

УДК 533.6.011

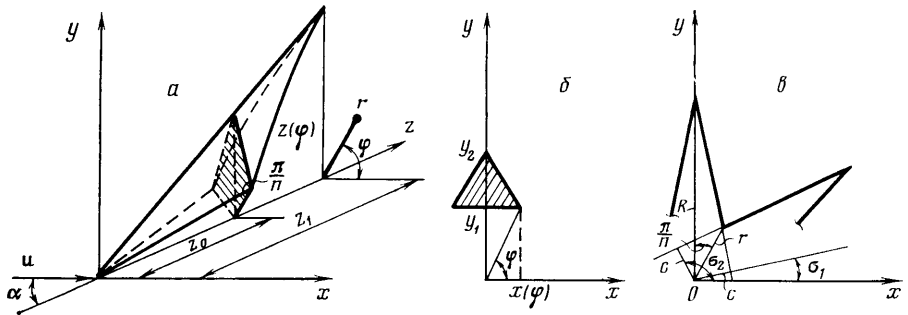
**КОНИЧЕСКИЕ ТЕЛА СО ЗВЕЗДОБРАЗНЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ  
СЕЧЕНИЕМ, ОБЛАДАЮЩИЕ ЗАПАСОМ СТАТИЧЕСКОЙ  
УСТОЙЧИВОСТИ**

**ОСТАПЕНКО Н. А.**

Приводится постановка и решение вариационной задачи о коническом теле со звездообразным поперечным сечением и плоскими гранями, обладающем максимальным запасом статической устойчивости.

**1. Запас статической устойчивости звездообразного тела. Закон подобия.** В [1, 2] экспериментально и теоретически было установлено, что однородные тела звездообразной формы с плоским донным срезом не имеют запаса статической устойчивости.

Предположим, что положительным запасом статической устойчивости будет обладать звездообразное тело, имеющее плоские грани, с некоторой формой задней кромки  $z(\varphi)$  его полуцикла. Один из  $n$  циклов такого



Фиг. 1

звездообразного тела изображен на фиг. 1, а. Штриховкой обозначено его сечение, нормальное оси  $z$ ,  $(r, \varphi, z)$  — цилиндрическая система координат,  $z_0 \leq z(\varphi) \leq z_1$ ,  $\mathbf{u}$  — вектор скорости набегающего потока, располагающийся в плоскости  $yz$  и составляющий угол  $\alpha$  с положительным направлением оси  $z$ . Для определенности пусть произвольное сечение цикла тела при  $z_0 < z < z_1$  есть треугольник (фиг. 1, б), где  $y_1$  и  $y_2$  — координаты его основания и вершины.

Вычислим запас статической устойчивости описанного выше тела, считая его однородным. При этом предположим, что течение в ударном слое таково, что задняя кромка не оказывает влияния на течение около граней тела и, следовательно, течение в целом можно считать коническим.

Пусть форма поперечного контура конического тела в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  в сечении  $z_0$  описывается функцией  $r = z_0 \rho(\varphi)$ . Тогда внешний единичный вектор  $\mathbf{n}$ , нормальный к поверхности тела, дифференциал площади конической поверхности  $ds$  и координаты центра тяжести элемента конической поверхности, где будет при-

ложена равнодействующая сил давления, действующих на элемент конической поверхности в малом интервале  $\Delta\varphi$ , для ограниченных функций  $\rho(\varphi)$  и их производной запишутся в виде [2]

$$\mathbf{n} = \{n_x, n_y, n_z\} = \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2+\rho'^2/\rho^2}} \left\{ \left( \cos \varphi + \frac{\rho'}{\rho} \sin \varphi \right), \left( \sin \varphi - \frac{\rho'}{\rho} \cos \varphi \right), -\rho \right\}$$

$$ds = \frac{1}{2} z^2(\varphi) \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi, \quad x = \frac{2}{3} z(\varphi) (\rho \cos \varphi + O(\Delta\varphi)) \quad (1.1)$$

$$y = \frac{2}{3} z(\varphi) (\rho \sin \varphi + O(\Delta\varphi)), \quad z = \frac{2}{3} z(\varphi)$$

Используя соотношения (1.1) и считая давление на поверхности тела  $p(\varphi) \geq 0$ , найдем выражения для нормальной силы  $F_y$  и момента сил  $M_x$  относительно оси  $x$

$$F_y = - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} z^2(\varphi) p(\varphi) (\rho \sin \varphi - \rho' \cos \varphi) d\varphi \quad (1.2)$$

$$M_x = - \frac{2}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} z^3(\varphi) p(\varphi) [\rho(1+\rho^2) \sin \varphi - \rho' \cos \varphi] d\varphi$$

В рассматриваемом случае грани тела со звездобразным поперечным сечением плоские, поэтому в поперечном сечении каждого полуцикла имеем прямую, описываемую уравнением

$$\rho = c / \cos(\varphi - \sigma_i) \quad (1.3)$$

где  $\sigma_i$  — углы (фиг. 1,  $\sigma$ ), которые составляют перпендикуляры, опущенные из начала координат, с длиной  $c$ , к следам граней полуциклов в плоскости  $z=1$ , с положительным направлением осью  $x$ . Индекс  $i$  изменяется от 1 до  $n$ , причем  $i=1$  для первого полуцикла поперечного контура тела справа от плоскости симметрии и увеличивается по часовой стрелке.

Для расчета давления  $p$  используем модель Ньютона. Тогда давление на каждой грани  $p_i$  будет постоянным и зависящим от  $\alpha$ ,  $c$  и  $\sigma_i$ . В общем случае это равносильно предположению, что давление на гранях тела меняется слабо, что во многих случаях справедливо при небольшом количестве циклов  $n$  звездобразного тела. Используя (1.3), из (1.2) найдем выражения для нормальной силы  $F_y$  и момента  $M_x$

$$F_y = -c \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{p_i \sin \sigma_i z^2(\varphi)}{\cos^2(\varphi - \sigma_i)} d\varphi$$

$$M_x = -\frac{2}{3} c \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{p_i z^3(\varphi)}{\cos^2(\varphi - \sigma_i)} \left[ \sin \sigma_i + c^2 \frac{\sin \varphi}{\cos^2(\varphi - \sigma_i)} \right] d\varphi \quad (1.4)$$

Поскольку интегрирование в (1.4) должно проводиться для каждого полуцикла отдельно, а функция  $z(\varphi)$  по геометрическому смыслу задачи является четной функцией аргумента  $(\varphi - \sigma_i)$  для двух соседних полуциклов, то соотношения (1.4) можно переписать в виде

$$F_y = A \int_d^f z^2 d\eta, \quad M_x = \frac{2}{3} \left[ (1+c^2) A \int_d^f z^3 d\eta + c^2 B \int_d^f z^3 \eta d\eta \right] \quad (1.5)$$

$$A = c \sum_{i=1}^n p_i \sin \sigma_i, \quad B = c \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} p_i \cos \sigma_i$$

$$d = \text{ctg} \left( \frac{\pi}{n} + \sigma_1 \right), \quad f = \text{ctg} \sigma_1$$

Новая переменная интегрирования  $\eta = \text{tg}(\varphi - \sigma_1)$  изменяется на отрезке  $[d, f]$ , что соответствует изменению переменной  $\varphi$  на отрезке  $[\pi/2 - \pi/n, \pi/2]$ . Таким образом, интегрирование на отрезке  $[-\pi/2, \pi/2]$  сведено в силу причин, указанных выше, к интегрированию на отрезке, соответствующем одному полуциклу, в данном случае первому ( $i=1$ ).

С использованием (1.5) найдем выражение для положения центра давления звездообразного тела

$$z_g \equiv \frac{M_x}{F_y} = \frac{2}{3} \left[ (1+c^2) \int_d^f z^3 d\eta + c^2 \frac{B}{A} \int_d^f z^3 \eta d\eta \right] / \left( \int_d^f z^2 d\eta \right) \quad (1.6)$$

Вычислим положение центра тяжести части тела, соответствующей значениям  $z \geq z_0$  (фиг. 1, а). Выбрав в качестве переменной интегрирования угол  $\varphi$  (см. фиг. 1, б) и учитывая, что

$$y_1 = cz(\varphi) \sin \varphi / \cos(\varphi - \sigma_1), \quad y_2 = cz(\varphi) / \sin \sigma_1 \quad \text{и} \quad x(\varphi) = y_1 \text{ctg} \varphi,$$

найдем выражение для дифференциала объема

$$dv = c^2 \text{ctg} \sigma_1 \frac{z^2(\varphi) z'(\varphi) \cos^2 \varphi}{\cos^2(\varphi - \sigma_1)} d\varphi$$

Тогда, проведя необходимые вычисления, для положения центра тяжести указанной части тела получим

$$z_T = \frac{3}{4} \left[ z_0^4 + D \int_d^f z^4 (f - \eta) d\eta \right] / \left[ z_0^3 + D \int_d^f z^3 (f - \eta) d\eta \right] \quad (1.7)$$

$$D = 2 \sin^2 \sigma_1 \frac{\sin^2(\pi/n + \sigma_1)}{\sin^2(\pi/n)}$$

Так как объем и координата центра тяжести части тела для  $0 \leq z \leq z_0$  равны  $V_1 = \frac{1}{3} n r R z_0^3 \sin(\pi/n)$ ,  $z_{T_1} = \frac{3}{4} z_0$ , где  $r$  и  $R$  — соответственно наименьшее и наибольшее значения функции  $\rho(\varphi)$  (1.3) (см. фиг. 1, в), то для положения центра тяжести звездообразного тела будет справедливо выражение (1.7), при

$$D = E = 2 \frac{\sin \sigma_1 \cos \sigma_1}{\sin(\pi/n) \cos(\pi/n)} \sin^2 \left( \frac{\pi}{n} + \sigma_1 \right) \quad (1.8)$$

Используя соотношения (1.6)–(1.8) и вводя новую переменную  $w$ , найдем запас статической устойчивости тела

$$w = \frac{1}{\gamma} (f - \eta), \quad w \in [0, 1]$$

$$\gamma = \frac{\sin(\pi/n)}{\sin \sigma_1 \sin(\pi/n + \sigma_1)}$$

$$z_v \equiv z_g - z_T = \frac{2}{3} \left[ (1+c^2) \int_0^1 z^3 dw + c^2 \frac{B}{A} \int_0^1 z^3 (f - \gamma w) dw \right] / \left( \int_0^1 z^2 dw \right) -$$

$$- \frac{3}{4} \left[ z_0^4 + \frac{2}{m} \int_0^1 z^4 w dw \right] / \left[ z_0^3 + \frac{2}{m} \int_0^1 z^3 w dw \right], \quad m = \frac{\text{tg} \sigma_1}{\text{tg}(\pi/n)} \quad (1.9)$$

Здесь принято, что  $z_y$ ,  $z_0$  и  $z$  отнесены к единичной длине исходного тела с плоским донным срезом, имеющего объем  $V = \frac{1}{3}nrR \sin(\pi/n)$  и площадь миделевого сечения  $S_M = nrR \sin(\pi/n)$ .

Из выражения (1.9) для запаса статической устойчивости следует, что через величины  $A$  и  $B$  он зависит от условий обтекания тела. Если же отбросить члены, содержащие  $c^2$  ( $c = r \sin(\pi/n + \sigma_1) = R \sin \sigma_1$ ), что соответствует приближению тонкого тела  $R^2 \ll 1$ , то запас статической устойчивости будет функцией лишь параметров геометрии поперечного сечения звездообразного тела  $n$  и  $\sigma_1$ , а также формы задней кромки  $z(w)$

$$z_y = \frac{2}{3} \left( \int_0^1 z^3 dw \right) / \left( \int_0^1 z^2 dw \right) - \frac{3}{4} \left( z_0^4 + \frac{2}{m} \int_0^1 z^4 w dw \right) / \left( z_0^3 + \frac{2}{m} \int_0^1 z^3 w dw \right) \quad (1.10)$$

Установленное свойство запаса статической устойчивости тонких тел позволяет поставить вариационную задачу о поиске формы задней кромки  $z(w)$  звездообразного тела, обеспечивающей максимальный запас статической устойчивости. В качестве изопериметрических условий могут быть выбраны условия сохранения площади миделевого сечения и объема тела, которые соответственно имеют вид

$$\int_0^1 z^2 dw = 1 \quad (1.11)$$

$$z_0^3 + \frac{2}{m} \int_0^1 z^3 w dw = \frac{1+m}{m} \quad (1.12)$$

Из (1.10)–(1.12) следует, что форма задней кромки  $z(w)$ , полученная в результате решения вариационной задачи — поиска максимума запаса статической устойчивости (1.10) с изопериметрическими условиями (1.11) и (1.12), как и запас статической устойчивости тонкого тела со звездообразным поперечным сечением, будет зависеть лишь от  $m$  — комплекса параметров, характеризующих форму поперечного сечения тела. Таким образом, параметр  $m$  в данной задаче является параметром подобия.

Не приводя соответствующих выкладок, заметим, что полученные ниже в приближении тонкого тела результаты останутся справедливыми и для несимметричного обтекания звездообразного тела. В этом случае в выражениях (1.2) вместо  $F_y$  и  $M_x$  имели бы место нормальная сила  $F_N = (F_x^2 + F_y^2)^{1/2}$  и поперечный момент  $M = (M_x^2 + M_y^2)^{1/2}$ . При этом продольный момент  $|M_z| \ll R^2$ .

**2. Запас статической устойчивости звездообразного тела со скошенной задней кромкой.** Рассмотрим возможность получения положительного запаса статической устойчивости у звездообразного тела путем простого скоса задней кромки. При этом ее форму можно задать в виде

$$z = z_1 / [1 + (k-1)w] \quad (2.1)$$

В (2.1)  $k = z_1/z_0 \geq 1$ , где  $z_1$  соответствует значению функций  $z$  при  $w=0$  ( $\varphi = \pi/2$ ).

Заметим, что при форме задней кромки (2.1) не удастся одновременно удовлетворить двум изопериметрическим условиям (1.11) и (1.12). Рассмотрим случай, когда задан объем звездообразного тела. Тогда для запаса статической устойчивости (1.10) получим выражение

$$z_y = \frac{2}{3} \left( \int_0^1 z^3 dw \right) / \left( \int_0^1 z^2 dw \right) - \frac{3}{4(1+m)} \left( m z_0^4 + 2 \int_0^1 z^4 w dw \right) \quad (2.2)$$

Подставляя в (2.2) и (1.12) связь (2.1), получим соотношения для  $z_y$  и  $z_1$  в зависимости от параметра  $k$ , характеризующего скос задней кромки

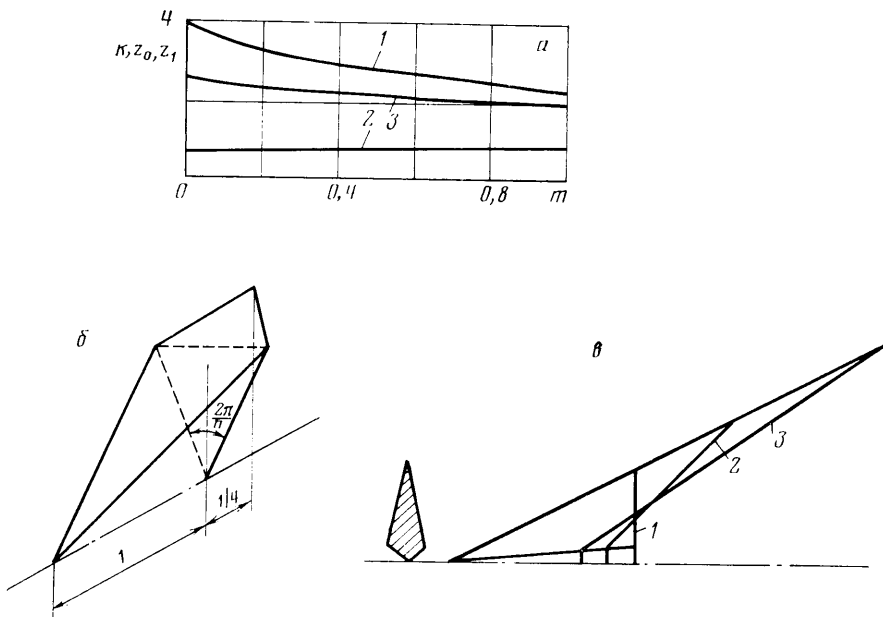
$$z_y = \frac{1}{12(k+m)} \left( \frac{1+m}{k+m} \right)^{1/2} [k^2 - 2(1-2m)k - 5m] \quad (2.3)$$

$$z_1 = k_1 \left( \frac{1+m}{k+m} \right)^{1/2}$$

Нулевой запас статической устойчивости у звездообразного тела будет при

$$k = \sqrt{4m^2 + m + 1} + 1 - 2m \quad (2.4)$$

Интересно отметить, что при  $m \rightarrow \infty$  ( $\sigma_1 \rightarrow \pi/2$ , либо  $n \rightarrow \infty$ ) из (2.4) имеем  $k = 1,25 + O(1/m)$ , а пирамидальные тела, обладающие нулевым запасом статической устойчивости, приобретают пристыкованные за донным срезом и являющиеся продолже-



Фиг. 2

ниями боковых граней тела треугольные вырезки из плоскостей, имеющие длину по оси  $z$ , равную  $1/4$  от длины тела. Пример цикла такого тела приведен на фиг. 2, б для  $\sigma_1 = \pi/2$  и некоторого произвольного количества циклов.

На фиг. 2, а представлены зависимости  $k$ ,  $z_0$  и  $z_1$  (соответственно кривые 1-3), когда запас статической устойчивости тела со звездообразным поперечным сечением равен 10%. На фиг. 2, в приведены формы цикла звездообразного тела в проекции на плоскость  $x=0$  для  $m=0,2$  и  $n=4$ . Контуры 1, 2 и 3 соответствуют исходному звездообразному телу, а также телам с нулевым и 10%-ным запасами статической устойчивости. Слева на фиг. 2, в изображено миделево сечение цикла исходного звездообразного тела.

Как следует из (2.3), запас статической устойчивости тела со звездообразным поперечным сечением может быть сделан сколь угодно большим за счет увеличения параметра  $k$  при  $m = \text{const}$ . Следовательно, максимальное значение запаса статической устойчивости при изопериметрических условиях (1.11), (1.12) будет достигаться при  $k = \infty$ , что не представляет практического интереса. Поэтому при решении вариационной задачи о теле, обладающем максимальным запасом статической устойчивости, необходимо длину оптимального тела  $z_1$  считать заданной.

Заметим также, что, как показал анализ, вариационная задача в классе экстремалей, доставляемых уравнением Эйлера, при одновременном учете двух изопериметрических условий (1.11) и (1.12) имеет лишь тривиальное решение  $z=1$ . В связи с этим ниже соответствующие задачи будут рассмотрены отдельно.

**3. Вариационная задача о звездообразном теле с максимальным запасом статической устойчивости при заданном объеме. Найдем оптималь-**

ную форму задней кромки  $z(w)$  тела со звездообразным поперечным сечением при условии, что его объем сохраняется (1.12). Допустим также, что функция  $z(w)$  в окрестности концов отрезка  $[0, 1]$  изменения переменной  $w$  может иметь постоянные значения, что соответствует наличию у оптимального тела торцов  $z=z_0$  при  $w \in [w_0, 1]$  и  $z=z_1$  при  $w \in [0, w_1]$ . В этом случае выражение для объема тела (1.12) переписывается в виде

$$z_0^3 \left( 1 + \frac{1-w_0^2}{m} \right) + \frac{w_1^2}{m} z_1^2 + \frac{2}{m} \int_{w_1}^{w_0} z^3 w dw = \frac{1+m}{m} \quad (3.1)$$

Максимизируемый функционал имеет вид

$$I = \left[ \int_{w_1}^{w_0} z^3 dw + z_1^3 w_1 + z_0^3 (1-w_0) \right] / \left[ \int_{w_1}^{w_0} z^2 dw + z_1^2 w_1 + z_0^2 (1-w_0) \right] - \frac{9}{8(1+m)} \left[ z_0^3 (z_0 + \lambda) (1+m-w_0^2) + w_1^2 z_1^3 (z_1 + \lambda) + 2 \int_{w_1}^{w_0} z^3 (z + \lambda) w dw \right] \quad (3.2)$$

Здесь  $\lambda$  — неопределенный постоянный множитель Лагранжа.

Вариационная задача формулируется следующим образом: найти функцию  $z(w)$ , доставляющую максимум функционалу (3.2) и удовлетворяющую условию (3.1) при заданном значении  $z_1 = z(w_1) > 1$ .

Уравнение Эйлера запишется в виде

$$\frac{3a}{1+m} w z^2 - \left( 1 - \frac{9a}{4(1+m)} \lambda w \right) z + z_g = 0 \quad (3.3)$$

$$a = \int_{w_1}^{w_0} z^2 dw + z_1^2 w_1 + z_0^2 (1-w_0) \quad (3.4)$$

Поскольку координата центра давления  $z_g$  тела, обладающего положительным запасом статической устойчивости, сдвигается назад, то должно существовать некоторое значение  $w = w_g$ , при котором  $z = z_g$ . Тогда из уравнения (3.3) легко найти, что  $\lambda = -4/3 z_g$ , а само уравнение имеет два решения

$$z = z_g, \quad z = (1+m)/3aw \quad (3.5)$$

Из структуры второго решения (3.5) следует, что внутри интервала  $(w_1, w_0)$  не может существовать отрезка с длиной, отличной от нуля, где  $z = z_g$ . Таким образом, на интервале  $(w_1, w_0)$  экстремаль  $z(w)$  не содержит точек излома.

Подставляя второе из найденных решений (3.5) уравнения Эйлера в (3.1) и (3.4) и исключая  $a$ , найдем

$$z_0^3 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4/3(1+m)(k-1)}}{2\sqrt{1 + 4/3(1+m)(k-1)}} \quad (3.6)$$

Концы отрезка  $[w_1, w_0]$  будут определяться по формулам

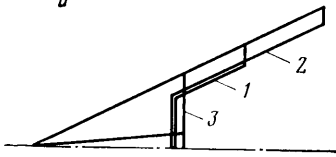
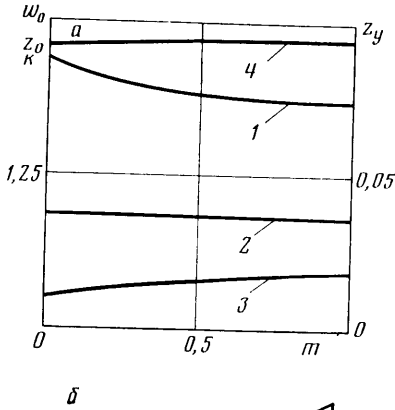
$$w_1 = w_0 k, \quad w_0 = \frac{(1+m)}{3z_0^3} (2z_0^3 - 1) \quad (3.7)$$

Из выражений (3.6) и (3.7) следует, что  $z_0 > 1/\sqrt[3]{2}$ , когда  $k < \infty$ ;  $w_0 \leq (1+m)/3$ ; и при любых конечных  $k > 1$  цикл оптимального тела имеет два торца:  $z = z_0$  и  $z = k z_0$ . Кроме того, задание  $z_1$  (или, что то же,  $k$ ) определяет величину  $z_0$ .

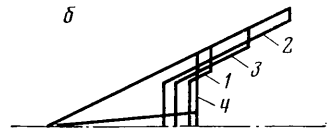
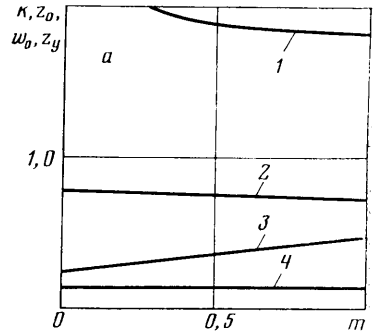
Используя найденное решение, нетрудно получить выражение для запаса статической устойчивости

$$z_v = \sqrt[4]{1/12 z_0 [z_0^3 (1-6k) + 2(3k-1)]}$$

На фиг. 3, а приведены зависимости  $k$ ,  $z_0$  и  $w_0$  (соответственно кривые 1-3) для случая  $z_0 = z_g$ , когда центр давления располагается в сечении  $z = z_0$ ,  $m = (3k-2)/(k-1)^3 - 1$ . Там же представлена зависимость  $z_v(m)$  при  $z_0 = z_g$  (кривая 4). На фиг. 3, б приведены проекции контура цикла оптимального звездообразного тела на плоскость  $x=0$  для  $m=0,2$ ,  $n=4$



Фиг. 3



Фиг. 4

в случаях  $z_v=0(1)$  и  $z_0=z_g(2)$ , когда запас статической устойчивости  $z_v=9,3\%$ . Контур 3 — донный срез исходного звездообразного тела.

Отметим, что второму решению (3.5) уравнения Эйлера соответствует прямая, являющаяся линией пересечения грани звездообразного тела и плоскости

$$x = \frac{(2z_0^3 - 1)}{3z_0^2} \frac{r \sin(\pi/n)}{1 - (r/R) \cos(\pi/n)}$$

Координата  $y$  точек экстремали определяется по формуле

$$y = R \left( 1 - \frac{w}{1+m} \right) z(w)$$

**4. Вариационная задача о звездообразном теле с максимальным запасом устойчивости при заданной площади миделевого сечения.** Найдем оптимальную форму задней кромки звездообразного тела при условии, что сохраняется площадь его миделевого сечения (1.11). Как и в п. 3, предположим, что экстремаль  $z(w)$  в окрестности концов интервала  $(0, 1)$  может иметь постоянные значения. В этом случае максимизируемый функционал запишется в виде

$$I = \int_{w_1}^{w_0} z^2(z+\lambda) dw + z_1^2(z_1+\lambda)w_1 + z_0^2(z_0+\lambda)(1-w_0) - \frac{9}{8} \left[ z_0^4(1+m-w_0^2) + z_1^4w_1^2 + 2 \int_{w_1}^{w_0} z^4 w dw \right] /$$

$$\left/ \left[ z_0^3(1+m-w_0^2) + z_1^3 w_1^2 + 2 \int_{w_1}^{w_0} z^3 w dw \right] \right. \quad (4.1)$$

Здесь  $\lambda$  — неопределенный постоянный множитель Лагранжа.

Вариационная задача формулируется следующим образом: найти функцию  $z(w)$ , доставляющую максимум функционалу (4.1) и удовлетворяющую условию

$$\int_{w_1}^{w_0} z^2 dw + z_1^2 w_1 + z_0^2(1-w_0) = 1 \quad (4.2)$$

при заданном значении  $z_1 > 1$ .

Уравнение Эйлера запишется в виде

$$3wz^2 - (b + 3z_T w)z - \frac{2}{3} b\lambda = 0 \quad (4.3)$$

$$b = z_0^3(1+m-w_0^2) + z_1^3 w_1^2 + 2 \int_{w_1}^{w_0} z^3 w dw \quad (4.4)$$

Увеличение величины  $z_1$  приводит к увеличению запаса статической устойчивости. При этом положение центра тяжести тела  $z_T$  смещается назад и, начиная с некоторых значений  $z_1$ , должно существовать значение  $w = w_T$ , при котором  $z = z_T$ . Тогда из уравнения (4.3) найдем  $\lambda = -^3/2 z_T$ , а также два его решения

$$z = z_T, \quad z = b/3w \quad (4.5)$$

Форма второго из решений (4.5) не допускает наличия на интервале  $(w_1, w_0)$  точек излома экстремали. Подставляя решение уравнения Эйлера в соотношения (4.2) и (4.4) и исключая  $b$ , найдем

$$z_0^4 = [1 + ^4/3(1+m)(k-1)]^{-1}$$

$$b = \frac{2(1+m)z_0^3}{(1+z_0^2)}, \quad w_0 = \frac{2(1+m)z_0^2}{3(1+z_0^2)}, \quad w_1 = \frac{w_0}{k} \quad (4.6)$$

Задание координаты  $z_1$  (параметра  $k$ ) при известной форме поперечного сечения исходного звездообразного тела, определяющей величину параметра подобия  $m$ , позволяет вычислить по (4.6) и координату  $z_0$ . Таким образом, найдено замкнутое решение задачи.

Заметим, что полученное решение может быть распространено и на случай  $z_T < z_0$ , как это имело место в п. 3 при  $z_g < z_0$ . Это связано с тем, что коэффициенты при вариациях  $\delta w_0$  и  $\delta w_1$  в соответствующих членах полной вариации функционала (4.1) тождественно равны нулю, а уравнение для коэффициента при вариации  $\delta z_0$  не имеет приемлемых решений. Поэтому при  $z_T < z_0$  условия (4.2) будет недостаточно для определения неизвестных констант  $z_0$  и  $\lambda$ .

Используя найденное решение, получим выражение для запаса статической устойчивости оптимального звездообразного тела с заданной площадью миделевого сечения

$$z_v = \frac{z_0}{8} \left[ 1 + \frac{3}{4(1+m)} \frac{(1-z_0^2)(1-z_0^4)}{z_0^4} + \frac{5}{12} z_0^2(3-7z_0^4) \right]$$

На фиг. 4, а приведены зависимости  $k$ ,  $z_0$  и  $w_0$  (кривые 1-3) для  $z_0 = z_g$ , когда имеет место та же связь между параметрами  $m$  и  $k$ , что и в соответствующем случае в п. 3. Кривая 4 определяет величину запаса статической устойчивости тела при  $z_0 = z_g$ . На фиг. 4, б представлены проекции контура цикла оптимального звездообразного тела на плоскость  $x=0$  для  $m=0,2$ ,



$n=4$  в случаях  $z_y=0$  (1),  $z_0=z_g$  (2), когда запас статической устойчивости  $z_y=15\%$  и  $z_y=10\%$  (3). Контур 4 — донный срез исходного тела.

Из результатов двух задач (п. 3 и 4) следует, что в случае оптимального звездообразного тела с заданной площадью миделевого сечения те же запасы статической устойчивости достигаются при меньших значениях параметра  $k$  (см. фиг. 3, б и 4, б). Это связано с тем, что при построении оптимального тела с заданным объемом, обладающего определенным запасом статической устойчивости, увеличение параметра  $k$ , приводящее к смещению назад центра давления, приводит к значительно большему смещению назад центра тяжести, чем в случае тела с заданной площадью миделевого сечения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гонор А. Л., Зубин М. А., Остапенко Н. А. Экспериментальное исследование аэродинамических характеристик звездообразных тел при сверхзвуковых скоростях.— В кн.: Неравновесные течения газа и оптимальные формы тел в сверхзвуковом потоке. М.: Изд-во МГУ, 1978, с. 28—39.
2. Остапенко Н. А. О центре давления конических тел.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 1, с. 99—104.

Москва  
Институт механики МГУ

Поступила в редакцию  
20.II.1984