2 – произвольные постоянные, а $\varkappa^2=k_z^2(\omega^2-\Phi^2)/\omega^2$. Если радиус внутреннего цилиндра r_1 достаточно мал, то в области $r<r_0-L$ ре-

шение, удовлетворяющее условию непротекания $v_r(r_1)=0$, вблизи r_0 имеет вид $p=C_1I_m(\varkappa r)$ (предполагается, что k_z и m не равны нулю одновременно). Если же радиус внешнего цилиндра r_2 достаточно велик, в области $r>r_0+L$ решение есть $p=C_2K_m(\varkappa r)$.

2. Положим теперь $L=0$. Справа и слева от точки r_0 должны совпадать пределы значений смещения $\xi_r(r_0\pm 0)$ и возмущения давления $\delta P(r_0+\xi_r\pm 0)=(p+P_0'\xi_r)\rho$. Эти условия дают дисперсионное уравнение для $q=q_R-i\gamma$

$$\begin{gathered}\frac{\omega_1(\omega_1^2-4\Omega_1^2)}{\varkappa_1r_0\omega_1(I_m'(\varkappa_1r_0)/I_m(\varkappa_1r_0))+2m\Omega_1}+\Omega_1^2+\Omega_2^2=\\=\frac{\omega_2(\omega_2^2-4\Omega_2^2)}{\varkappa_2r_0\omega_2(K_m'(\varkappa_2r_0)/K_m(\varkappa_2r_0))+2m\Omega_2}\end{gathered}\tag{2.1}$$

$$\omega_{1,2}=q+m\Omega_{1,2};\quad \varkappa_{1,2}=k_z\sqrt{1-\Phi_{1,2}/\omega^2_{1,2}};\quad \Phi_{1,2}=4\Omega^2_{1,2}$$

Воспользовавшись равномерным асимптотическим разложением K_m и I_m при $m\gg 1$ [2], получим

$$\frac{I_m'(mt)}{I_m(mt)}=-\frac{K_m'(mt)}{K_m(mt)}=\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}$$

При $m\gg 1$ имеем $t=\varkappa_1/k_\varphi\approx\varkappa_2/k_\varphi\sim k_z/k_\varphi$. В случае $t\backsim 1$, отбрасывая малые члены, получим дисперсионное уравнение, такое же, как для плоскопараллельного течения с тангенциальным разрывом $\omega_1^2+\omega_2^2=0$, и решение

$$q=-m\frac{\Omega_2+\Omega_1}{2}\pm im\frac{|\Omega_2-\Omega_1|}{2}\tag{2.2}$$

В случае $t\ll 1$ имеет смысл сохранить в (2.1) члены, малые по $1/m$. Тогда уравнение (2.1) и его решение запишутся так

$$\omega_1(\omega_1-2\Omega_1)+m\Omega_1^2=-\omega_2(\omega_2+2\Omega_2)+m\Omega_2^2\tag{2.3}$$

$$q=-\left\{m\frac{\Omega_2+\Omega_1}{2}+\frac{\Omega_2-\Omega_1}{2}\right\}\pm i\frac{\sqrt{m^2-1}}{2}|\Omega_2-\Omega_1|\tag{2.4}$$

Легко убедиться, что выражения (2.3), (2.4), полученные в предположении $m\gg 1$, $k_z\neq 0$,— точное решение для любых $m\geqslant 1$ в случае $k_z=0$. Важнейшие свойства (2.2), (2.4) — существование неустойчивых мод при $m>1$ и симметрия $\operatorname{Im} q=-\gamma$ при замене $\Omega_2\rightleftarrows\Omega_1$. В случае $t\approx k_z/k_\varphi\gg 1$, отбрасывая малые (по $1/m$ и $1/t$) величины, получим

$$\begin{gathered}\omega_1^2+\omega_2^2=\left(\frac{k_z}{k_\varphi}\right)^2\frac{\Phi_2-\Phi_1}{4}\\ q=-m\frac{\Omega_2+\Omega_1}{2}\pm i\sqrt{\frac{(\Omega_2-\Omega_1)^2}{4}m^2-\frac{\Phi_2-\Phi_1}{8}k_zr_0}\end{gathered}\tag{2.5}$$

Хотя (2.5) получено в предположении $m\gg 1$, решение задачи для осесимметричных возмущений ($m=0$) дает q, совпадающее с (2.5). Из (2.5) следует, что вращение оказывает влияние на инкремент только в случае больших k_z.

3. Тангенциальный разрыв имеет смысл только как предел гладкого профиля скорости с переходным слоем, толщина L которого стремится к нулю (например, $\Omega=\Omega_0[1+\operatorname{th}((r-r_0)/L_*)]$, $L_*\leqslant L$). Пользуясь методом, изложенным в [3], построим приближенное решение уравнения (1.1) и покажем, что q близко к значению (2.2) в случае $m\gg 1$, $k_z\approx k_\varphi$, $m^2L<r_0$.

В областях, где $\Omega'=0$ (т. е. при $|r-r_0|>L\geqslant L_*$), решение (1.1) выражается через функции Бесселя. На интервалах $x=r-r_0$, таких, что $r_0/m\gg\gg|x|\geqslant L$, давление p и производная dp/dx практически не меняются

$$p\approx p_2;\quad \frac{dp}{dx}\approx -kp_2\quad (x>0)$$

$$p\approx p_1;\quad \frac{dp}{dx}\approx kp_1\quad (x<0)$$

$$k^2=k_z^2+k_\varphi^2$$

С другой стороны, при $m|x|\ll r_0$ имеем

$$p''-\frac{(\omega^2-\Phi)'}{\omega^2-\Phi}p'=0$$
$$p=C_1^*+C_2^*\int\limits_{-L}^{x}(\omega^2-\Phi)\,dx \tag{3.1}$$

Области применимости двух приближений перекрываются вблизи точек $x=\pm L$. Полагая $p_1=C_1^*=1$, $p'(x=-L)=k$, получим

$$C_2^*=\frac{k}{\omega_1^2-\Phi_1}\approx\frac{k}{\omega_1^2}$$

Если решение (3.1) можно продолжить от $-L$ до $+L$ (см. ниже), то

$$p(L)=p_2=1+(k/\omega_1)^2\int\limits_{-L}^{+L}\omega^2\,dx-(kr_0/\omega_1^2)(\Omega_2^2-\Omega_1^2)$$

Поскольку $|\omega_1^2|\geqslant(\operatorname{Im}q)^2\sim m^2\Omega^2$, то второй ($\sim kL$) и третий ($\sim 1/m$) члены малы и $p_2\approx p_1\approx 1$. Условие $p'(x=L)=-kp_2\approx C_2\omega_2^2$ дает уравнение $\omega_1^2+\omega_2^2=0$ и решение (2.2).

Подставляя найденное приближенное решение $p(x)$, $q=q_R-i\gamma$ в уравнение (1.1), можно убедиться, что на интервале $|x|\ll r_0/m$ при указанных значениях L/r_0, m/r_0, k_z последним слагаемым в (1.1) можно пренебречь по сравнению с двумя первыми (содержащими p'' и p'). Однако уравнение имеет особые точки (соответствующие $\omega^2=0$ и $\omega^2=\Phi$), а также точки поворота в комплексной плоскости x, и справедливость решения (3.1) на всем интервале $(-L, +L)$ неочевидна [4, 5]. Это означает, что коэффициенты C_1^* и C_2^* могут быть неодинаковы в точках $\pm L$. Анализ решения в окрестностях особых точек [4, 5] показывает, что в случае $m\gg 1$, $m^2L\leqslant\ll r_0$, $k_z\sim k_\varphi$ коэффициенты C_1^* и C_2^* меняются достаточно мало и приведенным выше построением приближенного решения можно пользоваться без изменений. Если же $k_\varphi m\gg k_z\gg k_\varphi$, то детальный анализ позволяет получить стабилизирующую (при $\Phi_2>\Phi_1$) поправку к γ, соответствующую решению (2.5).

4. Рассмотренная задача является наиболее простым и легко проверяемым (особенно при $k_z=0$, когда $p=C_\pm r^{\pm m}$) примером неустойчивости течения в случае, когда выполнен критерий Рэлея (квадрат угловой скорости растет с увеличением радиуса $\Phi\equiv d(\Omega^2r^4)/dr>0$) и течение устойчиво по отношению к осесимметричным возмущениям. Исследование тангенциального разрыва позволяет выделить ведущую роль азимутальных возмущений ($k_z=0$) в развитии неустойчивости таких течений. Первыми были исследованы осесимметричные возмущения ($m=0$) как наиболее простые, и усложнение проблемы шло по пути рассмотрения трехмерных возмущений с небольшим значением m (см. обзоры [6, 7]). Однако наличие осевой компоненты волнового вектора ($k_zr\geqslant m$), по-видимому, существенно затрудняет обнаружение неустойчивости при $\Phi>0$, когда вращение вносит только стабилизацию. Если инкремент неустойчивости для азимутальных возмущений мал, то даже небольшие значения k_z могут привести к стабилизации потока. Таким образом, исследование неустойчивости, в особенности численное, в этом случае ($\Phi>0$) имеет смысл начинать с чисто азимутальных возмущений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford: Clarendon press, 1961. 652 p.
2. *Абрамовиц М., Липман Д., Мак Ниш А. и др.* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 830 с.
3. *Зельдович Я. Б., Колыхалов П. И.* Неустойчивость растянутого тангенциального разрыва – первый член разложения по волновому вектору.– Докл. АН СССР, 1982, т. 266, № 2, с. 302–304.
4. *Олвер Ф.* Введение в асимптотические методы и специальные функции. М.: Наука, 1978. 376 с.
5. *Федорюк М. В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983. 352 с.
6. *Гольдштик М. А., Штерн В. Н.* Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977. 366 с.
7. *Джозеф Д.* Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981. 638 с.

Москва

Поступила в редакцию 21.X.1983