

УДК 532.593

РАЗВИТИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ВОЛН В ПОТОКЕ НЕПРЕРЫВНО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ, ГЕНЕРИРУЕМЫХ ВОЗМУЩЕНИЯМИ ПЕРЕМЕННОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ

ДОЦЕНКО С. Ф., САВОСЬКИН В. М.

В линейной постановке проводится анализ пространственной структуры неустойчивых волн, создаваемых в потоке непрерывно стратифицированной жидкости областью гармонических по времени давлений. Впервые пространственная задача о генерации поверхностных волн движущимся вибратором рассмотрена в работе [1] для жидкости, занимающей полупространство. Это исследование получило дальнейшее развитие в работах [2-7].

Для безграничных равномерно стратифицированных сред исследование волновых фронтов, соответствующих движущемуся вибратору, выполнено в работе [8]. Предложенная в ней оригинальная методика в дальнейшем использовалась при решении более общих задач о волнах, возбуждаемых в безграничных средах генераторами переменной интенсивности (см. [9, 10] и библиографии этих работ).

Для слоя непрерывно стратифицированной жидкости общая процедура асимптотического анализа пространственных волн, генерируемых движущимися возмущениями переменной интенсивности, предложена в работах [11, 12]. Неустойчившиеся плоские внутренние волны исследовались в [13].

1. Пусть горизонтальный поток идеальной несжимаемой жидкости, занимающий часть пространства $-\infty < x, y < +\infty, -H \leq z \leq 0$, течет со скоростью U в положительном направлении оси x ($H, U = \text{const} > 0$). Плотность жидкости в невозмущенном состоянии ρ_0 является гладкой функцией координаты z (ось z направлена вертикально вверх), причем распределение плотности $\rho_0(z)$ гидростатически устойчиво ($\rho_0'(z) < 0$).

Исследуем волны, вызываемые давлением $p_0 = f(x, y) \exp(-i\sigma_0 t)$, $\sigma_0 > 0$, прикладываемым в момент времени $t=0$ к свободной поверхности первоначально невозмущенного потока. Предполагается, что $f \rightarrow 0$ достаточно быстро при $x, y \rightarrow \infty$.

В рамках линейной теории движение жидкости описывается следующей начально-краевой задачей:

$$\begin{aligned} Du &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(p+p_0)}{\partial x}, & Dv &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(p+p_0)}{\partial y} \\ Dw &= -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \right), & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, & D\rho - \frac{d\rho_0}{dz} w &= 0 \\ p - \rho_1 g \xi &= 0, & D\xi &= w \quad (z=0), & w &= 0 \quad (z=-H) \\ u=v=w=\rho=\xi &= 0 \quad (t \leq 0) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь $D = \partial/\partial t + U\partial/\partial x$, u, v, w, p, ρ — динамические возмущения горизонтальных и вертикального компонентов вектора скорости, давления и плотности, ξ — смещение свободной поверхности, $\rho_1 = \rho_0(0)$, g — ускорение свободного падения.

С помощью преобразований Фурье по x, y и Лапласа по t для трансформанты Фурье — Лапласа $W(m, n, z, \alpha)$ функции $w(x, y, z, t)$ из (1.1)

получаем краевую задачу

$$L(r^2, \beta^2)W=0 \quad (-H \leq z \leq 0) \quad (1.2)$$

$$L_1(r^2, \beta^2)W = -\frac{r^2 P(m, n)}{(\alpha + i\sigma_0)\beta\rho_1} \quad (z=0), \quad W=0 \quad (z=-H) \quad (1.3)$$

$$L = \frac{d}{dz} \left(\rho_0 \frac{d}{dz} \right) - r^2 \left(\frac{N^2}{\beta^2} + 1 \right), \quad L_1 = \frac{d}{dz} + \frac{gr^2}{\beta^2}$$

Здесь $\beta = \alpha + imU$, P — преобразование Фурье функции f , $N = (-g\rho_0^{-1}d\rho_0/dz)^{1/2}$ — частота Брента — Вайсяля, $r = (m^2 + n^2)^{1/2}$.

Обозначим через $\Phi = \Phi(r^2, z, \beta^2)$ решение уравнения (1.2), удовлетворяющее условиям $\Phi=0$, $\Phi_z \neq 0$ при $z=-H$. Положим $W=A\Phi$ и определим A из граничного условия (1.3). Применяя соответствующие обратные интегральные преобразования, находим

$$w = \frac{1}{4\pi^2\rho_1} \iint_{-\infty}^{+\infty} r^2 P(m, n) I(r, z, t) e^{i(mx+ny)} dm dn \quad (1.4)$$

$$I = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty} \frac{\Phi(r^2, z, \beta^2) e^{\alpha t}}{(\alpha + i\sigma_0)\beta\Delta(r^2, \beta^2)} d\alpha, \quad \tau > 0 \quad (1.5)$$

$$\Delta = L_1\Phi(r^2, 0, \beta^2)$$

Вычисление интеграла (1.5) с использованием теории вычетов и дальнейшие преобразования выражения (1.4) выполняются аналогично работе [13]. Интегральное представление для w в полярных координатах принимает вид

$$w = e^{-i\sigma_0 t} \sum_{j=1}^{\infty} w_j, \quad w_j = \sum_{s=1}^2 w_{sj} \quad (1.6)$$

$$w_{sj} = -\frac{t}{8\pi^2\rho_1} \int_0^{\infty} dr \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^1 r^3 P F_j e^{i\psi_{sj}} d\xi \quad (1.7)$$

$$F_j = \frac{\Phi_j}{\lambda_j \Delta_j}, \quad \Delta_j = \frac{\partial \Delta(r^2, -\lambda)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_j}, \quad \Phi_j = \Phi(r^2, z, -\lambda_j)$$

$$\Psi_{sj} = Rr \cos(\theta - \gamma) - t[rU \cos \theta - \sigma_0 + (-1)^s \sigma_j] \xi, \quad \lambda_j = \sigma_j^2$$

$$\{x; y\} = R\{\cos \gamma; \sin \gamma\}, \quad \{m; n\} = r\{\cos \theta; \sin \theta\}$$

Выражение (1.6) представляет собой разложение поля w в ряд по собственным функциям F_j краевой задачи $LF=0$, $L_1F=0$ ($z=0$), $F=0$ ($z=-H$). Им соответствуют занумерованные в порядке убывания дисперсионные зависимости $\sigma = \sigma_j(r) \geq 0$ ($r \geq 0$) для поверхностных ($j=1$) и внутренних ($j \geq 2$) волн в непрерывно стратифицированной жидкости при отсутствии потока.

2. Проведем асимптотический анализ волновых полей w_j при $R, t \rightarrow \infty$, $R/t = O(1)$, считая функцию f четной по y . В силу последнего предположения $w_j(x, y, z, t) = w_j(x, -y, z, t)$. Это позволяет ограничиться анализом w_j при $0 \leq \gamma \leq \pi$.

Применим к интегралам (1.7) метод стационарной фазы в многомерном случае. Возможные стационарные точки (r, θ, ξ) фазовых функций

Ψ_{sj} удовлетворяют системе трех уравнений

$$R \cos(\theta - \gamma) - t[U \cos \theta - (-1)^s \sigma_j'(r)] \xi = 0 \quad (2.1)$$

$$R \sin(\theta - \gamma) - tU \sin \theta \xi = 0 \quad (2.2)$$

$$\cos \theta = \tau_{sj}(r), \quad \tau_{sj} = [\sigma_0 - (-1)^s \sigma_j(r)] / (rU) \quad (2.3)$$

и условиям $0 \leq r < \infty$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \xi \leq 1$, где штрих означает производную по r .

Пусть $I_{sj} = \{r: |\tau_{sj}(r)| \leq 1\}$. При $r \in I_{sj}$ из (2.1)–(2.3) находим

$$\theta = (-1)^k \arccos \tau_{sj}, \quad \xi = \frac{R \cos \gamma}{Ut \varphi_{sj}}, \quad \varphi_{sj} = 1 - \tau_{sj}(r \tau_{sj})' \quad (2.4)$$

$$\operatorname{tg} \gamma = (-1)^{k+1} \chi_{sj}(r), \quad \chi_{sj} = \frac{(r \tau_{sj})' \sqrt{1 - \tau_{sj}^2}}{\varphi_{sj}} \quad (k=1, 2) \quad (2.5)$$

Из уравнения (2.5) определяется $r = r(\gamma)$; соответствующие значения θ и ξ находятся по формулам (2.4). Условие $0 \leq \xi \leq 1$ накладывает ограничения на возможные значения R/t и записывается в форме

$$0 \leq \frac{R \cos \gamma}{Ut \varphi_{sj}} \leq 1, \quad r \in I_{sj} \quad (2.6)$$

Стационарная точка (r, θ, ξ) является простой, если $\chi_{sj}'(r) \neq 0$. Для каждой простой стационарной точки

$$w_{sj} \sim \frac{1}{\sqrt{R}} A_{sj}(z, \gamma) e^{i\theta_{sj}}, \quad (x, y) \in G_t, \quad R, t \rightarrow \infty \quad (2.7)$$

$$\theta_{sj} = [\tau_{sj} \cos \gamma + (-1)^{k+1} \sqrt{1 - \tau_{sj}^2} \sin \gamma] + \delta_{sj} \frac{\pi}{4} \quad (2.8)$$

где A_{sj} — известные функции, конкретная запись которых в дальнейшем не используется, $\delta_{sj} = \pm 1, \pm 3$, G_t — части плоскости xy , для которых выполняются условия (2.6). На лучах γ , соответствующих кратным ($\chi_{sj}' = 0$) стационарным точкам, $w_{sj} = O(R^{-q})$, $0 < q < 1/2$, причем при переходе по r через такую точку δ_{sj} изменяется на ± 2 .

Установим ряд общих свойств волновых полей w_{sj} , вытекающих из анализа уравнений (2.5). При исследовании поведения функций χ_{sj} использованы следующие свойства [14] дисперсионных зависимостей для волн в слое непрерывно стратифицированной жидкости:

$$0 < \sigma_j'(r) < r^{-1} \sigma_j(r) < U_j = \sigma_j'(0), (r^{-1} \sigma_j)' < 0 \quad (r > 0, j \geq 1) \quad (2.9)$$

$$\sigma_1 \sim \sqrt{gr}, \quad \sigma_j \rightarrow N^+ = \max_z N \quad (r \rightarrow \infty, j \geq 2)$$

Предварительно заметим, что для совместности уравнений (2.5) и равенств (2.6) необходимо выполнение равенства $k=s$.

В дальнейшем ограничимся анализом пространственных внутренних волн ($j \geq 2$), поскольку влияние неоднородности жидкости на поверхностные волны мало и их анализ содержится в работах [1–7].

1. $s=1$, $U>0$, $\sigma_0>0$. В силу (2.9) имеем $\tau_{1j}>0$, $\tau_{1j}'<0$, $\tau_{1j}(0)=\infty$, $\tau_{1j}(\infty)=0$, $\varphi_{1j}>0$. Поэтому $I_{1j}=[r_{1j}, \infty)$, $\chi_{1j}>0$ ($r>r_{1j}$), $\chi_{1j}(r_{1j})=\chi_{1j}(\infty)=0$, $\chi_{1j}^+ = \max_{r>r_{1j}} \chi_{1j} < \infty$, где $r=r_{1j}$ — единственный корень уравнения $\tau_{1j}(r)=1$.

Таким образом, основные волновые возмущения, соответствующие w_{1j} , формируются не менее чем из двух систем волн, которые сосредоточены в клиновидной области $|\gamma| \leq \gamma_{1j}$ вниз по потоку; $\gamma_{1j} = \arctg \chi_{1j}^+ < \pi/2$. Случай $\gamma_{1j} = \pi/2$ реализуется только при $U=U_j$, $\sigma_0=0$ [15].

2. $s=2$, $U>0$, $\sigma_0>N^+$. В этом случае $\tau_{2j}>0$, $\tau_{2j}'<0$, $\tau_{2j}(0)=\infty$, $\tau_{2j}(\infty)=0$, $\varphi_{2j}>0$. Поэтому $I_{2j}=[r_{2j}, \infty)$, $\chi_{2j}<0$ ($r>r_{2j}$), $\chi_{2j}(r_{2j})=\chi_{2j}(\infty)=0$, $\chi_{2j}^+=-\min_{r\geq r_{2j}} \chi_{2j}<\infty$, где $r=r_{2j}$ — единственный корень уравнения $\tau_{2j}(r)=1$.

Следовательно, волновое поле w_{2j} формируется не менее чем из двух систем волн, которые локализованы в угловой области $|\gamma|\leq\gamma_{2j}$ вниз по потоку; $\gamma_{2j}=\arctg \chi_{2j}^+<\pi/2$.

Для диапазона частот $\sigma_0<N^+$ введем величины

$$U_{1j}=\max_{r>r_j}\left(\frac{\sigma_j-\sigma_0}{r}\right), \quad U_{2j}=\max_{r>r_j}\left[\frac{(\sigma_j-\sigma_0)}{r}\sigma_j'\right]^{1/2} \quad (2.10)$$

где $r=r_j$ — единственный нуль функции τ_{2j} .

Привлекая (2.9) и равенство $\sigma_j'=r^{-1}(\sigma_j-\sigma_0)$, выполняющееся в экстремумах функций τ_{2j} , легко установить справедливость неравенств $U_{1j}\leq U_{2j}<U_j$. Для любой плотностной стратификации $U_{1j}<U_{2j}$ при $\sigma_0\ll N^+$.

3. $s=2$, $U>U_{2j}$, $\sigma_0<N^+$. Используя (2.9), (2.10), выводим неравенства

$$1\geq\tau_{2j}\geq-\frac{U_{2j}}{U}>-1, \quad \varphi_{2j}\geq 1-\frac{U_{2j}^2}{U^2}>0 \quad (r\geq r_{2j})$$

Тогда $I_{2j}=[r_{2j}, \infty)$, $\chi_{2j}<0$, ($r>r_{2j}$), $\chi_{2j}(r_{2j})=\chi_{2j}(\infty)=0$, $\chi_{2j}^+<\infty$. Поэтому, как и ранее, волновое поле w_{2j} является суперпозицией не менее двух систем волн, имеющих наибольшие амплитуды в угловой области $|\gamma|\leq\gamma_{2j}<\pi/2$ вниз по потоку.

4. $s=2$, $U_{1j}<U<U_{2j}$, $\sigma_0<N^+$. Пусть $r=r_0$ — точка максимума функции $r^{-1}(\sigma_j-\sigma_0)\sigma_j'$; $r_0>r_j$. Тогда

$$1\geq\tau_{2j}\geq-\frac{U_{1j}}{U}>-1 \quad (r\geq r_{2j}), \quad I_{2j}=[r_{2j}, \infty)$$

$$\varphi_{2j}(r_j)=1, \quad \varphi_{2j}(r_0)=1-\frac{U_{2j}^2}{U^2}<0$$

Поэтому функция φ_{2j} принимает нулевое значение, а χ_{2j} меняет свой знак на отрезке (r_j, r_0) .

Следовательно, волны с амплитудами $O(R^{-1/2})$, соответствующие w_{2j} , при указанных значениях параметров существуют в области $|\gamma|\leq\gamma_{2j}$, причем $\pi/2<\gamma_{2j}<\pi$. Образование волн в полуплоскости $x<0$ обусловлено изменением внешних давлений p_0 со временем.

5. $s=2$, $U<U_{1j}$, $\sigma_0<N^+$. Введем точку $r=r_1$ максимума функции $r^{-1}(\sigma_j-\sigma_0)$. Тогда $\tau_{2j}(r_{2j})=1$, $\tau_{2j}(r_1)=-U_{1j}/U<-1$. Функции $\sigma=\sigma_j(r)$ регулярны в окрестности луча $r\geq r_{2j}$. Поэтому существует точка $r^+=\inf\{r: \tau_{2j}(r)=-1\}$ такая, что $\tau_{2j}(r^+)=-1$, $\tau_{2j}(r)>-1$ ($r<r^+$), $\tau_{2j}(r)\sim-1+a_l\xi^l$ ($\xi=r-r^+\rightarrow 0$), причем $a_l>0$ при $l=2p$, $a_l<0$ при $l=2p-1$, p — натуральное. Таким образом, $[r_{2j}, r^+]\subset I_{2j}$, $\varphi_{2j}(r_{2j})=1$, $\varphi_{2j}(r)\sim lr^+a_l\xi^{l-1}<0$ ($-\xi\ll r^+$).

Из предыдущего анализа вытекает, что функция χ_{2j} знакопеременна на отрезке $[r_{2j}, r^+]$ и $\chi_{2j}(r_{2j})=\chi_{2j}(r^+)=0$. Следовательно, при всех $U<U_{1j}$, $\sigma_0<N^+$ существует система кольцевых волн, охватывающих начало координат.

3. Рассмотрим распределение плотности $\rho_0=\rho_1e^{-kz}$, $k>0$. Проанализируем пространственную структуру внутренних волн для j -й моды, вызываемых периодическими по t давлениями, приложенными в малой области свободной поверхности потока.

Аппроксимируем функции $\sigma_j(r)$, $j\geq 2$, дисперсионными зависимостями

$$\sigma_j=Nr[r^2+(j-1)^2\pi^2H^{-2}]^{-1/2}, \quad N=\sqrt{gk}.$$

Введем безразмерные переменные и параметры по формулам

$$\{x; y\} = \frac{H}{(j-1)\pi} \{x_1; y_1\}, \quad t = \frac{t_1}{N}$$

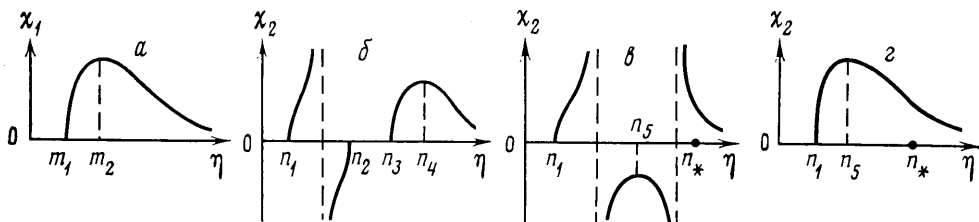
$$r = \frac{(j-1)\pi\eta}{H}, \quad \Omega = \frac{\sigma_0}{N}, \quad F = \frac{U^2}{U_j^2}, \quad U_j = \frac{NH}{(j-1)\pi}$$

Тогда при всех $j \geq 2$ уравнения (2.5) принимают одинаковый вид

$$\operatorname{tg} \gamma = \chi_s(\eta), \quad \chi_s = (-1)^{s+1} \frac{(\eta\tau_s)' \sqrt{1-\tau_s^2}}{1-\tau_s(\eta\tau_s)'}$$

$$\tau_s = \frac{1}{\sqrt{F}\eta} \left[\Omega - (-1)^s \frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}} \right], \quad s=1, 2$$

Функция χ_1 при всех $F > 0$, $\Omega > 0$ имеет качественно одинаковое поведение (фиг. 1, а). Интервалам (m_2, ∞) и (m_1, m_2) соответствуют системы



Фиг. 1

продольных (1) и поперечных (2) волн, показанные на фиг. 2, а ($F=1,6$, $\Omega=0,05$, $t_1=158$). В отличие от случая $\Omega=0$, когда при $F > 1$ система поперечных корабельных волн не генерируется [15], для периодических по времени давлений она возникает при всех $F > 0$.

Кратной стационарной точке $\eta=m_2$ соответствует угол $\gamma_1 = \operatorname{arctg} \chi_1(m_2)$, характеризующий угловую полуширину волновой зоны. Зависимости $\gamma_1 = \gamma_1(F, \Omega)$ приведены на фиг. 3, а, где кривым 1-4 соответствуют значения $\Omega=0; 0,05; 0,1; 0,5$. Угол $\gamma_1(F, \Omega) < \gamma_1(F, 0)$ ($\Omega > 0$) и весьма быстро убывает с ростом Ω . Как функция числа Фруда γ_1 имеет единственный максимум в области $F > 1$, причем $\gamma_1 \rightarrow 0$ при $F \rightarrow 0$ и $F \rightarrow \infty$ ($\Omega = \text{const}$) или $\Omega \rightarrow \infty$ ($F = \text{const}$).

В п. 2 было установлено, что при $\sigma_0 < N^+$ поведение функции χ_2 может претерпевать качественные изменения в зависимости от соотношений между скоростью потока U и ее критическими значениями (2.10). В плоскости параметров F, Ω скоростям (2.10) соответствуют кривые $F=F_1(\Omega)$ и $F=F_2(\Omega)$ ($0 \leq \Omega \leq 1$), приведенные на фиг. 4. Уравнения этих кривых имеют вид

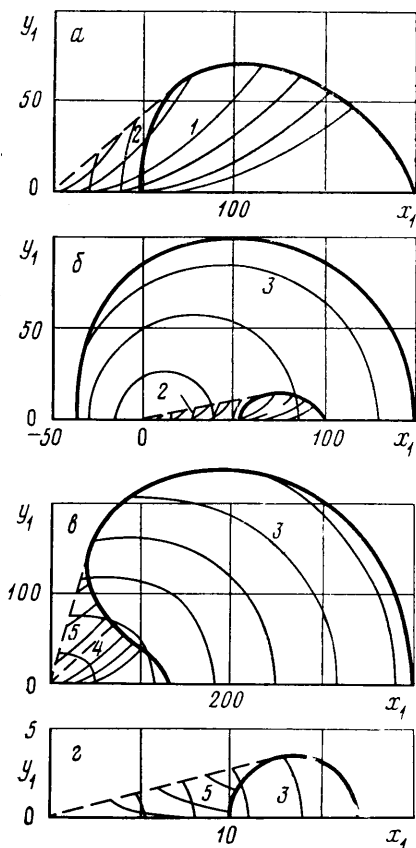
$$F_1 = (1 - \Omega^{2/3})^3$$

$$F_2 = \frac{1}{(1+4\lambda)(1+\lambda)^2}, \quad \Omega = \frac{4\lambda^{3/2}}{(1+4\lambda)\sqrt{1+\lambda}} \quad (\lambda \geq 0)$$

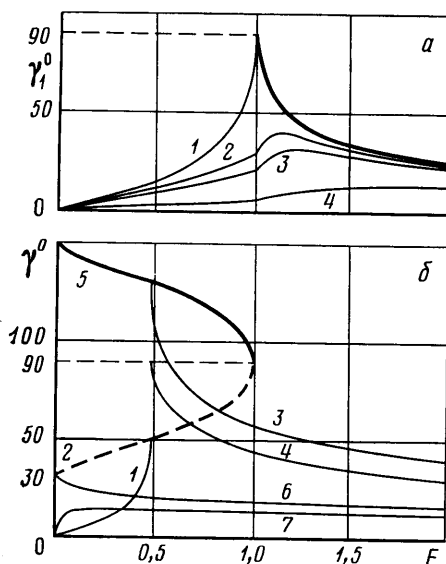
Рассмотрим возможные типы пространственных внутренних волн, соответствующих функциям χ_2 .

1. $F < F_1(\Omega)$, $\Omega < 1$. Качественное поведение функции χ_2 в этом случае показано на фиг. 1, б, конфигурации волновых и передних фронтов генерируемых волн — на фиг. 2, б ($F=\Omega=0,2$, $t_1=224$).

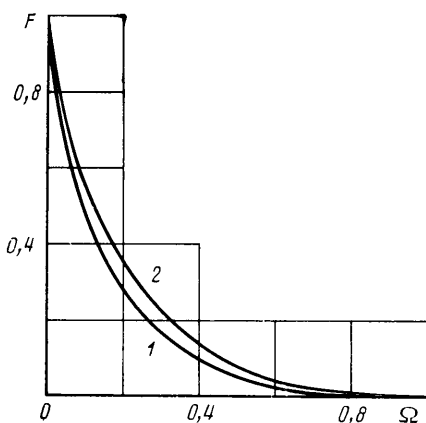
Интервалам (n_1, n_2) , (n_3, n_4) и (n_4, ∞) соответствуют системы волн 3, 2 и 1. Волны 3 являются кольцевыми, получают наибольшее развитие в пространстве и обусловлены гармоническим изменением интенсивности генератора волн со временем. Системы волн 1 и 2, соответствующие χ_1 и χ_2 ,



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

совпадают при $\Omega=0$. Существование для каждой моды при $\Omega \neq 0$ четырех систем прогрессивных волн вида 1, 2, а не двух, как это имеет место при $\Omega=0$, обусловлено эффектом Доплера.

Системы волн 1, 2 локализованы в угловой области $|\gamma| \leq \gamma_2 = \arctg \chi_2(n_i)$. С ростом F угол γ_2 (фиг. 3, б, кривая 1, $\Omega=0,1$) возрастает, достигая максимального значения $\gamma = \gamma_2^+(\Omega)$ (кривая 2) при $F=F_1(\Omega)$. Угол γ_2 возрастает, а γ_2^+ убывает при увеличении Ω ; $\gamma_2 \rightarrow 0$ при $F \rightarrow 0$.

Следует отметить, что $\gamma_2^+ \rightarrow 30^\circ$ при $\Omega \rightarrow 1$ или $F \rightarrow 0$. Для поверхностных волн предельное значение γ_2^+ при $\sigma_0 \rightarrow \infty$ или $U \rightarrow 0$ равно $54^\circ 44'$ [3-7].

2. $F > F_1(\Omega)$, $\Omega < 1$. Поведение функции χ_2 при $F_1(\Omega) < F < F_2(\Omega)$ и $F > F_2(\Omega)$ показано на фиг. 1, в и г соответственно. Несмотря на возможные различия в поведении функции χ_2 , пространственная структура волнового поля при всех $F > F_1$, $\Omega < 1$ качественно одинаковая (фиг. 2, в, $F=0,2$, $\Omega=0,4$, $t=300$).

Интервалам (n_1, n_5) , (n_5, n_*) и (n_*, ∞) соответствуют системы волн 3, 5 и 4. Волны 3 являются аналогом кольцевых волн в случае $F < F_1$, $\Omega < 1$, но в отличие от последних они существуют только внутри области $|\gamma| \leq \gamma_3$, где $\gamma_3 = \arctg \chi_2(n_5) > 90^\circ$ при $F_1 < F < F_2$, $\gamma_3 = \arctg \chi_2(n_5) < 90^\circ$ при $F > F_2$. Системы волн 4, 5 локализованы в угловых областях $|\gamma| \leq \gamma_0$ и

$\gamma_0 < |\gamma| \leq \gamma_3$ соответственно; $\gamma_0 = \arctg \chi_2(n_*)$, $\tau_2'(n_*) = 0$. Наибольшие радиальные скорости имеет передний фронт системы волн 3.

На фиг. 3, б приведены зависимости углов γ_3 (кривая 3) и γ_0 (кривая 4) от числа Фруда F ($\Omega = 0,1$). Углы γ_3 и γ_0 с ростом F ($\Omega = \text{const}$) монотонно убывают и стремятся к нулю при $F \rightarrow \infty$. Максимально возможные при всех $F \geq F_1$ значения углов γ_3 , γ_0

$$\gamma_3^+(\Omega) = \max_{F \geq F_1} \gamma_3, \quad \gamma_0^+(\Omega) = \max_{F \geq F_1} \gamma_0$$

достигаются при $F = F_1(\Omega)$ и таковы, что

$$\gamma_3^+ = 180^\circ - \gamma_2^+, \quad \gamma_0^+ = 90^\circ, \quad \gamma_3^+(1) = 150^\circ, \quad \gamma_3^+(0) = 90^\circ$$

Зависимость $\gamma_3^+ = \gamma_3^+(\Omega)$ описывается кривой 5 на фиг. 3, б.

3. $F > 0$, $\Omega \geq 1$. Качественное поведение χ_2 в этом случае показано на фиг. 1, г; $n_* = \infty$. Интервалам (n_1, n_5) и (n_5, ∞) соответствуют системы волн 3 и 5, изображенные на фиг. 2, г ($F = 0,2$, $\Omega = 1,2$). Среди возможных типов пространственных поверхностных волн, вызываемых в потоке гармоническими по времени генераторами, волны с аналогичной пространственной структурой отсутствуют.

Системы волн 3 и 5 существуют в угловой области $|\gamma| \leq \gamma_3 = \arctg \chi_2(n_5)$, причем $\gamma_3(F, \Omega) < \gamma_3(F, 1) < 30^\circ$ при всех $F > 0$, $\Omega > 1$. Зависимости γ_3 от F при $\Omega = 1,2$ и 1 описываются соответственно кривыми 7 и 6 на фиг. 3, б.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сретенский Л. Н. Движение вибратора под поверхностью жидкости.— Тр. Московск. матем. о-ва, 1954, т. 3, с. 3—14.
2. Becker E. Das Wellenbild einer unter Oberfläche eines Stromes schwerer Flüssigkeit pulsierenden Quelle.— Z. angew. Math. und Mech., 1958, v. 38, № 9—10, p. 391—399.
3. Зайцев А. А. Волны на поверхности потока конечной глубины, возбуждаемые подводным источником.— Докл. АН СССР, 1971, т. 201, № 5, с. 1070—1073.
4. Федосенко В. С. О развитии волн, возникающих от движущихся периодических возмущений.— В кн.: Морские гидрофиз. исследования. № 1. Севастополь: Изд-во Морск. гидрофиз. ин-та АН УССР, 1971, с. 62—80.
5. Tayler A. B., Van der Driessche P. Small amplitude surface waves due to a moving source.— Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1974, v. 27, № 3, p. 317—345.
6. Chee-Seng L. Water waves generated by an oscillatory surface pressure travelling at critical speed.— Wave Motion, 1981, v. 3, № 2, p. 159—179.
7. Доценко С. Ф., Савоськин В. М. Неустановившиеся поверхностные волны в потоке конечной глубины, генерируемые областью переменных давлений.— В кн.: Теоретическое моделирование волновых процессов в океане. Севастополь: Изд-во Морск. гидрофиз. ин-та АН УССР, 1982, с. 5—14.
8. Lighthill M. J. On waves generated in dispersive media systems by travelling forcing effects, with applications to the dynamics of rotating fluids.— J. Fluid Mech., 1967, v. 27, № 4, p. 725—752.
9. Peat K. S., Stevenson T. N. Internal waves around a body moving in a compressible density — stratified fluid.— J. Fluid Mech., 1975, v. 70, № 4, p. 673—688.
10. Peat K. S., Stevenson T. N. The phase configuration of waves around a body moving in rotating stratified fluid.— J. Fluid Mech., 1976, v. 75, № 4, p. 647—656.
11. Доценко С. Ф. Об асимптотическом анализе неустановившихся волн от начальных, периодических и движущихся возмущений.— В кн.: Морские гидрофизические исследования. № 3. Севастополь: Изд-во Морск. гидрофиз. ин-та АН УССР, 1977, с. 44—54.
12. Keller J. B., Levy D. M., Ahluwalia D. S. Internal and surface wave production in a stratified fluid.— Wave Motion, 1981, v. 3, № 3, p. 215—229.
13. Доценко С. Ф. О развитии плоских волн в потоке непрерывно стратифицированной жидкости, генерируемых периодически действующими давлениями.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 4, с. 99—104.
14. Yanovitch M. Gravity waves in a heterogeneous incompressible fluid.— Comm. Pure and Appl. Math., 1962, v. 15, № 1, p. 45—61.
15. Доценко С. Ф. О неустановившихся волнах в непрерывно стратифицированной вращающейся жидкости за движущейся аномалией давления.— Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1981, т. 17, № 10, с. 1084—1091.