

УДК 532.593

СТРУКТУРА ВНУТРЕННИХ ВОЛН В КАНАЛЕ

**АКСЕНОВ А. В., КИРИЛЛОВ В. П., МОЖАЕВ В. В.,
СКОРОВАРОВ В. Е., ШЕРОНОВ А. А.**

Одним из способов описания волнового движения в жидкости с непрерывной стратификацией является описание с помощью нормальных волн (мод). Распространение внутренних гравитационных волн в закрытых прямоугольных областях, границы которых совпадают с плоскостями, через которые не происходит нормальное движение, существенно отличается от волнового движения в безграничной среде [1, 2]. Ниже приводится теоретическое и экспериментальное исследование распространения внутренних волн в экспоненциально стратифицированной жидкости в горизонтальном канале конечной высоты.

1. Теоретический анализ. Рассмотрим задачу о двумерном стационарном обтекании тела равномерным потоком идеальной, несжимаемой, экспоненциально стратифицированной жидкости. Тело находится в канале постоянной высоты H . В линейном приближении (случай малых возмущений) уравнения движения, неразрывности и условие несжимаемости можно записать в виде

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{du}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \rho_0 \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} - g\rho \\ \frac{d\rho}{dt} + v \frac{d\rho_0}{dy} + \rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}, \quad \rho_0(y) = \rho_0(0) \exp\left(-\frac{N^2 y}{g}\right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь ось x направлена вдоль набегающего потока, движущегося с постоянной скоростью U ($U > 0$) (начало системы координат выбрано на дне канала), ось y направлена вертикально вверх, противоположно направлению действия силы тяжести; g — ускорение силы тяжести; $\rho_0(y)$ — заданное невозмущенное распределение плотности в набегающем потоке. $N = \text{const}$ — частота Вайсяля — Брента; u, v, p, ρ — возмущения компонент вектора скорости (в направлении осей x, y), давления и плотности.

Систему уравнений (1.1) приведем к одному уравнению для определения вертикальной составляющей скорости v . В безразмерной форме оно имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2}{dt^2} \left(\Delta - \frac{F_0^2}{F_H^2} \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{1}{F_H^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] v &= 0 \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad F_H = \frac{U}{NH}, \quad F_0 = \frac{U}{(gH)^{1/2}} \end{aligned} \quad (1.2)$$

где F_H и F_0 — внутреннее и обычное числа Фруда. В качестве линейного масштаба взята высота канала H ; за масштаб времени принято отношение H/U ; масштаб скорости взят равным скорости набегающего потока U .

Полагая, что $F_0^2/F_H^2 = N^2H/g \ll 1$, уравнение (1.2) в приближении Буссинеска [3] записывается в виде

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} \Delta + \frac{1}{F_H^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] v = 0 \quad (1.3)$$

На дне и верхней границе канала имеем следующие граничные условия:

$$v = 0, \quad y = 0; 1 \quad (1.4)$$

Частные решения уравнения (1.3), удовлетворяющие граничным условиям (1.4), ищем в виде $v = \sin(n\pi y) \exp[i(kx - \omega t)]$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда из (1.3) получаем

$$G^{(n)} = (\omega - k)^2 (k^2 + n^2\pi^2) - k^2/F_H^2 = 0 \quad (1.5)$$

Таким образом, дисперсионное соотношение для внутренних волн в канале состоит из бесконечного числа ветвей $G^{(n)}(k, \omega) = 0$, $n = 1, 2, \dots$

В стационарном случае ($\omega = 0$) имеем при $k_n \neq 0$

$$k_n^2 = \frac{1}{F_H^2} - n^2\pi^2 \quad (1.6)$$

Из (1.6) следует, что незатухающие решения вдали от тела существуют только для мод с номерами n , такими, что $n \leq [1/(F_H\pi)]$, где $[]$ — целая часть числа.

Обозначая длину внутренней волны в безграничном пространстве через λ_0 ($\lambda_0 = 2\pi F_H$ [2]), из (1.6) найдем длину волны в волноводе

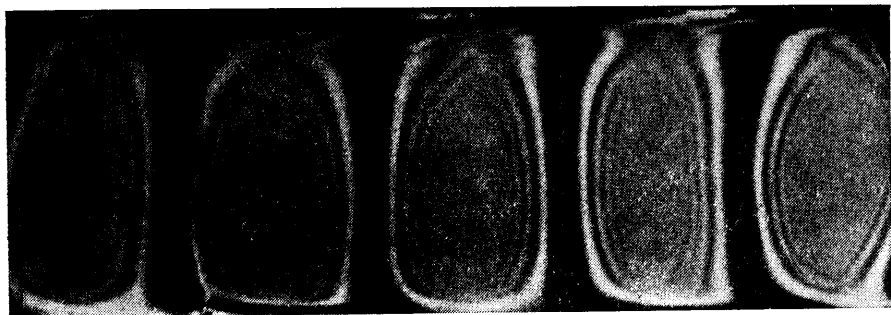
$$\lambda_n = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - (1/2\lambda_0 n)^2}} \quad (1.7)$$

В стационарном случае в системе координат, связанной с набегающим потоком, фазовая скорость внутренней волны в канале $V_f = -1$. Поэтому соотношение (1.7) показывает связь между длиной волны λ_n соответствующей моды с λ_0 не при одинаковой частоте, как это имеет место в случае радиоволноводов или акустических волноводов [4], а при одинаковой фазовой скорости. Из (1.5) получаем выражения для фазовой V_f и групповой V_g скоростей для отдельных мод в канале в системе координат, связанной с набегающим потоком. Они имеют следующий вид:

$$V_f = \pm \frac{1}{F_H(k_n^2 + n^2\pi^2)^{1/2}}, \quad V_g = \pm \frac{n^2\pi^2}{F_H(k_n^2 + n^2\pi^2)^{3/2}} \quad (1.8)$$

Из этих выражений видно, что для любой моды групповая скорость V_g всегда меньше фазовой скорости V_f . При $k_n \rightarrow 0$ они достигают максимальных значений и становятся равны друг другу. Следовательно, для каждой моды стационарные волны при $k_n \neq 0$ распространяются в канале позади движущегося тела с групповой скоростью, не превышающей предельного значения, равного единице.

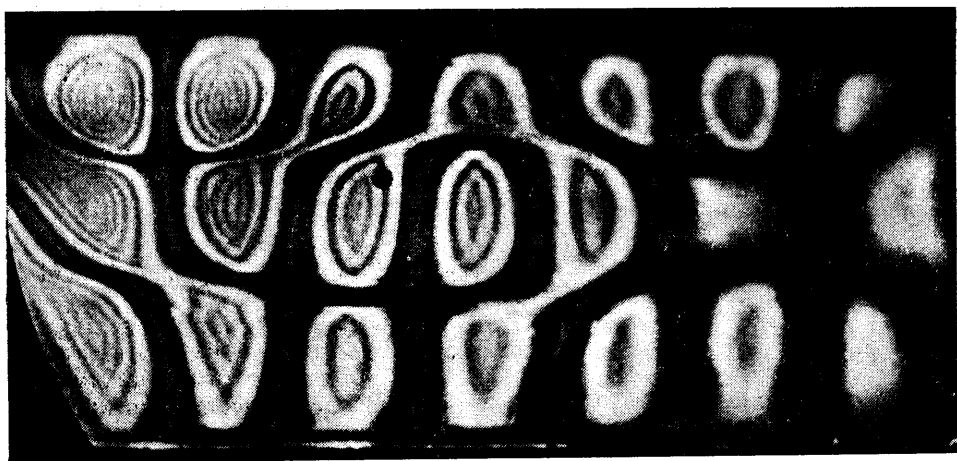
2. Экспериментальные результаты. Исследование модовой структуры внутренних гравитационных волн в однородно стратифицированной жидкости проводилось в лабораторном бассейне с размерами $1,0 \times 0,5 \times 0,25$ м³. Линейная стратификация рабочей жидкости осуществлялась заполнением лабораторного бассейна водным раствором поваренной соли переменной концентрации. Контроль за однородностью вертикального градиента заполняемой жидкости и измерение величины градиента плотности проводились с помощью теневого прибора ИАБ-451. Для работы с теньевым прибором в боковые стенки бассейна были вмонтированы плоскопараллельные оптические стекла диаметром 20 см и толщиной 3 см. Рабочий диапазон частот плавучести N составлял $0,3 - 1$ с⁻¹.



Фиг. 1



Фиг. 2



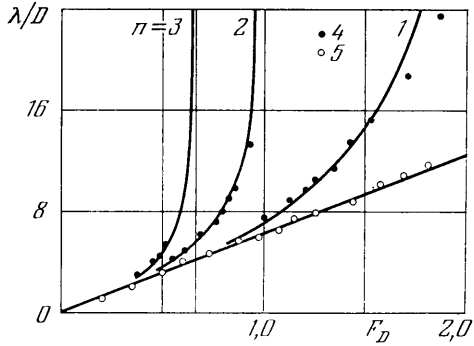
Фиг. 3

Визуализация возмущений, возникающих в однородно стратифицированной жидкости, осуществлялась методом темного поля с использованием теневого прибора. Входная щель осветительной части теневого прибора шириной 0,08 мм устанавливалась в вертикальном положении. Изображение щели, полученное в фокальной плоскости объектива приемной части прибора, перекрывалось непрозрачной вертикальной нитью шириной, равной ширине изображения щели (0,08 мм). В случае невозмущенной жидкости при перекрытии нитью изображения щели в плоскости изображения, сопряженной с передней плоскостью бассейна, наблюдается равномерно затемненное поле. При возникновении возмущений появляются светлые и

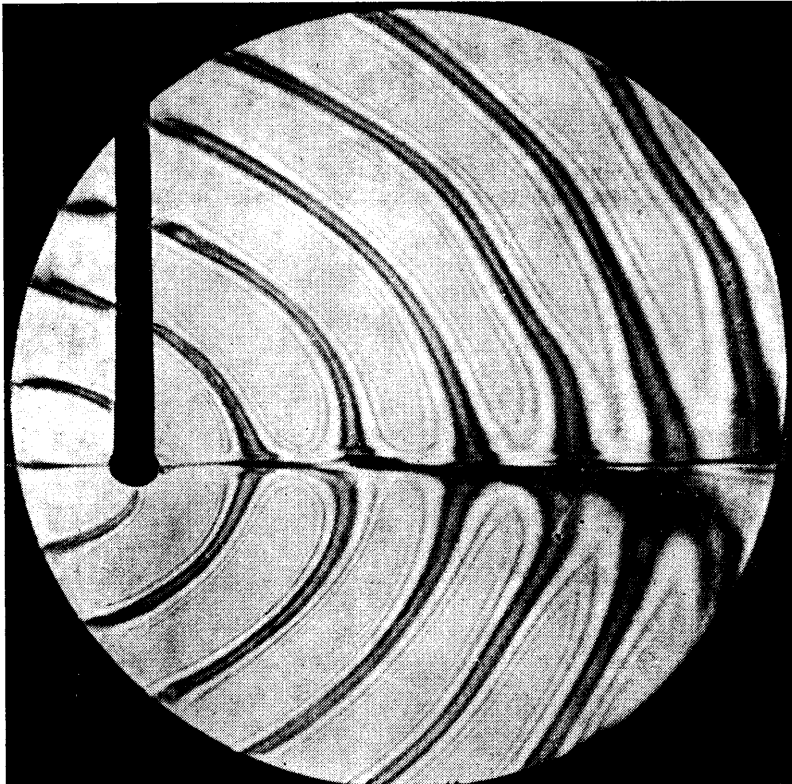
темные области. Затемненные участки соответствуют нулевому градиенту плотности вдоль горизонтальной оси (ось x).

Изучение модовой структуры внутренних волн проводилось в горизонтальных волноводах с высотой H канала от 5 до 10 см. Исследовались как каналы между двумя горизонтальными жесткими стенками, так и каналы, ограниченные снизу жесткой стенкой, а сверху свободной поверхностью жидкости. Возбуждение нормальных внутренних волн в данных каналах осуществлялось горизонтальным движением цилиндра вдоль канала. Использовались цилиндры с диаметрами от 3 до 8 мм и длиной 210 мм. При таком способе возбуждения (плоский случай) нормальная волна представляет собой гармоническую волну, распространяющуюся вдоль канала и стоячую в вертикальном направлении (ось y). Для возбуждения первой моды ($n=1$) цилиндр двигался у самой поверхности горизонтальной стенки (в узле). Типичная фотография первой моды внутренней волны в канале с $H=5$ см и частотой плавучести $N=0,82$ с $^{-1}$ при скорости цилиндра $U=0,72$ см/с показана на фиг. 1. Линии нулевого градиента (темные вертикальные полосы) одновременно являются линиями, проходящими через гребни и впадины волны, распространяющейся вдоль оси x с фазовой скоростью, равной скорости цилиндра.

На фиг. 2 показана фотография внутренней волны второй моды, возбужденной в канале с $H=6,5$ см, $N=0,82$ с $^{-1}$ цилиндром, движущимся по центру канала со скоростью $U=0,52$ см/с. Возбуждение третьей моды осуществлялось движением цилиндра вдоль одной из узловых линий канала. Фотография, показанная на фиг. 3, соответствует движению цилиндра со скоростью $U=0,35$ см/с на высоте, равной $1/3$ высоты канала ($H=7$ см, $N=0,7$ с $^{-1}$).



Фиг. 4



Фиг. 5

Для сравнения с выводами линейной теории все экспериментальные результаты были нанесены на график (фиг. 4) зависимости безразмерной длины волны λ/D (где D — диаметр цилиндра) от внутреннего числа Фруда $F_D = U/(ND)$. В данных обозначениях формула (1.7) будет иметь вид

$$\frac{\lambda_n}{D} = 2\pi \left[\frac{1}{F_D^2} - \left(\frac{n\pi D}{H} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad n=1, 2, \dots \quad (2.1)$$

На фиг. 4 теоретическая зависимость (2.1) изображена в виде семейства кривых для трех первых мод ($n=1, 2, 3$) при фиксированном значении $H/D=6,25$. Вертикальные прямые являются асимптотами данных кривых. Все экспериментальные результаты с внутренними волнами в канале изображены на фиг. 4 точками 4. Все кривые семейства $\lambda_n/D=f(F_D)$ при стремлении $F_D \rightarrow 0$ асимптотически приближаются к прямой $\lambda/D = 2\pi F_D$, изображенной на фиг. 4 наклонной прямой. Точками 5 показаны экспериментальные результаты, полученные при горизонтальном движении цилиндров в безграничной экспоненциально стратифицированной среде. На фиг. 5 показана типичная фотография фазовой картины (метод темного поля) внутренней волны, полученной при горизонтальном движении цилиндра ($D=1$ см) в безграничной экспоненциально стратифицированной жидкости ($N=0,68$ с $^{-1}$; $F_D=0,8$).

Полученные экспериментальные результаты исследования модовой структуры внутренних волн в канале показали хорошее совпадение с выводами линейной теории вдали от критических значений внутреннего числа Фруда ($F_D^* = H/(n\pi D)$). При приближении к критическому значению внутренняя волна соответствующей моды становится неустойчивой. В этом случае необходимо учитывать нелинейные эффекты и диссипацию энергии.

В заключение авторы выражают благодарность А. Т. Онуфриеву за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Long R. R. Some aspects of the flow of stratified fluids. III. Continuous density gradients. — *Tellus*, 1955, v. 7, № 3, p. 342–357.
2. Макаров С. А., Чашечкин Ю. Д. Присоединенные внутренние волны в жидкости с экспоненциальным распределением плотности. — *ПМТФ*, 1981, № 6, с. 47–54.
3. Boussinesq J. *Théorie analytique de la chaleur*. V. 2. Paris: Gauthier — Villars, 1903.
4. Лайтхилл Дж. *Волны в жидкостях*. М.: Мир, 1981. 598 с.

Москва

Поступила в редакцию
3.II.1984