**МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА**
**№ 6 • 1984**

УДК 532.592

# О НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ВОЛНОВЫХ ДВИЖЕНИЯХ ЖИДКОСТИ НАД НАКЛОННЫМ ДНОМ

ДОРФМАН А. А.

Впервые распространение неустановившихся волн над плоским наклонным дном в рамках линейной дисперсионной модели рассматривалось в [1]. В этой работе указан путь решения пространственной задачи для случая $\beta=\pi/4$, где $\beta$ – угол наклона плоскости дна к свободной поверхности. Плоская задача изучалась в [2–4]. В статьях [2, 3] получены асимптотические решения задачи Коши – Пуассона для некоторых частных значений угла $\beta$. В [4] предложен метод решения задачи о волновом движении жидкости, обусловленном перемещением участка дна бассейна. Однако сложная структура выражения, полученного путем сведения задачи к неоднородному функциональному уравнению, не позволяет выполнить исследование решения.

Цель настоящей работы состоит в получении некоторых точных решений плоской и пространственной задач о неустановившихся волнах над наклонным дном, пригодных для вычислений и асимптотических оценок.

1. Рассмотрим волновое движение тяжелой жидкости в области, ограниченной свободной поверхностью и плоским наклонным дном. При этом будем считать, что значение угла между дном и свободной поверхностью определяется зависимостью $\beta=\pi/2\lambda$, $\lambda=1, 2, 3, \ldots$.

Запишем систему уравнений, краевых и начальных условий задачи, описывающих движение жидкости в рамках линейной дисперсионной теории волн

$$\Delta\varphi=0,\quad 0<r<\infty,\quad -\beta<\theta<0,\quad |z|<\infty$$

$$\frac{1}{r}\varphi_\theta+\frac{1}{g}\varphi_{tt}=0,\qquad \theta=0;\qquad \frac{1}{r}\varphi_\theta=f_-(r,z,t),\qquad \theta=-\beta$$

$$\varphi=0,\ \varphi_t=-gf_+(r,z),\ \theta=0,\ t=0 \tag{1.1}$$

$$\Delta\equiv\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},\qquad \eta=-\frac{1}{g}\varphi_t\qquad (\theta=0)$$

$$\varphi<\infty,\ r\to0;\ \varphi\to0,\ \sqrt{r^2+z^2}\to\infty$$

Здесь $t$ – время, $r$, $z$, $\theta$ – цилиндрические координаты, $\varphi$ – потенциал скорости, $g$ – ускорение свободного падения, $f_-$, $f_+$ – функции, характеризующие перемещение дна и начальное состояние свободной поверхности соответственно, $\eta$ – отклонение свободной поверхности от равновесного состояния. Область движения жидкости, система координат и основные параметры показаны на фигуре.

Пусть величины $f_+$, $f_-$ неизменны вдоль линии берега и зависят лишь от $r$: $f_+=f_+(r)$, $f_-=f_-(r, t)$. В этом случае движение обладает плоской симметрией, в выражении для оператора Лапласа сохраняются лишь первые два слагаемых. Положим $f_+=0$, тогда выражение для формы свободной поверхности жидкости запишем следующим образом [5]:

$$\eta=-\frac{1}{g}\int_0^\infty\int_0^t G_{t\tau}(\theta=0,\ \theta_0=-\beta)f_-(r_0,\tau)\,dr_0\,d\tau \tag{1.2}$$

Нестационарная функция Грина $G(r, \theta, t; r_0, \theta_0, \tau)$ является решением краевой задачи

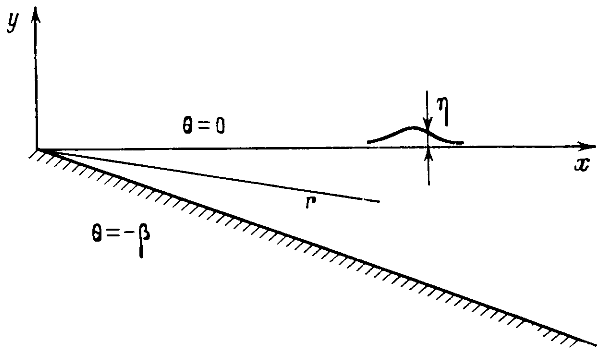
$$\Delta G = -\frac{1}{r}\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)\varepsilon(t-\tau), \quad 0<r<\infty, \quad -\beta<\theta<0$$

$$G_\theta + \frac{r}{g}G_{tt}=0, \quad \theta=0; \quad G_\theta=0, \quad \theta=-\beta \tag{1.3}$$

$$G=G_t=0, \ \theta=0, \ t=\tau$$

где $\delta$, $\varepsilon$ — функции Дирака и Хевисайда соответственно.

Применим к (1.3) интегральное преобразование Лапласа с парамет-




ром $\omega$ по аргументу $t-\tau$ и представим изображение функции Грина в виде $G^L=G_1^L+G_2^L$, тогда получим две краевые задачи

$$\Delta G_1^L = -\frac{1}{r\omega}\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)$$

$$G_1^L=0, \ \theta=0; \ G_{1\theta}^L=0, \ \theta=-\beta \tag{1.4}$$

$$\Delta G_2^L=0$$

$$G_{2\theta}^L + \frac{r\omega^2}{g}G_2^L = -G_{1\theta}^L, \quad \theta=0; \quad G_{2\theta}^L=0, \quad \theta=-\beta \tag{1.5}$$

Путем применения к задаче (1.4) интегрального преобразования Меллина с параметром $p$ по аргументу $r$ придем к выражению для изображения

$$G_1^{LM} = -\frac{r_0^p}{\omega p}\frac{\sin p\theta \cos p(\theta_0+\beta)}{\cos p\beta}, \quad |\theta_0|\geqslant|\theta|\geqslant 0$$

В результате краевое условие при $\theta=0$ задачи (1.5) принимает вид

$$\frac{1}{r}G_{2\theta}^L + \frac{\omega^2}{g}G_2^L = \frac{1}{\omega r_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(L)}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{p+1}\frac{\cos p(\theta_0+\beta)}{\cos p\beta}dp \tag{1.6}$$

где $(L)$ — контур обратного преобразования Меллина.

Будем искать выражение для $G_2^L$ в виде интеграла по собственным функциям задачи:

$$G_2^L = \int\limits_0^\infty N(m)\Phi(mr, \theta)\,dm \tag{1.7}$$

$$\Delta\Phi=0$$

$$\Phi_\theta - mr\Phi=0, \ \theta=0; \ \Phi_\theta=0, \ \theta=-\beta$$

$$\Phi<\infty,\ r\to0;\quad \Phi\to0,\ r\to\infty$$

Выражение для Ф получено в [5—7]

$$\Phi=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_n^s d_n\exp[-mr\cos(\theta+\beta\pm\beta_n)]\cos[mr\sin(\theta+\beta\pm\beta_n)\pm\alpha_n]$$

$$\alpha_n=\frac{\pi n}{2},\quad \beta_n=2n\beta,\quad n=0,1,2,\dots s\quad (\lambda=2s+1) \tag{1.8}$$

$$\alpha_n=\frac{2n-1}{4}\pi,\quad \beta_n=(2n-1)\beta,\quad n=1,2,\dots s\quad (\lambda=2s)$$

$$d_n=2\prod_{j=1}^{s-n}\operatorname{ctg} j\beta,\quad d_0=\prod_{j=1}^{s}\operatorname{ctg} j\beta,\quad \prod_{j=1}^{0}\operatorname{ctg} j\beta=1$$

В формуле (1.8) в сумму включаются слагаемые, соответствующие верхнему и нижнему знакам.

Подставим представление (1.7) в условие (1.6), тогда придем к интегральному уравнению Фредгольма первого рода относительно $N(m)$, ядром которого является функция $\Phi_0(mr)=\Phi(mr,\theta=0)$. Решение этого уравнения получим путем применения формулы разложения по функциям $\Phi_0$, предложенной в работах [2, 6—8]. В результате придем к выражению для $N$ в виде двукратного интеграла. Для вычисления интеграла сделаем замену $p\to-p$ и примем во внимание представление

$$\Phi=\frac{1}{2\pi i}\int_{(L)}\Phi_0{}^M(p)\frac{\cos p(\theta+\beta)}{r^p\cos p\beta}dp$$

которое может быть выведено вследствие применения преобразования Меллина к краевой задаче для Ф. Окончательно получим

$$N(m)=-\frac{\Phi(mr_0,\theta_0)}{\omega(\omega^2g^{-1}+m)}$$

Подставим эту зависимость в (1.7), выполним обратное преобразование Лапласа, тогда придем к выражению

$$G_2=-\int_0^\infty[1-\cos\sqrt{mg}(t-\tau)]\Phi(mr,\theta)\Phi(mr_0,\theta_0)\frac{dm}{m} \tag{1.9}$$

Учитывая, что $G_1=0$ при $\theta=0$ и полагая $f_-=Q\delta(r-a)\delta(t)$, на основании соотношения (1.2) и (1.9) получим

$$\eta=Q\int_0^\infty\cos\sqrt{mg}\,t\Phi_0(mr)\Phi(ma,-\beta)dm$$

Результат интегрирования может быть выражен через специальную функцию $w(\zeta)=u+iv$, основные свойства, числовые значения и асимптотические представления которой даны в [9]

$$\eta=\frac{Q}{4\pi}\sum_{n,k}^{s}d_nd_k\sum_{l=1}^{2}\frac{1}{|\mu_l|}\Big\{\cos(\gamma_l\mp\arg\mu_l)+$$

$$+\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{|\mu_l|}}\left[\sin\left(\frac{3}{2}\arg\mu_l\mp\gamma_l\right)v\left(\frac{\sqrt{g}t}{2\sqrt{|\mu_l|}},\frac{1}{2}\arg\mu_l\right)-\right. \tag{1.10}$$

$$-\cos\left(\frac{3}{2}\arg\mu_l\mp\gamma_l\right)u\left(\frac{\sqrt{g}\,t}{2\sqrt{|\mu_l|}},\ \frac{1}{2}\arg\mu_l\right)\Big]\Big\}$$

$$\mu_l=r\exp[-i(\beta_l\pm\beta_n)]+a\exp[-(-1)^l i\beta_k],\quad \gamma_l=\alpha_n+(-1)^l\alpha_k$$

При выводе формулы (1.10) принимались во внимание свойства четности и периодичности функций $u$ и $v$ [9]:

$$u(\arg\zeta+\pi)=-u(\arg\zeta),\ u(-\arg\zeta)=u(\arg\zeta)$$

$$v(\arg\zeta+\pi)=-v(\arg\zeta),\ v(-\arg\zeta)=-v(\arg\zeta)$$

Для решения задачи Коши — Пуассона о волнах над наклонным дном ($f_-=0$) представим потенциал скорости в виде

$$\varphi=\int\limits_0^\infty N(m)\sin\sqrt{mg}\,t\Phi(mr,\theta)\,dm \tag{1.11}$$

Подставляя (1.11) в неоднородное начальное условие, приведем задачу к интегральному уравнению, решение которого получим путем применения формулы разложения функции $f_+$ в интеграл по собственным функциям $\Phi_0$. Полагая $f_+=Q\delta(r-a)$, придем к решению задачи, выражающемуся зависимостью (1.10), где

$$\mu_l=r\exp[-i(\beta\pm\beta_n)]+a\exp[-(-1)^l i(\beta\pm\beta_k)]$$

Это решение обобщает результаты работ [2, 3, 8] на случай произвольных значений величин $r$, $t$, $\lambda$.

2. Будем считать, что перемещение дна отсутствует, а начальное возмущение свободной поверхности неизменно вдоль координаты $r$ и зависит лишь от $z$: $f_-=0$, $f_+=f_+(z)$. В этом случае движение жидкости имеет пространственный характер. Предположим для определенности, что начальное возмущение симметрично относительно плоскости $z=0$. Тогда, применяя интегральное преобразование Лапласа по времени (параметр $\omega$) и косинус — преобразование Фурье по координате $z$ (параметр $\xi$) — к (1.1), придем к задаче

$$\begin{gathered}\frac{1}{r}(r\varphi_r^{FL})_r+\frac{1}{r^2}\varphi_{\theta\theta}^{FL}-\xi^2\varphi^{FL}=0,\qquad 0<r<\infty,\qquad -\beta<\theta<0\\ \frac{1}{r}\varphi_\theta^{FL}+\frac{\omega^2}{\sigma}\varphi^{FL}=-f_+^F,\qquad \theta=0;\qquad \varphi_\theta^{FL}=0,\qquad \theta=-\beta\end{gathered} \tag{2.1}$$

Решение краевой задачи (2.1) выполним посредством интегрального преобразования Конторовича — Лебедева [10]:

$$\varphi^*=\int\limits_0^\infty(\varphi^{FL}-\varphi_0^{FL})K_\nu(\xi r)\frac{dr}{r},\qquad \varphi_0^{FL}=\varphi^{FL}(r=0)$$

$$\begin{gathered}\varphi_{\theta\theta}^*+\nu^2\varphi^*=\frac{\pi}{2}\varphi_0^{FL}\nu\operatorname{cosec}\frac{\pi\nu}{2},\qquad -\beta<\theta<0\\ \varphi_\theta^*+\frac{\omega^2}{\sigma}\int\limits_0^\infty(\varphi^{FL}-\varphi_0^{FL})K_\nu(\xi r)\,dr=-\frac{\pi}{2\xi}\left(f_+^F+\frac{\omega^2}{\sigma}\varphi_0^{FL}\right)\sec\frac{\pi\nu}{2},\qquad \theta=0\\ \varphi_\theta^*=0,\ \theta=-\beta\end{gathered} \tag{2.2}$$

Здесь $K_\nu$ — функция Макдональда.

Решение уравнения (2.2) с учетом краевого условия на дне имеет вид

$$\varphi^* = C(\nu)\cos\nu(\theta+\beta) + \frac{\pi}{2\nu}\varphi_0^{FL}\operatorname{cosec}\frac{\pi\nu}{2}$$

Подставим этот результат в краевое условие на свободной поверхности, сделаем в полученном равенстве замены $\nu\to1+\nu$, $\nu\to1-\nu$ и вычтем второй результат из первого, тогда придем к функциональному уравнению

$$\Psi(1+\nu)\sin(1+\nu)\beta+\Psi(1-\nu)\sin(1-\nu)\beta+2\cos\chi\cos\nu\beta\Psi(\nu)=2\cos\frac{\pi\nu}{2}$$

$$\Psi(\nu)=\frac{C(\nu)\xi}{\pi f_+^F}\nu\sin\pi\nu, \qquad \cos\chi=\frac{\omega^2}{g\xi}$$

Принимая во внимание формулу обращения преобразования Конторовича — Лебедева, получим

$$\varphi^{FL}=-\frac{1}{\pi i}\frac{f_+^F}{\xi}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\Psi(\nu)\cos\nu(\theta+\beta)K_\nu(\xi r)\,d\nu \tag{2.3}$$

Будем считать $\lambda=2s+1$, $s=0, 1, 2,\ldots$ Для этого случая решение функционального уравнения найдено в [10]

$$\Psi(\nu)=b_{s+1}+2\sum_{n=1}^{s}b_n\cos2(s-n+1)\beta\nu$$

$$b_n=\frac{(-1)^{n-1}g\xi}{\omega^2+g\xi}\prod_{\sigma=1}^{n-1}\frac{\omega^2-g\xi\cos2\sigma\beta}{\omega^2+g\xi\cos2\sigma\beta} \tag{2.4}$$

Подставляя (2.4) в (2.3), получим

$$\varphi^{FL}(\theta=0)=-\frac{f_+^F}{\xi}\Big\{b_{s+1}\exp(-\xi r\cos\beta)+\sum_{n=1}^{s}b_n[\exp(-\xi r\cos(2s-2n+3)\beta)+$$

$$+\exp(-\xi r\cos(2s-2n+1)\beta)]\Big\} \tag{2.5}$$

Положим $f_+=Q\delta(z)$ и выполним обратные преобразования Лапласа и Фурье от (2.5), тогда придем к выражению для формы свободной поверхности

$$\eta=Q\Big\{\sum_{k=0}^{s}A_k^{(s+1)}B_k(\cos\beta)+\sum_{n=1}^{s}\sum_{k=0}^{n-1}A_k^{(n)}[B_k(\cos(2s-2n+3)\beta)+$$

$$+B_k(\cos(2s-2n+1)\beta)]\Big\} \tag{2.6}$$

$$A_k^n=(1-\operatorname{tg}^2k\beta)\prod_{\substack{\sigma=0\\ \sigma\neq k}}^{n-1}\operatorname{ctg}\beta(\sigma+k)\operatorname{ctg}\beta(\sigma-k)$$

$$B_k(\varkappa)=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{r\varkappa}{\Lambda^4}+\frac{\Omega_k t}{\Lambda^3}\left[\sin(3q)v\left(\frac{\Omega_k t}{2\Lambda},q\right)-\cos(3q)u\left(\frac{\Omega_k t}{2\Lambda},q\right)\right]\right\}$$

$$\Lambda=(r^2\varkappa^2+z^2)^{1/4}, \qquad q=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{z}{r\varkappa}$$

$$\Omega_k=\sqrt{g\cos 2k\beta}$$

Зависимости (1.11), (2.6) представляют собой точные решения плоской и пространственной задач о неустановившихся волнах над наклонным дном, они расширяют класс известных точных решений (плоская и осесимметричная задачи для полупространства). В случае $\beta=\pi/2$, $a=0$ формулы (1.10), (2.6) переходят в решение плоской задачи для полупространства, выражающееся через интеграл Френеля [6].

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Келдыш М. В.* К задаче об отражении волн на поверхности тяжелой жидкости.— В кн.: Тр. конф. по теории волнового сопротивления. М.: Изд. ЦАГИ, 1937, с. 140—142.
2. *Румянцев Б. Н.* О неустановившихся движениях тяжелой жидкости у наклонного берега.— ПММ, 1960, т. 24, вып. 3, с. 554—557.
3. *Румянцев Б. Н.* К теории волн Коши — Пуассона у наклонного берега.— Докл. АН СССР, 1960, т. 135, № 2, с. 287—289.
4. *Брэддок Р. Д., Ван-ден-Дрисхе П.* Возбуждение цунами.— В кн.: Волны цунами. Южно-Сахалинск, 1973, с. 34—48.
5. *Стокер Д. Д.* Волны на воде. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 618 с.
6. *Сретенский Л. Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
7. *Васильев Б. А.* Решение стационарной задачи теории теплопроводности для клиновидных тел при граничном условии 3-го рода.— Дифференциальные уравнения, 1970, т. 6, № 3, с. 531—537.
8. *Чаудхури.* Неустановившиеся волны на отлогом берегу.— Тр. амер. о-ва инж.-мех. Прикл. механика, 1971, т. 38, № 3, с. 118—120.
9. *Карпов К. А.* Таблицы функции $w(z)=e^{-z^2}\int\limits_0^z e^{x^2}dx$ в комплексной области. М.: Изд-во АН СССР, 1954, 536 с.
10. *Лебедев Н. Н., Скальская И. П.* Некоторые задачи теории теплопроводности для клиновидных тел. 2.— Журн. техн. физики, 1964, т. 34, вып. 9, с. 1556—1565.


Ленинград

Поступила в редакцию
9.XI.1983